

**DUDEN**

POCKET  
TEACHER  
**MATHEMATIK**

Abi

# FAHRPLAN ZUM ABI

## 1. Noch 2 Jahre bis zum Abitur

### **Fächer- bzw. Kurswahl abklären**

Beratung durch Oberstufenbetreuer ♦ Gegengewichte zum Lernstress schaffen

### **Zeitplan erstellen**

Klausuren, Prüfungen, ggf. schriftliche Facharbeit ♦ Projekte, Präsentationen ♦ Lernzeiten am Nachmittag festlegen ♦ Ferien, Pausen, Freizeitaktivitäten planen

### **Ablage einrichten**

Schreibtisch: für jedes Fach eine getrennte Ablage ♦ Ordnerstruktur im Computer ♦ Internetlinkliste

### **Lernorte klären**

Arbeitsplatz: zu Hause? Schule? Bibliothek?

### **Lerngemeinschaften organisieren**

Unterschiedliche Lerntypen ergänzen sich!

### **Lernstrategie entwickeln**

Persönliche Stärken-/Schwächenanalyse, evtl. mit Hilfe von Fachlehrern, erstellen ♦ Hindernisse benennen und Strategien zur Überwindung erproben

## 2. Noch 1½ Jahre bis zum Abitur

### **Zeitpläne kritisch überprüfen**

Wöchentlich: Lernzeiten, Pausen ♦ Monatlich: Stoffverteilung, Wiederholung, Lerngruppentermine ♦ Klausur- und Referatstermine

### **Ggf. Facharbeit planen und durchführen**

Fach festlegen ♦ Thema suchen und bearbeiten

### **Lernhilfen und Lernmaterial organisieren**

Nachschlagewerke und Trainingsbücher Abiturwissen ♦ Unterrichtsmitschriften ♦ Abiturvorbereitungskurse

## 3. Nach dem letzten Halbjahreszeugnis

### **Zeitplan anpassen**

Lernzeiten anpassen ♦ Wiederholungsschritte planen ♦ Klausur- und Referatstermine im Blick behalten ♦ Facharbeits-/Seminararbeitstermine einhalten

### **Lernfortschritte dokumentieren**

Stärken-/Schwächenanalyse anhand alter Klausuren durchführen und konkrete Konsequenzen daraus ableiten ♦ Lerntagebuch führen

### **Motivationsarbeit verstärken**

Gespräche mit Prüflingen des Vorjahrs führen ♦ Beratungsgespräch mit Oberstufenbetreuer/Fachlehrkräften führen ♦ Ziele fest ins Auge fassen ♦ regelmäßige Arbeit mit dem Lern- oder Arbeitstagebuch

### **Berufs-/Studienentscheidung vorbereiten**

Studienführer organisieren ♦ Gespräche mit Studien-/Berufsanfängern ♦ Agentur für Arbeit: Beratungstermine wahrnehmen ♦ Abitur messen besuchen ♦ Tag der offenen Tür in Universitäten nutzen

### **Blocklernen**

Abiturvorbereitungskurs ♦ Lernwochenende(n) mit Lerngruppe ♦ Prüfungsaufgaben des Vorjahrs beschaffen und damit üben

## 4. Zu Beginn des Abiturschuljahres

### **Zeitplan anpassen**

Alle Abiturtermine notieren ♦ Lernzeiten: Wiederholung strukturieren, Schwerpunkte setzen ♦ ggf. Präsentationsprüfung planen und sich mit allen Themen befassen ♦ Freizeit von Arbeitszeit trennen

### **Motivation tanken**

Lern- oder Arbeitstagebuch auswerten ♦ Mut-mach-Gespräche in Lerngruppe, mit Eltern und Freunden führen ♦ Antistresstraining ♦ Belohnung nach dem Abistress planen: Abschlussfeier, Reise u. Ä.

