DUDEN

BASISWISSEN SCHULE

Extra
- Mit ausgearbeiteten Referaten direkt im Buch
- Weitere Referatsthemen zum Download

MATHEMATIK

5. BIS 10. KLASSE

Duden

BASISWISSEN SCHULE

MATHEMATIK

5. BIS 10. KLASSE

6., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Inhaltsverzeichnis

Mathematik – eine der ältesten Wissenschaften

1

1

1.1 Was ist die Mathematik und was kann sie?

Geschwindigkeit: $v = \frac{s}{t}$

Bodymaßindex: BMI $= \frac{\text{Körpermasse in kg}}{(\text{Körpergröße in m})^2}$

Umfang: $u = 2(a + b)$

Wasser: H_2O

Ethin C_2H_2: $CH \equiv CH$

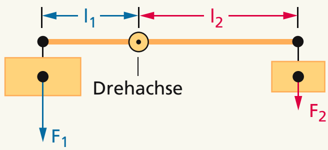
Natriumion: Na^+

Die Mathematik, so wie sie im Unterricht der Sekundarstufe I vermittelt wird, besteht aus den Teilgebieten:

- Rechnen mit Zahlen und Größen (Arithmetik),
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (Algebra),
- Darstellen, Untersuchen und Berechnen von ebenen und räumlichen Figuren (Geometrie),
- Rechnen mit dem Zufall und mit Wahrscheinlichkeiten (Stochastik),
- Untersuchen von Zusammenhängen und funktionalen Beziehungen (Analysis).

In einigen Übersichten werden das Arbeiten mit Größen und das Untersuchen der Teilbarkeit als gesonderte Bereiche ausgewiesen.
Oftmals wird das große Teilgebiet der Geometrie in die Bereiche Planimetrie (ebene Figuren) und Stereometrie (räumliche Objekte) aufgeteilt.
Im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe werden neben diesen Teilgebieten neue Teilbereiche wie die Differenzialrechnung behandelt.
Eine gesonderte Stellung nimmt die sogenannte angewandte Mathematik ein, zu der z. B. die Versicherungsmathematik zählt.

Die Mathematik stellt für alle anderen Wissenschaften Modelle zur Verfügung, mit denen Prozesse in der Wirklichkeit erfasst, beschrieben und untersucht werden können.



$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

Viele Erkenntnisse in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften lassen sich ohne mathematische Grundlagen nicht quantitativ untersuchen und darstellen. Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, die einen Großteil ihrer Erkenntnisse aus Experimenten ableiten, beruhen die Entwicklungen in der Mathematik auf allgemeingültigen Aussagen und streng logischen Schlussfolgerungen.
Die dabei verwendeten Modelle stützen sich auf grundlegende Annahmen, die in Form von Grundbegriffen, Axiomen, Definitionen und Sätzen den Aufbau der Mathematik bestimmen.

Baustein	Beispiel
Grundbegriff	Punkt
Axiom	Parallelenaxiom
Definition	Kreis
Satz	Scheitelwinkelsatz

1.2 Denk- und Arbeitsweisen in der Mathematik

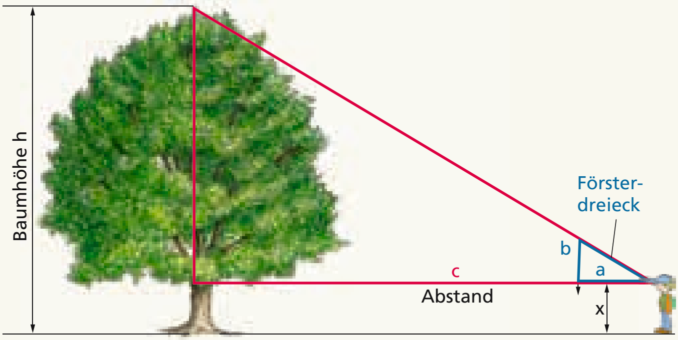
Bei der Beschäftigung mit den Inhalten der Mathematik werden vielfältige Denk- und Arbeitsweisen benötigt, die auch für die Bewältigung von Alltagsanforderungen unerlässlich sind.
Zu den wichtigsten fachspezifischen Denk- und Arbeitsweisen gehören:
- das mathematische Modellieren,
- das Definieren von Begriffen,
- das Aufstellen, Begründen und Beweisen von Vermutungen und Hypothesen,
- das Zeichnen und Konstruieren mathematischer Objekte,
- das Dokumentieren von Lösungswegen,
- das Erfassen, Darstellen und Interpretieren von Daten.

