

DUDEN

**BASISWISSEN
SCHULE**

Extra

- › Mit ausgearbeiteten Referaten direkt im Buch
- › Weitere Referats-themen zum Download



MATHEMATIK

5. BIS 10. KLASSE

Duden

BASISWISSEN SCHULE

MATHEMATIK

5. BIS 10. KLASSE

6., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematik – eine der ältesten Wissenschaften	9
1.1	Was ist Mathematik und was kann sie?	10
1.2	Denk- und Arbeitsweisen in der Mathematik	11
1.2.1	Mathematisches Modellieren	11
1.2.2	Definieren von Begriffen	13
1.2.3	Vermutungen und Hypothesen aufstellen, begründen und beweisen bzw. widerlegen	14
1.2.4	Skizzieren, Zeichnen und Konstruieren mathematischer Objekte	16
1.2.5	Lösungswege dokumentieren und die Fachsprache angemessen einsetzen	18
1.2.6	Lösungsstrategien bei Sach- und Anwendungsaufgaben nutzen	19
1.2.7	Erfassen, Darstellen und Interpretieren von Daten	13
2	Grundbegriffe der Mathematik	23
2.1	Aussagen	24
2.1.1	Zeichen und Zeichenreihen in der Mathematik	24
2.1.2	Wahrheitswerte von Aussagen	28
2.1.3	Erfüllbarkeit von Aussageformen	29
2.1.4	Logische Operationen	30
2.1.5	Definitionen	35
2.1.6	Sätze und Beweise	36
2.2	Mengen	40
2.2.1	Mengenbegriff	40
2.2.2	Darstellung von Mengen	41
2.2.3	Mächtigkeit von Mengen	42
2.2.4	Relationen zwischen zwei Mengen	43
2.2.5	Mengenoperationen	45
3	Zahlen und Rechnen	49
3.1	Natürliche Zahlen	50
3.1.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	50
3.1.2	Rechnen mit natürlichen Zahlen	53
3.1.3	Vielfache und Teiler	53
3.2	Ganze Zahlen	63
3.2.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	63
3.2.2	Rechnen mit ganzen Zahlen	65
3.3	Gebrochene Zahlen	71
3.3.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	71
3.3.2	Rechnen mit gemeinen Brüchen	75
3.3.3	Rechnen mit Zehnerbrüchen (Dezimalbrüchen).	79
3.4	Rationale Zahlen	82
3.4.1	Zahlbegriff; Zahldarstellungen	82
3.4.2	Rechnen mit rationalen Zahlen	84
3.5	Reelle Zahlen	87
3.5.1	Zahlbegriff	87
3.5.2	Rechnen mit reellen Zahlen	88

	3.6 Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	89
	3.6.1 Potenzbegriff; Potenzgesetze; Rechnen mit Potenzen	89
	3.6.2 Wurzelbegriff; Wurzelgesetze; Rechnen mit Wurzeln.	93
	3.6.3 Logarithmen; Logarithmengesetze	95
	3.7 Größen	96
	3.7.1 Größenbereiche	96
	3.7.2 Längen-, Flächen- und Volumeneinheiten	97
	3.7.3 Masseinheiten	99
	3.7.4 Zeiteinheiten	99
	3.7.5 Währungseinheiten	100
	3.8 Rechnen mit Näherungswerten	101
	3.8.1 Grundbegriffe	101
■ Überblick	3.8.2 Rechnen mit Näherungswerten	102
	4 Prozent- und Zinsrechnung	105
	4.1 Prozentrechnung	106
	4.1.1 Grundbegriffe	106
	4.1.2 Bequeme Prozentsätze	106
	4.1.3 Berechnen von Prozentwerten, Prozentsätzen, Grundwerten	107
	4.1.4 Grafische Darstellungen von Prozentsätzen	110
	4.2 Promillerechnung	111
	4.3 Zinsrechnung	112
	4.3.1 Grundbegriffe	112
	4.3.2 Berechnen von Zinsen, Zinssatz, Kapital und Zeitspannen . .	112
	4.3.3 Zinsszins	116
■ Überblick	4.4 Rentenrechnung	119
	4.4.1 Ratenzahlungen	119
■ Überblick	4.4.2 Schuldentilgung	121
	5 Gleichungen und Ungleichungen	123
	5.1 Variable und Terme	124
	5.1.1 Rechnen mit Variablen; Termumformungen	125
	5.2 Grundlagen der Gleichungslehre	129
	5.2.1 Grundbegriffe	129
	5.2.2 Lösen einer Gleichung bzw. Ungleichung; Lösungsmenge . .	130
	5.2.3 Proben bei Gleichungen und Ungleichungen.	132
	5.2.4 Inhaltliches Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen. . .	133
	5.3 Äquivalentes Umformen von Gleichungen und Ungleichungen	135
	5.3.1 Begriff „Äquivalenz“	135
	5.3.2 Äquivalentes Umformen von Gleichungen.	135
	5.3.3 Äquivalentes Umformen von Ungleichungen	137
	5.4 Lineare Gleichungen	138
	5.4.1 Lineare Gleichungen mit einer Variablen	138
	5.4.2 Lineare Gleichungen mit zwei Variablen	142
	5.5 Lineare Ungleichungen	143
	5.5.1 Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	143
	5.5.2 Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen	144
	5.6 Lineare Gleichungssysteme	145
	5.6.1 Begriffe	145
■ Überblick	5.6.2 Lösen linearer Gleichungssysteme	145