### **Blocklernen**

Klausuren der Vorjahre durcharbeiten ♦ Prüfungssimulation (mit Zeitbegrenzung)

### **Notenverbesserung nach dem schriftlichen Abi**

Evtl. Teilnahme an einer freiwilligen mündlichen Prüfung

DUDEN

POCKET  
TEACHER  
**MATHEMATIK**

Abi

6., aktualisierte Auflage

Fritz Kammermeyer  
Roland Zerpies

Dudenverlag  
Berlin

### *Die Autoren*

Fritz Kammermeyer und Roland Zerpies unterrichten Mathematik an einem Gymnasium. R. Zerpies ist außerdem Schulpsychologe. F. Kammermeyer bildet Gymnasiallehrer in Mathematik aus.

### **Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek**

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Für die Inhalte der im Buch genannten Internetlinks, deren Verknüpfungen zu anderen Internetangeboten und Änderungen der Internetadressen übernimmt der Verlag keine Verantwortung und macht sich diese Inhalte nicht zu eigen. Ein Anspruch auf Nennung besteht nicht.

Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

© Duden 2017 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH, Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung: David Harvie

Redaktion und Konzeption der Karteikarten: Dr. Angelika Fallert-Müller

Herstellung: Uwe Pahnke

Umschlaggestaltung: Büroecco, Augsburg

Layout/technische Umsetzung: LemmeDESIGN, Berlin

Sachzeichnungen: Lennart Fischer, Berlin

Druck und Bindung: Heenemann GmbH & Co. KG

Bessemersstraße 83-91, 12103 Berlin

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-87207-7

<b>Vorwort</b>	8
<b>1 Funktionen</b>	10
<b>1.1 Grundbegriffe</b>	10
Definitionen	10
Eigenschaften von Funktionen und ihrer Graphen	12
<b>Thema: Bestimmung der Umkehrfunktion</b>	20
Verknüpfungen von Funktionen	22
<b>1.2 Lineare Funktionen</b>	23
Definition und Eigenschaften	23
<b>Thema: Bestimmung von Geradengleichungen</b>	25
<b>1.3 Die Betragsfunktion</b>	26
<b>1.4 Quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen</b>	27
Die quadratischen Funktionen	27
Die Wurzelfunktionen	29
<b>Thema: Form- und Lageänderungen von Funktionsgraphen</b>	31
<b>1.5 Potenzfunktionen</b>	34
Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	34
Potenzfunktionen mit ganzzahligen negativen Exponenten	35
Allgemeine Wurzelfunktion	36
Umkehrbarkeit der Potenzfunktionen $x \rightarrow x^n$	36
<b>Thema: Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten</b>	38
<b>1.6 Polynomfunktionen</b>	40
Eigenschaften von Polynomfunktionen	40
<b>Thema: Polynomdivision</b>	43
<b>1.7 Rationale Funktionen</b>	44
Eigenschaften rationaler Funktionen	44
<b>Thema: Untersuchung einer gebrochenrationalen Funktion</b>	46
<b>1.8 Exponential- und Logarithmusfunktionen</b>	48
Exponentialfunktionen	48
Logarithmusfunktionen	49

	Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmus- funktionen	50
<b>1.9</b>	<b>Trigonometrische Funktionen</b>	51
	Sinus- und Kosinusfunktion	51
	Tangensfunktion	52
<b>1.10</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	53
	Zahlenfolgen	53
	Arithmetische Zahlenfolgen	54
	Geometrische Zahlenfolgen	55
	Reihen	56
<b>2</b>	<b>Differentialrechnung</b>	58
<b>2.1</b>	<b>Grenzwert</b>	58
	Grenzwert einer Funktion	58
	Grenzwert einer Folge	60
	Grenzwertsätze für Funktionen	63
	Wichtige Grenzwerte von Funktionen	65
<b>2.2</b>	<b>Stetigkeit</b>	66
	Definitionen	66
	Stetigkeitssätze	67
<b>2.3</b>	<b>Differenzierbarkeit</b>	69
	Differenzierbarkeit an einer Stelle	69
	Differenzierbarkeit in einem Intervall	72
	Ableitungen höherer Ordnung	73
	<b>Thema: Differentiationsregeln</b>	74
	Ableitungen der Grundfunktionen	76
<b>2.4</b>	<b>Eigenschaften von Funktionsgraphen und Ableitungen</b>	77
	Geometrische Bedeutung der 1. Ableitung	77
	Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung	82
<b>2.5</b>	<b>Anwendungsbeispiele</b>	84
	Diskussion einer gebrochenrationalen Funktion	84
	Polynomfunktionen zu vorgegebenen Bedingungen	87
	Newton-Verfahren – näherungsweise Berechnung von Nullstellen	89
	Extremwertaufgaben	91