1.2.1 Mathematisches Modellieren

Wenn ein Problem aus dem Alltag bearbeitet werden muss, ist es in einen mathematischen Sachverhalt zu „übersetzen". Das gewählte mathematische Modell muss in allen für das Lösen des Problems wichtigen Eigenschaften mit der realen Situation übereinstimmen.

Zur Bestimmung der Baumhöhe kann das Försterdreieck benutzt werden. Mathematisch führt das auf das Lösen einer Verhältnisgleichung (Strahlensatz).

$\frac{a}{b} = \frac{c}{h - x}$



Das mathematische Modellieren bezieht sich zumeist auf das Lösen von Sachaufgaben oder das Konstruieren geometrischer Objekte und lässt sich in folgende drei Teilhandlungen aufgliedern:

1. Analyse – Sachverhalte auf mathematische Konzepte zurückführen:
- sachbezogene Fragestellungen entwickeln,
- das Problem geeignet vereinfachen,
- Sachverhalte z. B. in Form von Skizzen oder Tabellen darstellen,
- Terme, Gleichungen und Ungleichungen aufstellen,
- passende mathematische Objekte auswählen.

1

2. Lösung – Zusammenhänge erkennen, verwenden und begründen:
- Beziehungen zwischen Größen erkennen,
- Zusammenhänge hinterfragen (mit Alltagserfahrungen vergleichen, Abschätzungen vornehmen, Plausibilitätserklärungen durchführen),
- Abhängigkeiten erkennen,
- grafische Darstellungen (Diagramme) verwenden und interpretieren.

3. Kontrolle – Ergebnisse interpretieren und reflektieren:
- mathematische Ergebnisse in die Sachebene zurückführen,
- Ergebnisse anhand praktischer Erfahrungen prüfen,
- Lösungsstrategien und Lösungswege kritisch bewerten.

In dem folgenden Beispiel sind die einzelnen Schritte in Fragen eingekleidet:

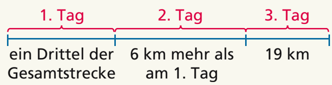
Lilli und Paul stellen der Klasse ihren Vorschlag für eine dreitägige Rundreise mit Fahrrädern vor:
„Am ersten Tag fahren wir ein Drittel der Gesamtstrecke. Am zweiten Tag müssen wir 6 km mehr als am ersten Tag fahren und am dritten Tag fahren wir noch 19 km."
Die Klasse überlegt, ob man aus den Angaben die Gesamtstrecke berechnen kann.

Analyse:

Worum geht es in der Aufgabe?	Es geht um eine Fahrradtour, die drei Tage dauert.
Wie heißt die Frage?	Wie lang ist die Gesamtstrecke?
Wie kann ich mir den Sachverhalt vorstellen?	Ich zeichne drei Strecken, die ein Dreieck bilden.
Ist eine Skizze günstig?	Ich zeichne eine Strecke für die ganze Fahrt.

Lösung:

Kann ich aus der Skizze Beziehungen erkennen?



Was kann ich noch günstiger zeichnen?	– Den zweiten Tag zerlegen – Die Gesamtstrecke in drei Teile teilen: 6 km + 19 km muss auch ein Drittel sein.
Wie rechne ich am günstigsten?	$6 + 19 = 25$ $25 \cdot 3 = 75$

Kontrolle:

Wie kann ich die Rechnung kontrollieren?	$75 : 3 = 25$
Kann das wahr sein?	In drei Tagen schafft man 75 km.

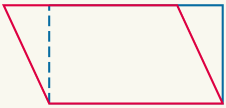
Kann ich das Ergebnis am Sachverhalt prüfen?	Am ersten Tag soll ein Drittel, also 25 km, gefahren werden, am zweiten Tag 6 km mehr, also 31 km. Das sind zusammen 56 km. Es bleiben noch 19 km für den dritten Tag.
Wie lautet die Antwort?	Die Gesamtstrecke ist 75 km lang.

1.2.2 Definieren von Begriffen

Das Definieren von Begriffen in der Mathematik ist auf drei Wegen möglich.

1. Das Objekt beschreiben und Merkmale nennen:
- das Objekt eindeutig beschreiben, z. B. in der Form von „besteht aus“,
- Oberbegriffe nutzen,
- charakteristische Merkmale nennen.

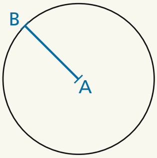
Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel.



Ein Kreis ist die Menge aller Punkte in einer Ebene, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben.