5.7	Quadratische Gleichungen	149	
5.7.1	Begriffe	149	
5.7.2	Lösungsverfahren für spezielle quadratische Gleichungen	149	
5.7.3	Lösungsformel für quadratische Gleichungen	150	
5.7.4	Diskussion der Lösungen einer quadratischen Gleichung	151	
5.7.5	Wurzelsatz von Vieta	152	
5.8	Bruchgleichungen und Bruchungleichungen	153	■ Überblick 155
5.9	Algebraische Gleichungen höheren Grades	156	
5.9.1	Begriff	156	
5.9.2	Kubische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades	156	
5.9.3	Polynomdivision	158	
5.10	Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen	160	
5.10.1	Begriffe	160	
5.10.2	Lösen von Wurzelgleichungen	160	
5.10.3	Lösen von Exponentialgleichungen	162	
5.10.4	Lösen von Logarithmengleichungen	163	
5.11	Trigonometrische Gleichungen	164	
5.12	Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen mit einer Variablen	165	
5.12.1	Iterationsverfahren	165	
5.12.2	Nullstellenbestimmung durch Intervallschachtelung	166	
5.12.3	Sekantennäherungsverfahren (regula falsi)	167	■ Überblick 168
6	Funktionen	169	
6.1	Grundbegriffe und Eigenschaften von Funktionen	170	
6.1.1	Funktionsbegriff	170	
6.1.2	Darstellung von Funktionen	171	
6.1.3	Eigenschaften von Funktionen	172	
6.1.4	Schnittpunkte von Funktionsgraphen mit den Achsen	174	■ Überblick 176
6.2	Proportionalität		
6.2.1	Direkte Proportionalität	177	
6.2.2	Indirekte Proportionalität	178	
6.3	Lineare Funktionen	180	
6.3.1	Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x$	180	
6.3.2	Funktionen mit der Gleichung $y = m \cdot x + n$	182	■ Überblick 185
6.4	Quadratische Funktionen	186	
6.4.1	Graphen quadratischer Funktionen	186	
6.4.2	Nullstellen der Funktionen mit $y = x^2 + p \cdot x + q$	188	
6.4.3	Funktionen mit $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	189	■ Überblick 190
6.5	Potenzfunktionen	191	
6.5.1	Potenzfunktionen mit geraden Exponenten	191	
6.5.2	Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten	192	
6.6	Wurzelfunktionen	193	
6.6.1	Funktionen mit $y = \sqrt{x}$	193	
6.6.2	Funktionen mit $y = \sqrt[n]{x}$	193	
6.7	Exponentialfunktionen	194	
6.7.1	Funktionen mit $y = a^x$	194	
6.7.2	Funktionen mit $y = e^x$	194	
6.8	Logarithmusfunktionen	195	
6.8.1	Funktionen mit $y = \log_a x$	195	
6.8.2	Funktionen mit $y = \lg x$ und $y = \ln x$	195	