<b>3</b>	<b>Integralrechnung</b>	94
<b>3.1</b>	<b>Das bestimmte Integral</b>	94
	Flächenberechnung mit Obersumme und Untersumme	94
	Definition und Eigenschaften	97
<b>3.2</b>	<b>Stammfunktion und Integralfunktion</b>	99
	Definitionen, Beispiele, Sätze	99
	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	100
	Das unbestimmte Integral	101
<b>3.3</b>	<b>Integrationsverfahren</b>	102
	Integration durch Substitution	102
	Partielle Integration	106
	Integration durch Partialbruchzerlegung	107
<b>3.4</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	108
	Integrale mit nicht beschränktem Integrationsbereich	108
	Integrale mit nicht beschränktem Integranden	109
<b>3.5</b>	<b>Anwendungen</b>	110
	Berechnung von Flächeninhalten	110
	Berechnung von Rauminhalten von Rotationskörpern	112
	Integrale in der Physik	112
<b>4</b>	<b>Lineare Algebra und Analytische Geometrie</b>	114
<b>4.1</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	114
	Homogene und inhomogene Gleichungssysteme	114
	Einsetzungs- und Additionsverfahren	114
	Matrizen	116
	Determinanten	117
	Das Gauß-Verfahren	118
	Die Cramersche Regel	120
	Übersicht über die Anzahl der Lösungen mit Deutungsmöglichkeiten im $\mathbb{R}^2$	123
	Übersicht über die Anzahl der Lösungen mit Deutungsmöglichkeiten im $\mathbb{R}^3$	124
<b>4.2</b>	<b>Vektoren</b>	125
	Grundbegriffe	125
	Grundlagen des Vektorrechnens	128
	Anwendungen	137

<b>4.3 Geraden</b>	145
Darstellungen	145
Lagebeziehungen	147
<b>Thema: Lage von zwei Geraden</b>	149
Schnitte von Geraden	152
Schnittwinkel zwischen Geraden	153
<b>Thema: Abstand bei Geraden</b>	154
Abstandsberechnungen bei Geraden	155
<b>4.4 Ebenen</b>	156
Festlegung einer Ebene	156
Darstellungen	157
Lagebeziehungen	164
<b>Thema: Lage von Gerade und Ebene</b>	167
<b>Thema: Lage von zwei Ebenen zueinander</b>	171
Schnitte mit Ebenen	176
<b>Thema: Spurpunkte und Spurgeraden</b>	182
Schnittwinkel bei Ebenen	184
<b>Thema: Abstand von Ebenen</b>	186
Abstandsberechnungen bei Punkt und Ebene	187
<b>Thema: Spiegelungen</b>	188
<b>4.5 Kreise und Kugeln</b>	189
Kreis- und Kugelgleichungen	189
<b>Thema: Polar- und Kugelkoordinaten</b>	191
<b>Thema: Lagebeziehungen von Kreis und Kugel</b>	192
<b>4.6 Matrizen</b>	194
Rechnen mit Matrizen	194
<b>Thema: Abbildungsmatrizen</b>	196
<b>Thema: Übergangsmatrizen</b>	197
<b>5 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik</b>	199
<b>5.1 Beschreibende Statistik</b>	199
Merkmale und Skalen	199
Aufbereitung von Stichprobenwerten	200
Grafische Darstellungen	202
Lage- und Streuungsmaße	203