2. Erklären, wie das Objekt entsteht:
- erklären, wie das Objekt erzeugt wird,
- mittels geometrischer Abbildungen Figuren erzeugen.

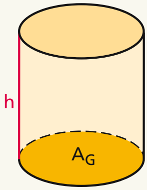
Ein Kreis entsteht, wenn eine Strecke in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte rotiert.



3. Die Bedeutung und die Verwendung eines Zeichens festlegen:
- Schreibweisen festlegen,
- erklären, wie ein Zeichen zu verwenden ist.

Als Radius r eines Kreises wird der Abstand der Punkte des Kreises vom Mittelpunkt bezeichnet.

Mit der Variablen V wird das Volumen eines Körpers bezeichnet.



$V = A_G \cdot h$

1

1.2.3 Vermutungen und Hypothesen aufstellen, begründen und beweisen bzw. widerlegen

In der Mathematik gehört das **Argumentieren,** zu dem auch das Begründen und Beweisen zählen, zu den wichtigsten Tätigkeiten. So sind Aussagen zu treffen, ob z. B. eine Aussage allgemeingültig ist oder ein vorgegebener Lösungsweg bzw. ein Ergebnis richtig ist.
Oftmals müssen weitere Informationen erfragt und festgelegte mathematische Vereinbarungen eingehalten werden.

Dem schließen sich **Arbeitsweisen** an, die man wie folgt strukturieren kann.

1. Vermutungen und Hypothesen aufstellen:
- aufgrund von Erfahrungen ein mögliches Ergebnis nennen,
- eine Aussage treffen.

2. Vermutungen und Hypothesen begründen:
- Fragen und Ziele formulieren,
- mögliche Argumente erfassen und analysieren,
- Vermutung (anfangs umgangssprachlich) formulieren,
- schrittweise formalisieren.

3. Vermutungen und Hypothesen beweisen bzw. widerlegen:
- eine Behauptung formulieren,
- eine Beweisidee suchen,
- Argumente logisch und fachlich richtig miteinander verknüpfen,
- Gegenbeispiel suchen, um Behauptung zu widerlegen,
- allgemeine Beweisstrategien finden und geeignete auswählen,
- verschiedene Beweisverfahren miteinander vergleichen.

Für das **Beweisen** mathematischer Aussagen bietet sich folgende Vorgehensweise an, die in Form von Fragen dargestellt ist.

1. Erfassen und Analysieren der Aufgabe:
- Worum geht es in der Aufgabe?
- Ist eine Skizze möglich?
- Wie sind die vorkommenden Begriffe definiert?
- Was ist die Behauptung?
- Was sind die Voraussetzungen?

2. Suchen nach Beweisideen:
- Woraus würde die Behauptung folgen?
  Kenne ich Sätze mit gleicher oder ähnlicher Behauptung?
- Was lässt sich aus den Voraussetzungen ableiten?
  Kenne ich Sätze mit gleichen Voraussetzungen?
- Kann ich aus Beispielen etwas erkennen?
- Ist es möglich und notwendig, verschiedene Fälle zu betrachten?
- Kenne ich eine ähnliche, bereits gelöste Beweisaufgabe?
  Lässt sich das Vorgehen auf die neue Aufgabe übertragen?

3. Darstellen des Beweises:

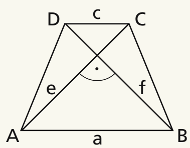
- In welche Schritte muss ich den Beweis zerlegen?
- Wie lautet die Begründung für jeden Beweisschritt?
- Sind die Voraussetzungen der verwendeten Sätze erfüllt?

4. Kontrolle des Beweises:
Stimmen die Skizzen (Konstruktionen) mit der Beweisdarstellung überein?

In dem folgenden Beispiel werden teilweise die Fragen beantwortet:

Wenn in einem Trapez ABCD mit AB || CD die Diagonalen e und f senkrecht zueinander sind, dann gilt $e^2 + f^2 = (a + c)^2$.

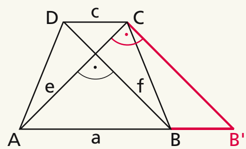
Analyse:
Es geht um die Diagonalen und Seiten eines Trapezes.



Voraussetzung:
Trapez mit AB || CD und AC ⊥ BD

Behauptung:
$e^2 + f^2 = (a + c)^2$

Beweisidee:
Der Satz des Pythagoras sagt etwas über die Summe der Quadrate von Seiten aus.
Ich müsste ein rechtwinkliges Dreieck haben, in dem e und f die Katheten sind und a + c die Hypotenuse ist.
Ich verschiebe die Diagonale f um c in Richtung $\overline{AB}$.
Dabei bleibt der Winkel mit der Diagonalen e erhalten.