	6.9 Winkelfunktionen (trigonometrische Funktionen)	196
	6.9.1 Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens am rechtwinkligen Dreieck	196
	6.9.2 Winkelfunktionen am Kreis	196
■ Überblick 202	6.9.3 Graphen und Eigenschaften der Winkelfunktionen	198
	7 Planimetrie	203
	7.1 Grundbegriffe	204
	7.1.1 Ebene, Linie, Punkt, Gerade, Strahl und Strecke	204
	7.1.2 Länge und Längenmessung	208
	7.1.3 Fläche und Flächeninhaltsmessung	209
■ Überblick 217	7.1.4 Winkel und Winkelmessung	210
	7.2 Konstruktionen	218
	7.2.1 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	218
	7.2.2 Konstruktionen mit Zeichendreieck, Lineal und Geodreieck.	220
	7.2.3 Konstruktionen mit der Methode der Bestimmungslinien	221
	7.2.4 Softwaregestütztes Konstruieren	223
	7.3 Geometrische Abbildungen	224
	7.3.1 Ähnlichkeitsabbildungen	225
	7.3.2 Kongruenzabbildungen	226
	7.4 Bewegung, Kongruenz und Symmetrie	228
	7.4.1 Spezielle Bewegungen	228
	7.4.2 Nacheinanderausführung von Bewegungen	231
	7.4.3 Kongruenz	234
	7.4.4 Symmetrie	235
	7.5 Zentrische Streckung, Ähnlichkeit und Strahlensätze	237
	7.5.1 Zentrische Streckung	237
	7.5.2 Ähnlichkeit	239
■ Überblick 244	7.5.3 Strahlensätze	240
	7.6 Dreiecke	245
	7.6.1 Dreiecksarten	245
	7.6.2 Sätze über das Dreieck	246
	7.6.3 Besondere Linien und Punkte des Dreiecks	247
	7.6.4 Kongruenz von Dreiecken	249
	7.6.5 Ähnlichkeit von Dreiecken	251
	7.6.6 Konstruktion von Dreiecken	251
	7.6.7 Flächeninhaltsberechnung von Dreiecken	254
	7.6.8 Satzgruppe des Pythagoras	256
	7.6.9 Anwendung der trigonometrischen Funktionen	260
	7.7 Vierecke	266
	7.7.1 Allgemeines Viereck	266
	7.7.2 Klassifizierung von Vierecken	267
■ Überblick 276	7.7.3 Spezielle Vierecke und deren Eigenschaften	271
	7.8 Vielecke (Polygone)	277
	7.8.1 Allgemeine Eigenschaften	277
	7.8.2 Regelmäßige n-Ecke	278
	7.9 Kreis	280
	7.9.1 Begriffe	280
	7.9.2 Winkel am Kreis	285
	7.9.3 Inkreis und Umkreis von Vielecken	287
■ Überblick 292	7.9.4 Berechnungen am Kreis	288

8	Stereometrie	293
8.1	Grundlagen der Körperdarstellung	294
8.1.1	Begriffe und Merkmale geometrischer Körper	294
8.1.2	Projektionsarten	296
8.1.3	Schräge Parallelprojektionen	297
8.1.4	Senkrechte Parallelprojektionen	298
8.1.5	Körpernetze	301
8.2	Grundlagen der Körperberechnung	302
8.3	Würfel und Quader	303
8.3.1	Begriffe und Formeln	303
8.3.2	Darstellung von Würfeln und Quadern	304
8.4	Prisma und Kreiszylinder	305
8.4.1	Begriffe und Formeln	305
8.4.2	Darstellung von Zylindern und Prismen	309
8.5	Pyramide und Kreiskegel	313
8.5.1	Begriffe und Formeln	313
8.5.2	Darstellung von Pyramiden und Kegeln	318
8.6	Pyramidenstumpf und Kegelstumpf	320
8.7	Kugel	323
8.8	Zusammengesetzte Körper	324
8.9	Regelmäßige Polyeder	326
9	Stochastik	329
9.1	Kombinatorisches Rechnen; Zählstrategien	330
9.1.1	Anordnungen	330
9.1.2	Zählstrategien	334
9.2	Elemente der beschreibenden Statistik	336
9.2.1	Statistische Erhebungen (Erfassen und Auswerten von Daten)	336
9.2.2	Statistische Kenngrößen (bei Häufigkeitsverteilungen)	341
9.3	Wahrscheinlichkeitsrechnung	347
9.3.1	Vorgänge mit zufälligem Ergebnis; zufällige Ereignisse	347
9.3.2	Elementarer Wahrscheinlichkeitsbegriff; Berechnen von Wahrscheinlichkeiten	349
9.3.3	Mehrstufige Zufallsversuche	350
9.3.4	Zufallsgrößen und ihre Verteilung	356
10	Rechenhilfsmittel	361
10.1	Geschichtlicher Abriss	362
10.2	Elektronische Hilfsmittel	365
10.2.1	Elektronische Taschenrechner	365
10.2.2	Grafikfähige Taschenrechner	368
10.2.3	Computeralgebrasysteme	370
10.2.4	Tabellenkalkulationsprogramme	372
10.2.5	Dynamische Geometriesoftware	375