<b>5.2</b>	<b>Wahrscheinlichkeit</b>	205
	Zufallsexperimente	205
	Ereignisse	207
	Verknüpfung von Ereignissen	208
	Häufigkeiten von Ereignissen	210
	Die Axiome von Kolmogorow	210
	Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten	211
<b>5.3</b>	<b>Kombinatorik</b>	211
	<b>Thema: Kombinatorik im Überblick</b>	215
<b>5.4</b>	<b>Berechnung von Wahrscheinlichkeiten</b>	216
	Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	216
	Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente	217
	Berechnungen bei Laplace-Experimenten	219
	Urnenmodelle	220
	Bedingte Wahrscheinlichkeit	222
	Unabhängigkeit	223
<b>5.5</b>	<b>Zufallsgrößen</b>	224
	Grundbegriffe	224
	Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung	226
<b>5.6</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	227
	Bernoulli-Kette	227
	<b>Thema: Standardaufgaben zu Bernoulli-Ketten</b>	229
	Binomialverteilung	230
	Ungleichungen von Tschebyschew	231
	Normalverteilung	232
<b>5.7</b>	<b>Beurteilende Statistik</b>	235
	Parameterschätzung	235
	Alternativtest	237
	Signifikanztest	241
<b>6</b>	<b>Arbeitsaufträge in den Abiturprüfungen</b>	245
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	249

# Vorwort

## Liebe Leserin, lieber Leser!

Der POCKET TEACHER ABI Mathematik ist der ideale Wegbegleiter durch die gesamte Oberstufe bis zum Abitur. Er hilft nicht nur beim Endsprint vor der Abschlussprüfung, sondern ebenso gut bei der Vorbereitung auf Klausuren und Tests. In kompakter Form werden die Zusammenhänge hier übersichtlich und anschaulich erklärt. Dazu tragen auch die zahlreichen Grafiken und Beispiele bei.

Eine spezielle Erweiterung in dieser Auflage sind die heraus-trennbaren Karteikarten im Anhang. Diese 20 Karten stellen eine Vorauswahl an Themen dar, mit denen man zur Abiturprüfung rechnen muss. Die Rückseiten wurden freigelassen, damit Sie dort Ihre eigenen Notizen machen können.

Entsprechende Vorlagen für weitere Karteikarten gibt es auf [www.duden.de/pocket-teacher-abi](http://www.duden.de/pocket-teacher-abi) zum Herunterladen und Ausdrucken.

Gewünschte Infos können am schnellsten über das Stichwortverzeichnis am Ende des Bandes gefunden werden.

Stichwort vergessen? Macht nichts. Am besten ins Inhaltsverzeichnis schauen und im entsprechenden Kapitel nach dem Begriff suchen! Stichwörter sind hier durch Fettdruck hervorgehoben (z. B. **Asymptote**, S. 45). Farbige Pfeile ► verweisen auf andere Stellen im Buch zum gleichen Thema.

**BEISPIEL** Umkehrfunktion (► S. 18)

Geht man den Pfeilen nach, bekommt man zu diesen Fachbegriffen weitere Informationen.

◆ Mehrere Beispielaufgaben oder Aufzählungen zu einem Thema sind meist durch Quadrate am Rand übersichtlich gegliedert (▶ S. 100).

**BEACHTEN** weist auf besondere zu beachtende Eigenschaften und Rechenschritte hin (▶ S. 11).

**AUGEN AUF!** markiert mögliche Fehlerquellen, Denkfallen, Problemstellen und wichtige Hinweise (▶ S. 129).

Diese Rubrik kennzeichnet Definitionen (▶ S. 13).

### **SATZ**

Diese Rubrik kennzeichnet Sätze (▶ S. 68).

# 1 Funktionen

## 1.1 Grundbegriffe

### Definitionen

#### Zuordnungen

Eine *Zuordnung* ordnet den Elementen einer Menge  $X$  Elemente einer Menge  $Y$  durch eine *Zuordnungsvorschrift* zu.

Eine *Wertetabelle*, ein *Pfeilgraph*, eine *Paarmenge* mit Zahlenpaaren  $(x; y)$  mit  $x \in X$  und  $y \in Y$  oder ein *Graph* im Koordinatensystem veranschaulichen eine Zuordnung.

#### Eine Zuordnung, bei der ...

... mindestens einem  $x \in X$  mehr als ein  $y \in Y$  zugeordnet wird, heißt *mehrdeutig*.

... jedem  $x \in X$  **genau ein**  $y \in Y$  zugeordnet wird, nennt man *eindeutig*.