Beweis:

Das Dreieck AB'C ist rechtwinklig.	(nach Voraussetzung)
Die Strecke $\overline{AB'} = a + c$ ist Hypotenuse.	(nach Voraussetzung)
Die Seiten $\overline{AC} = e$ und $\overline{B'C} = f$ sind die Katheten im rechtwinkligen Dreieck AB'C.	(nach Voraussetzung)
$\overline{AC}^2 + \overline{B'C}^2 = \overline{AB'}^2$	(Satz des Pythagoras)
$e^2 + f^2 = (a + c)^2$	(w. z. b. w.)

Mit w. z. b. w. (was zu beweisen war) wird das Ende eines Beweises gekennzeichnet.

In verkürzter Form wird dieses Beweisverfahren auch auf arithmetische Aussagen angewandt.

Die Summe von drei aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Voraussetzung:	2n ist eine gerade natürliche Zahl.
Behauptung:	$2n + 2n + 2 + 2n + 4$ ist durch 6 teilbar.
Beweis:	$2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 6n + 6 = 6(n + 1)$
	$6 \mid 6(n + 1)$ (w. z. b. w.)

1

1.2.4 Skizzieren, Zeichnen und Konstruieren mathematischer Objekte

Skizzen gehören zu den häufig genutzten Hilfsmitteln, um sich Sachverhalte zu veranschaulichen.
Beim Zeichnen geometrischer Objekte werden neben den klassischen Hilfsmitteln Zirkel und Lineal auch das Geodreieck genutzt bzw. dynamische Geometriesoftware eingesetzt.
Konstruktionen verlangen ein exaktes Vorgehen und werden in der Regel nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt.
Zur Lösung einer Konstruktionsaufgabe zu ebenen Figuren oder Körpern sind folgende Schritte sinnvoll.

1. Aufgabe analysieren:
- eine Planfigur anfertigen,
- gegebene Stücke markieren,
- nach Beziehungen zwischen den Stücken suchen.

2. Lösungsplan aufstellen:
- nach Lösungsideen suchen,
- prüfen, ob Punkte durch zwei Linien eindeutig festgelegt sind.

3. Konstruktion ausführen:
- schrittweise die notwendigen Punkte der ebenen Figur oder des Körpers konstruieren,
- Konstruktion vervollständigen und z. B. bei Körpern die Sichtbarkeit von Kanten berücksichtigen.

4. Konstruktion kontrollieren:
- Anzahl der Lösungen bestimmen (Eindeutigkeit der Konstruktion),
- Kongruenz der gefundenen Figuren untersuchen.

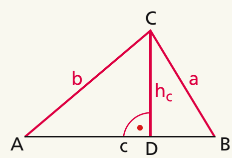
In dem folgenden Beispiel werden die einzelnen Schritte in Form von Fragen formuliert:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen a = 2,3 cm, b = 3,0 cm und der Höhe h_c = 2,0 cm.

Analyse:

Worum geht es in der Aufgabe? — Es geht um die Konstruktion eines Dreiecks.

Ist eine Planfigur möglich?



Welche Stücke sind gegeben? — Die Stücke a, b und h_c werden farbig eingezeichnet.

Grundbegriffe der Mathematik

2

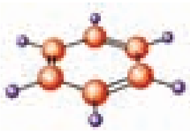
2

2.1 Aussagen

2.1.1 Zeichen und Zeichenreihen in der Mathematik

constans (lat.) – feststehend
varius (lat.) – verschieden, wechselnd

Benzen



C_6H_6

Jeder mathematische Ausdruck ist eine Zeichenreihe, die aus einzelnen Zeichen besteht. Es gibt Konstanten, Variablen und technische Zeichen (z. B. Klammern). Eine **Konstante** ist ein Zeichen mit einem festen Wert bzw. einer festen Bedeutung.

Konstante	Beispiele
Zahlzeichen	4; π; -2; VI
Relationszeichen	$<$; $>$; $=$; $\in$; $\widehat{=}$; $\mid$
Operationszeichen	$+$; $-$; $\cdot$; $:$; $\cap$; $\cup$
Funktionsnamen	sin; cos; ln

Eine **Variable** ist ein Zeichen für ein beliebiges Element.