■ Überblick 312

■ Überblick 328

■ Überblick 360

A	Anhang	379
	Übersicht zur Herkunft ausgewählter mathematischer Begriffe	380
	Mathematische Zeichen und Symbole	383
	Griechisches Alphabet	384
	Römische Zahlzeichen	384
	Rundungsregeln	385
	Einheiten von Größen	385
	Nichtdezimale Einheiten (Auswahl)	386
	Maße im Haushalt	386
	Kettensatz	388
	Mischungsrechnen	388
	Referate	389
	Register	397
	Bildquellenverzeichnis	408

Mathematik –
eine der ältesten Wissenschaften

1



1.1 Was ist die Mathematik und was kann sie?

► Geschwindigkeit:

$$v = \frac{s}{t}$$

Bodymassindex: BMI

$$= \frac{\text{Körpermasse in kg}}{(\text{Körpergröße in m})^2}$$

Umfang: $u = 2(a + b)$

Wasser: H_2O

Ethin C_2H_2 : $CH \equiv CH$

Natrium: Na^+

Die Mathematik, so wie sie im Unterricht der Sekundarstufe I vermittelt wird, besteht aus den Teilgebieten:

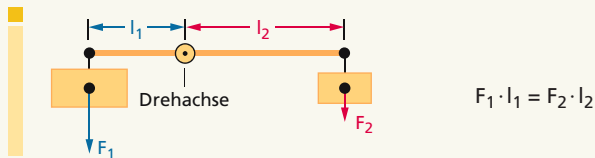
- Rechnen mit Zahlen und Größen (Arithmetik),
- Lösen von Gleichungen und Ungleichungen (Algebra),
- Darstellen, Untersuchen und Berechnen von ebenen und räumlichen Figuren (Geometrie),
- Rechnen mit dem Zufall und mit Wahrscheinlichkeiten (Stochastik),
- Untersuchen von Zusammenhängen und funktionalen Beziehungen (Analysis).

In einigen Übersichten werden das Arbeiten mit Größen und das Untersuchen der Teilbarkeit als gesonderte Bereiche ausgewiesen.

Oftmals wird das große Teilgebiet der Geometrie in die Bereiche Planimetrie (ebene Figuren) und Stereometrie (räumliche Objekte) aufgeteilt. Im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe werden neben diesen Teilgebieten neue Teilbereiche wie die Differenzialrechnung behandelt.

Eine gesonderte Stellung nimmt die sogenannte angewandte Mathematik ein, zu der z. B. die Versicherungsmathematik zählt.

Die Mathematik stellt für alle anderen Wissenschaften Modelle zur Verfügung, mit denen Prozesse in der Wirklichkeit erfasst, beschrieben und untersucht werden können.



Viele Erkenntnisse in den Natur- und Gesellschaftswissenschaften lassen sich ohne mathematische Grundlagen nicht quantitativ untersuchen und darstellen. Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, die einen Großteil ihrer Erkenntnisse aus Experimenten ableiten, beruhen die Entwicklungen in der Mathematik auf allgemeingültigen Aussagen und streng logischen Schlussfolgerungen.

Die dabei verwendeten Modelle stützen sich auf grundlegende Annahmen, die in Form von Grundbegriffen, Axiomen, Definitionen und Sätzen den Aufbau der Mathematik bestimmen.

Baustein	Beispiel
Grundbegriff	Punkt
Axiom	Parallelenaxiom
Definition	Kreis
Satz	Scheitelwinkelsatz

1.2 Denk- und Arbeitsweisen in der Mathematik

Bei der Beschäftigung mit den Inhalten der Mathematik werden vielfältige Denk- und Arbeitsweisen benötigt, die auch für die Bewältigung von Alltagsanforderungen unerlässlich sind.

Zu den wichtigsten fachspezifischen Denk- und Arbeitsweisen gehören:

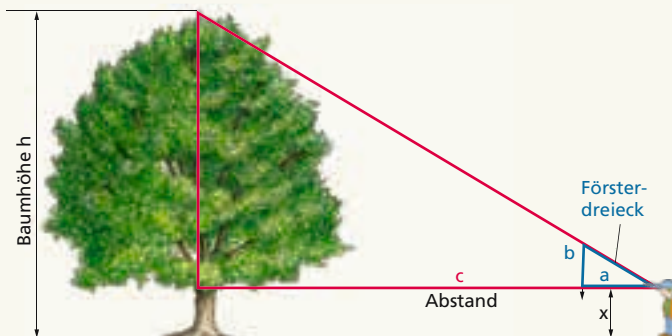
- das mathematische Modellieren,
- das Definieren von Begriffen,
- das Aufstellen, Begründen und Beweisen von Vermutungen und Hypothesen,
- das Zeichnen und Konstruieren mathematischer Objekte,
- das Dokumentieren von Lösungswegen,
- das Erfassen, Darstellen und Interpretieren von Daten.