... jedem  $x \in X$  **genau ein**  $y \in Y$  zugeordnet ist und darüber hinaus auch jedes  $y \in Y$  **zu genau einem**  $x \in X$  gehört, heißt *eineindeutig*.

Eindeutige Zuordnungen heißen *Funktionen*.

#### BEISPIELE

$$X = \{1, 2\},$$

$$Y = \{1, 2\},$$

„ $x$  teilt  $y$ “

Paarmenge:

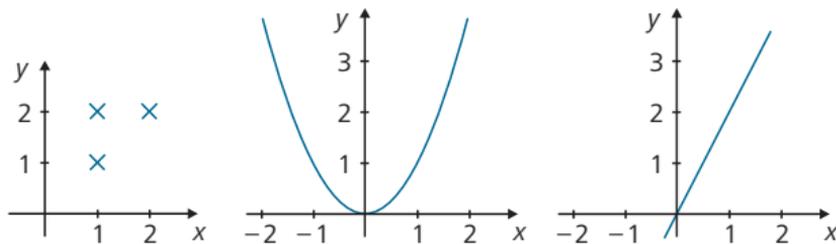
$$\{(1; 1), (1; 2), (2; 2)\}$$

$$X = Y = \mathbb{R}$$

$$y = x^2$$

$$X = Y = \mathbb{R}$$

$$y = 2x$$



Im Koordinatensystem wird die Ausgangsmenge  $X$  i. A. auf der horizontalen Achse und die Zielmenge  $Y$  auf der vertikalen Achse angetragen. Zum Graphen der Zuordnung gehören alle Punkte, deren Koordinaten  $(x|y)$  die Zuordnung erfüllen.

Der  $x$ -Wert heißt auch *Abszisse*, der  $y$ -Wert *Ordinate*.

**BEACHTEN** Am Graphen erkennt man den Unterschied so: Gibt es eine Parallele zur  $y$ -Achse, die den Graphen in mehr als einem Punkt schneidet, so ist die Zuordnung mehrdeutig. Schneidet jede mögliche Parallele zur  $y$ -Achse den Graphen höchstens einmal, so liegt eine Funktion vor. Schneidet auch jede mögliche Parallele zur  $x$ -Achse den Graphen höchstens einmal, so ist die Funktion sogar eineindeutig.

**BEACHTEN** Eine eineindeutige Funktion besitzt zu verschiedenen Argumenten  $x$  auch unterschiedliche Funktionswerte  $y$ .

## Funktionen

Eine *Funktion*  $f$  ist eine eindeutige Zuordnung zwischen einer Ausgangsmenge  $X$ , der *Definitionsmenge*  $D_f$ , und der Menge  $Y$ , der *Wertemenge*  $W_f$ . Ist die Definitionsmenge nicht angegeben, wird vom größtmöglichen Bereich ausgegangen.

Jedes Element  $x$  der Definitionsmenge  $D_f$  heißt *Argument* von  $f$ . Das dem Argument  $x$  zugeordnete Element  $y$  aus der Wertemenge  $W_f$  heißt *Funktionswert*  $y = f(x)$  (sprich: „ $f$  von  $x$ “) von  $f$ . Kurz:  $y = f(x)$ . Der Term  $f(x)$  heißt *Funktionsterm*, die Gleichung  $y = f(x)$  *Funktionsgleichung* der Funktion  $f$ .

Schreibweise:  $f: x \mapsto y$  oder  $f: x \mapsto y = f(x)$ .

Der *Graph* der Funktion  $f$  ist die Menge aller Punkte  $P(x|f(x))$  mit  $x \in D_f$  und wird mit  $G_f$  bezeichnet.

**BEISPIEL**  $f: x \mapsto y = 2x$  mit Definitionsmenge  $D_f = [0; 4]$ .  
 Funktionsterm  $f(x) = 2x$ , Funktionsgleichung:  $y = 2x$ .  
 Funktionswert zu  $x = 1,5$  ist  $y = f(1,5) = 2 \cdot 1,5 = 3$ .  
 Alle Funktionswerte bilden die Wertemenge:  $W_f = [0; 8]$ .