Definition In mathematischen Ausdrücken können Buchstaben (z. B. a; x; V) oder grafische Symbole (z. B. ○; △; □) als Platzhalter für bestimmte Zahlen verwendet werden. Diese Buchstaben bzw. Symbole werden auch **Variablen** (Veränderliche oder Unbekannte) genannt.

① Lara will für höchstens 3,00 € Eiskugeln zu je 0,70 € kaufen.
$0{,}70\text{ €} \cdot x \leq 3{,}00\text{ €}$ x – Variable für die Anzahl der Eiskugeln

② Karl ist 12 cm größer als Tom.
$k = t + 12\text{ cm}$ k bzw. t – Variablen für die Körpergrößen von Karl bzw. Tom

Anstelle von **Grundbereich** wird oft von Grundmenge gesprochen.

Für die Variable kann jedes Element eines vorgegebenen **Grundbereichs** G (Variablengrundbereich) eingesetzt werden. Zu einer Variablen gehört deshalb stets zugleich auch ein Grundbereich. Grundbereiche sind Mengen, insbesondere Mengen von Zahlen oder Größenbereiche.

① $0{,}70\text{ €} \cdot x \leq 3{,}00\text{ €}$
Da x für eine Anzahl steht, ist der Grundbereich für x die Menge der natürlichen Zahlen, also $G = \mathbb{N}$

Anzahl der Eiskugeln: x	Gesamtpreis: 0,70 € · x
1	0,70 €
2	1,40 €
3	2,10 €
4	2,80 €
5	3,50 €
…	…

Lara kann eine, zwei, drei oder vier Kugeln Eis kaufen, wenn sie höchstens 3,00 € bezahlen will.

② In den Ausdruck $7x^2$ ($G = \mathbb{R}$) dürfen für x alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Für keine dieser Zahlen nimmt der Ausdruck einen negativen Wert an.

Treten in einem Ausdruck mehrere Variablen auf, so kann man zwischen **Formvariablen** und **Lösungsvariablen** unterscheiden.
Die Lösungsvariable ist jeweils diejenige, nach der aufgelöst wird. Die Formvariablen nehmen in jedem konkreten Fall verschiedene Werte an.

Karl ist 12 cm größer als Tom. Wie groß ist Karl, wenn Tom 1,64 m, 1,70 m oder 1,77 m groß ist?

$k = t + 12$ cm — k – Lösungsvariable
$k_1 = 1{,}76$ m für $t_1 = 1{,}64$ m — t – Formvariable
$k_2 = 1{,}82$ m für $t_2 = 1{,}70$ m
$k_3 = 1{,}89$ m für $t_3 = 1{,}77$ m

Sprachliche Gebilde lassen sich mithilfe mathematischer Zeichenreihen als **Terme** (↗ S. 124; Begriffe Variable und Term) darstellen und umgekehrt.

Term	Sprachliche Formulierung
3x	das Dreifache einer Zahl
a^2	das Quadrat einer Zahl
a + b	die Summe zweier Zahlen

Definition Ein **Term** ist eine sinnvolle mathematische Zeichenreihe *ohne* Relationszeichen.

relatio (lat.) – Beziehung, Verhältnis

T_1: 61 T_2: $a(2 + x)$; $G = \mathbb{Z}$ T_3: 34 + 27
T_4: $\sqrt{25}$ T_5: $(2y - 3x)^3$; $G = \mathbb{R}$ T_6: $(a + b)(a - b)$; $G = \mathbb{N}$

T → Term

Die Terme T_1, T_3 und T_4 enthalten keine Variablen. Ihr **Termwert** kann sofort angegeben oder ausgerechnet werden. Beispielsweise ist $T_1 = 61$ und $T_3 = 61$. Die Terme T_1 und T_3 haben den gleichen Wert.
Die Terme T_2, T_5 und T_6 enthalten Variablen. Wird für die Variablen ein Element aus einem Grundbereich G eingesetzt, nimmt der Term stets einen konkreten Wert an.

Term	Beispiele aus G	Einsetzung	Termwert
T_2: $a(2 + x)$	a = 4; x = –2	$4[2 + (-2)]$	0
T_5: $(2y - 3x)^3$	y = 3; x = 1	$(2 \cdot 3 - 3 \cdot 1)^3$	27
T_6: $(a + b)(a - b)$	a = 7; b = 2	$(7 + 2)(7 - 2)$	45

$2 \cdot (7 \cdot x) + 3$
$14 \cdot x + 3$

Dieses Einsetzen einer Zahl für die Variablen heißt **Variablenbelegung.**