1.2.1 Mathematisches Modellieren

Wenn ein Problem aus dem Alltag bearbeitet werden muss, ist es in einen mathematischen Sachverhalt zu „übersetzen“. Das gewählte mathematische Modell muss in allen für das Lösen des Problems wichtigen Eigenschaften mit der realen Situation übereinstimmen.

- Zur Bestimmung der Baumhöhe kann das Försterdreieck benutzt werden. Mathematisch führt das auf das Lösen einer Verhältnisgleichung (Strahlensatz).

$$\triangleright \frac{a}{b} = \frac{c}{h-x}$$



Das mathematische Modellieren bezieht sich zumeist auf das Lösen von Sachaufgaben oder das Konstruieren geometrischer Objekte und lässt sich in folgende drei Teilhandlungen aufgliedern:

1. Analyse – Sachverhalte auf mathematische Konzepte zurückführen:

- sachbezogene Fragestellungen entwickeln,
- das Problem geeignet vereinfachen,
- Sachverhalte z. B. in Form von Skizzen oder Tabellen darstellen,
- Terme, Gleichungen und Ungleichungen aufstellen,
- passende mathematische Objekte auswählen.

2. Lösung – Zusammenhänge erkennen, verwenden und begründen:

- Beziehungen zwischen Größen erkennen,
- Zusammenhänge hinterfragen (mit Alltagserfahrungen vergleichen, Abschätzungen vornehmen, Plausibilitätserklärungen durchführen),
- Abhängigkeiten erkennen,
- grafische Darstellungen (Diagramme) verwenden und interpretieren.

3. Kontrolle – Ergebnisse interpretieren und reflektieren:

- mathematische Ergebnisse in die Sachebene zurückführen,
- Ergebnisse anhand praktischer Erfahrungen prüfen,
- Lösungsstrategien und Lösungswege kritisch bewerten.

In dem folgenden Beispiel sind die einzelnen Schritte in Fragen eingekleidet:

Lilli und Paul stellen der Klasse ihren Vorschlag für eine dreitägige Rundreise mit Fahrrädern vor:

„Am ersten Tag fahren wir ein Drittel der Gesamtstrecke. Am zweiten Tag müssen wir 6 km mehr als am ersten Tag fahren und am dritten Tag fahren wir noch 19 km.“

Die Klasse überlegt, ob man aus den Angaben die Gesamtstrecke berechnen kann.

Analyse:

Worum geht es in der Aufgabe? Es geht um eine Fahrradtour, die drei Tage dauert.

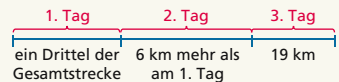
Wie heißt die Frage? Wie lang ist die Gesamtstrecke?

Wie kann ich mir den Sachverhalt vorstellen? Ich zeichne drei Strecken, die ein Dreieck bilden.

Ist eine Skizze günstig? Ich zeichne eine Strecke für die ganze Fahrt.

Lösung:

Kann ich aus der Skizze Beziehungen erkennen?



Was kann ich noch günstiger zeichnen? – Den zweiten Tag zerlegen
– Die Gesamtstrecke in drei Teile teilen:

6 km + 19 km muss auch ein Drittel sein.

Wie rechne ich am günstigsten? $6 + 19 = 25$
 $25 \cdot 3 = 75$

Kontrolle:

Wie kann ich die Rechnung kontrollieren? $75 : 3 = 25$

Kann das wahr sein? In drei Tagen schafft man 75 km.

Kann ich das Ergebnis am Sachverhalt prüfen?

Am ersten Tag soll ein Drittel, also 25 km, gefahren werden, am zweiten Tag 6 km mehr, also 31 km. Das sind zusammen 56 km. Es bleiben noch 19 km für den dritten Tag.

Wie lautet die Antwort?

Die Gesamtstrecke ist 75 km lang.

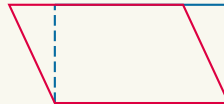
1.2.2 Definieren von Begriffen

Das Definieren von Begriffen in der Mathematik ist auf drei Wegen möglich.

1. Das Objekt beschreiben und Merkmale nennen:

- das Objekt eindeutig beschreiben, z. B. in der Form von „besteht aus“,
- Oberbegriffe nutzen,
- charakteristische Merkmale nennen.

- Ein Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel.

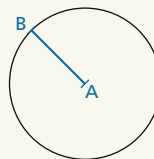


Ein Kreis ist die Menge aller Punkte in einer Ebene, die von einem festen Punkt den gleichen Abstand haben.

2. Erklären, wie das Objekt entsteht:

- erklären, wie das Objekt erzeugt wird,
- mittels geometrischer Abbildungen Figuren erzeugen.

- Ein Kreis entsteht, wenn eine Strecke in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte rotiert.

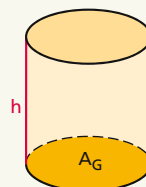


3. Die Bedeutung und die Verwendung eines Zeichens festlegen:

- Schreibweisen festlegen,
- erklären, wie ein Zeichen zu verwenden ist.

- Als Radius r eines Kreises wird der Abstand der Punkte des Kreises vom Mittelpunkt bezeichnet.

Mit der Variablen V wird das Volumen eines Körpers bezeichnet.



$$\blacktriangleright V = A_G \cdot h$$

1.2.3 Vermutungen und Hypothesen aufstellen, begründen und beweisen bzw. widerlegen

In der Mathematik gehört das **Argumentieren**, zu dem auch das Begründen und Beweisen zählen, zu den wichtigsten Tätigkeiten. So sind Aussagen zu treffen, ob z. B. eine Aussage allgemeingültig ist oder ein vorgegebener Lösungsweg bzw. ein Ergebnis richtig ist. Oftmals müssen weitere Informationen erfragt und festgelegte mathematische Vereinbarungen eingehalten werden.

Dem schließen sich **Arbeitsweisen** an, die man wie folgt strukturieren kann.

1. Vermutungen und Hypothesen aufstellen:

- aufgrund von Erfahrungen ein mögliches Ergebnis nennen,
- eine Aussage treffen.

2. Vermutungen und Hypothesen begründen:

- Fragen und Ziele formulieren,
- mögliche Argumente erfassen und analysieren,
- Vermutung (anfangs umgangssprachlich) formulieren,
- schrittweise formalisieren.

3. Vermutungen und Hypothesen beweisen bzw. widerlegen:

- eine Behauptung formulieren,
- eine Beweisidee suchen,
- Argumente logisch und fachlich richtig miteinander verknüpfen,
- Gegenbeispiel suchen, um Behauptung zu widerlegen,
- allgemeine Beweisstrategien finden und geeignete auswählen,
- verschiedene Beweisverfahren miteinander vergleichen.

Für das **Beweisen** mathematischer Aussagen bietet sich folgende Vorgehensweise an, die in Form von Fragen dargestellt ist.

1. Erfassen und Analysieren der Aufgabe:

- Worum geht es in der Aufgabe?
- Ist eine Skizze möglich?
- Wie sind die vorkommenden Begriffe definiert?
- Was ist die Behauptung?
- Was sind die Voraussetzungen?

2. Suchen nach Beweisideen:

- Woraus würde die Behauptung folgen?
Kenne ich Sätze mit gleicher oder ähnlicher Behauptung?
- Was lässt sich aus den Voraussetzungen ableiten?
Kenne ich Sätze mit gleichen Voraussetzungen?
- Kann ich aus Beispielen etwas erkennen?
- Ist es möglich und notwendig, verschiedene Fälle zu betrachten?
- Kenne ich eine ähnliche, bereits gelöste Beweisaufgabe?
Lässt sich das Vorgehen auf die neue Aufgabe übertragen?

3. Darstellen des Beweises:

- In welche Schritte muss ich den Beweis zerlegen?
- Wie lautet die Begründung für jeden Beweisschritt?
- Sind die Voraussetzungen der verwendeten Sätze erfüllt?

4. Kontrolle des Beweises:

Stimmen die Skizzen (Konstruktionen) mit der Beweisdarstellung überein?

In dem folgenden Beispiel werden teilweise die Fragen beantwortet:

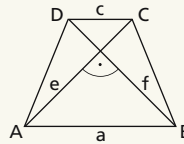
- Wenn in einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ die Diagonalen e und f senkrecht zueinander sind, dann gilt $e^2 + f^2 = (a + c)^2$.

Analyse:

Es geht um die Diagonalen und Seiten eines Trapezes.

Voraussetzung:

Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AC \perp BD$

**Behauptung:**

$$e^2 + f^2 = (a + c)^2$$

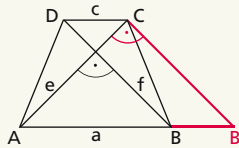
Beweisidee:

Der Satz des Pythagoras sagt etwas über die Summe der Quadrate von Seiten aus.

Ich müsste ein rechtwinkliges Dreieck haben, in dem e und f die Katheten sind und $a + c$ die Hypotenuse ist.

Ich verschiebe die Diagonale f um c in Richtung \overline{AB} .

Dabei bleibt der Winkel mit der Diagonalen e erhalten.

**Beweis:**

Das Dreieck $AB'C$ ist rechtwinklig.

(nach Voraussetzung)

Die Strecke $\overline{AB'}$ = $a + c$ ist Hypotenuse.

(nach Voraussetzung)

Die Seiten \overline{AC} = e und $\overline{B'C}$ = f sind die Katheten im rechtwinkligen Dreieck $AB'C$.

(nach Voraussetzung)

$$\overline{AC}^2 + \overline{B'C}^2 = \overline{AB'}^2$$

(Satz des Pythagoras)

$$e^2 + f^2 = (a + c)^2$$

(w. z. b. w.)

▶ Mit w. z. b. w. (was zu beweisen war) wird das Ende eines Beweises gekennzeichnet.

In verkürzter Form wird dieses Beweisverfahren auch auf arithmetische Aussagen angewandt.

- Die Summe von drei aufeinanderfolgenden geraden natürlichen Zahlen ist immer durch 6 teilbar.

Voraussetzung: $2n$ ist eine gerade natürliche Zahl.

Behauptung: $2n + 2n + 2 + 2n + 4$ ist durch 6 teilbar.

Beweis: $2n + 2n + 2 + 2n + 4 = 6n + 6 = 6(n + 1)$

$$6 \mid 6(n + 1)$$

(w. z. b. w.)

1.2.4 Skizzieren, Zeichnen und Konstruieren mathematischer Objekte

Skizzen gehören zu den häufig genutzten Hilfsmitteln, um sich Sachverhalte zu veranschaulichen.

Beim Zeichnen geometrischer Objekte werden neben den klassischen Hilfsmitteln Zirkel und Lineal auch das Geodreieck genutzt bzw. dynamische Geometriesoftware eingesetzt.

Konstruktionen verlangen ein exaktes Vorgehen und werden in der Regel nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt.

Zur Lösung einer Konstruktionsaufgabe zu ebenen Figuren oder Körpern sind folgende Schritte sinnvoll.

1. Aufgabe analysieren:

- eine Planfigur anfertigen,
- gegebene Stücke markieren,
- nach Beziehungen zwischen den Stücken suchen.

2. Lösungsplan aufstellen:

- nach Lösungsideen suchen,
- prüfen, ob Punkte durch zwei Linien eindeutig festgelegt sind.

3. Konstruktion ausführen:

- schrittweise die notwendigen Punkte der ebenen Figur oder des Körpers konstruieren,
- Konstruktion vervollständigen und z.B. bei Körpern die Sichtbarkeit von Kanten berücksichtigen.

4. Konstruktion kontrollieren:

- Anzahl der Lösungen bestimmen (Eindeutigkeit der Konstruktion),
- Kongruenz der gefundenen Figuren untersuchen.

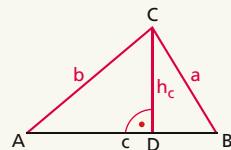
In dem folgenden Beispiel werden die einzelnen Schritte in Form von Fragen formuliert:

- Konstruiere ein Dreieck ABC aus den Seitenlängen $a = 2,3$ cm, $b = 3,0$ cm und der Höhe $h_c = 2,0$ cm.

Analyse:

Worum geht es in der Aufgabe? Es geht um die Konstruktion eines Dreiecks.

Ist eine Planfigur möglich?



Welche Stücke sind gegeben?

Die Stücke a , b und h_c werden farblich eingezeichnet.

Grundbegriffe der
Mathematik

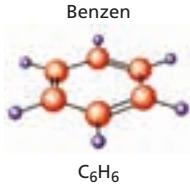
2



2.1 Aussagen

2.1.1 Zeichen und Zeichenreihen in der Mathematik

► constans (lat.) – feststehend
 varius (lat.) – verschieden, wechselnd



Jeder mathematische Ausdruck ist eine Zeichenreihe, die aus einzelnen Zeichen besteht. Es gibt Konstanten, Variablen und technische Zeichen (z. B. Klammern). Eine **Konstante** ist ein Zeichen mit einem festen Wert bzw. einer festen Bedeutung.

Konstante	Beispiele
Zahlzeichen	4; π ; -2; VI
Relationszeichen	<; >; =; \in ; \equiv ;
Operationszeichen	+; -; \cdot ; $:$; \cap ; \cup
Funktionsnamen	sin; cos; ln

Eine **Variable** ist ein Zeichen für ein beliebiges Element.

Definition In mathematischen Ausdrücken können Buchstaben (z. B. a; x; V) oder grafische Symbole (z. B. \circ ; Δ ; \square) als Platzhalter für bestimmte Zahlen verwendet werden. Diese Buchstaben bzw. Symbole werden auch **Variablen** (Veränderliche oder Unbekannte) genannt.

- ① Lara will für höchstens 3,00 € Eiskugeln zu je 0,70 € kaufen.
 $0,70 \text{ €} \cdot x \leq 3,00 \text{ €}$ x – Variable für die Anzahl der Eiskugeln
- ② Karl ist 12 cm größer als Tom.
 $k = t + 12 \text{ cm}$ k bzw. t – Variablen für die Körpergrößen von Karl bzw. Tom

► Anstelle von **Grundbereich** wird oft von Grundmenge gesprochen.

Für die Variable kann jedes Element eines vorgegebenen **Grundbereichs** G (Variablengrundbereich) eingesetzt werden. Zu einer Variablen gehört deshalb stets zugleich auch ein Grundbereich. Grundbereiche sind Mengen, insbesondere Mengen von Zahlen oder Größenbereiche.

- ① $0,70 \text{ €} \cdot x \leq 3,00 \text{ €}$
 Da x für eine Anzahl steht, ist der Grundbereich für x die Menge der natürlichen Zahlen, also $G = \mathbb{N}$

Anzahl der Eiskugeln: x	Gesamtpreis: $0,70 \text{ €} \cdot x$
1	0,70 €
2	1,40 €
3	2,10 €
4	2,80 €
5	3,50 €
...	...

Lara kann eine, zwei, drei oder vier Kugeln Eis kaufen, wenn sie höchstens 3,00 € bezahlen will.

- ② In den Ausdruck $7x^2$ ($G = \mathbb{R}$) dürfen für x alle reellen Zahlen eingesetzt werden. Für keine dieser Zahlen nimmt der Ausdruck einen negativen Wert an.

Treten in einem Ausdruck mehrere Variablen auf, so kann man zwischen **Formvariablen** und **Lösungsvariablen** unterscheiden.

Die Lösungsvariable ist jeweils diejenige, nach der aufgelöst wird. Die Formvariablen nehmen in jedem konkreten Fall verschiedene Werte an.

■ Karl ist 12 cm größer als Tom. Wie groß ist Karl, wenn Tom 1,64 m, 1,70 m oder 1,77 m groß ist?

$$k = t + 12 \text{ cm} \quad k - \text{Lösungsvariable}$$

$$k_1 = 1,76 \text{ m für } t_1 = 1,64 \text{ m} \quad t - \text{Formvariable}$$

$$k_2 = 1,82 \text{ m für } t_2 = 1,70 \text{ m}$$

$$k_3 = 1,89 \text{ m für } t_3 = 1,77 \text{ m}$$

Sprachliche Gebilde lassen sich mithilfe mathematischer Zeichenreihen als **Terme** (S. 124; Begriffe Variable und Term) darstellen und umgekehrt.

Term	Sprachliche Formulierung
$3x$	das Dreifache einer Zahl
a^2	das Quadrat einer Zahl
$a + b$	die Summe zweier Zahlen

Definition Ein **Term** ist eine sinnvolle mathematische Zeichenreihe *ohne* Relationszeichen.

▶ relatio (lat.)
– Beziehung, Verhältnis

■ $T_1: 61$ $T_2: a(2 + x); G = \mathbb{Z}$ $T_3: 34 + 27$
 ■ $T_4: \sqrt{25}$ $T_5: (2y - 3x)^3; G = \mathbb{R}$ $T_6: (a + b)(a - b); G = \mathbb{N}$

▶ $T \rightarrow$ Term

Die Terme T_1 , T_3 und T_4 enthalten keine Variablen. Ihr **Termwert** kann sofort angegeben oder ausgerechnet werden. Beispielsweise ist $T_1 = 61$ und $T_3 = 61$. Die Terme T_1 und T_3 haben den gleichen Wert.

Die Terme T_2 , T_5 und T_6 enthalten Variablen. Wird für die Variablen ein Element aus einem Grundbereich G eingesetzt, nimmt der Term stets einen konkreten Wert an.

Term	Beispiele aus G	Einsetzung	Termwert
$T_2: a(2 + x)$	$a = 4; x = -2$	$4[2 + (-2)]$	0
$T_5: (2y - 3x)^3$	$y = 3; x = 1$	$(2 \cdot 3 - 3 \cdot 1)^3$	27
$T_6: (a + b)(a - b)$	$a = 7; b = 2$	$(7 + 2)(7 - 2)$	45



$$2 \cdot (7 \cdot x) + 3$$

$$14 \cdot x + 3$$

Dieses Einsetzen einer Zahl für die Variablen heißt **Variablenbelegung**.