## Eigenschaften von Funktionen und Graphen

### Gleichheit von Funktionen

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  sind gleich, wenn ihre Definitionsmengen  $D_f$  und  $D_g$  übereinstimmen, also  $D_f = D_g = D$ , und wenn für alle  $x \in D$  gilt:  $f(x) = g(x)$ .

#### BEISPIEL

$f: x \mapsto f(x) = (x - 2)^2$ ,  $D_f = \mathbb{R}$  und  
 $g: x \mapsto g(x) = x^2 - 4x + 4$ ,  $D_g = \mathbb{R}$  sind gleich, da  
 $D_f = D_g = \mathbb{R}$  und  $f(x) = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 = g(x)$ .

**AUGEN AUF!**  $f: x \mapsto f(x) = \frac{(x - 1)x}{x}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  
 $g: x \mapsto g(x) = x - 1$ ,  $D_g = \mathbb{R}$ . Hier gilt zwar nach dem Kürzen:  
 $f(x) = g(x)$ . Da aber  $D_f \neq D_g$ , sind  $f$  und  $g$  nicht gleich.

### Fortsetzung und Einschränkung

Eine Funktion  $g$  heißt *Fortsetzung* der Funktion  $f$ , wenn die Definitionsmenge  $D_f$  von  $f$  in der Definitionsmenge  $D_g$  von  $g$  enthalten ist, also  $D_f \subseteq D_g$ , und wenn für alle  $x \in D_f$  gilt:  $g(x) = f(x)$ . Umgekehrt heißt  $f$  *Einschränkung* von  $g$ .

**BEISPIEL** Im letzten Beispiel ist  $g$  eine Fortsetzung von  $f$ .

### Nullstellen einer Funktion

Ist  $x_0$  eine Zahl aus der Definitionsmenge  $D_f$  der Funktion  $f$  und gilt  $f(x_0) = 0$ , so heißt  $x_0$  *Nullstelle* von  $f$ . Man findet die Nullstellen der Funktion  $f$  durch Lösen der Gleichung  $f(x) = 0$ .

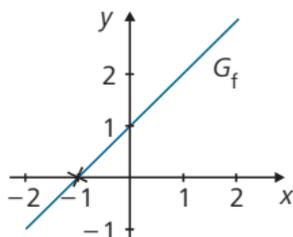
*Geometrische Bedeutung:* Bei den Nullstellen schneidet oder berührt der Graph einer Funktion die  $x$ -Achse.

**BEISPIEL**  $f: x \mapsto x + 1, x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$f$  besitzt also die Nullstelle:  $-1$ .

Der Graph  $G_f$  schneidet die  $x$ -Achse in  $(-1|0)$ .



## Gerade und ungerade Funktionen, Symmetrie des Graphen

Eine Funktion  $f: x \mapsto f(x), x \in D_f$ , heißt genau dann **gerade Funktion**, wenn für alle  $x$  aus der Definitionsmenge  $D_f$  gilt: Es ist auch  $-x \in D_f$  und  $f(-x) = f(x)$ .

**BEISPIEL**  $f: x \mapsto x^2, x \in \mathbb{R}$

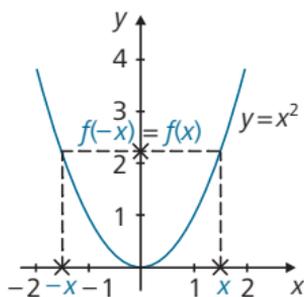
Wegen  $D_f = \mathbb{R}$  ist mit  $x \in \mathbb{R}$  auch

$-x \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt:

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

### BEACHTE

Der Graph einer geraden Funktion ist **symmetrisch** zur  $y$ -Achse.



Eine Funktion  $f: x \mapsto f(x), x \in D_f$ , heißt genau dann **ungerade Funktion**, wenn für alle  $x$  aus der Definitionsmenge  $D_f$  gilt: Es ist auch  $-x \in D_f$  und  $f(-x) = -f(x)$ .

**BEISPIEL**  $f: x \mapsto x^3, x \in \mathbb{R}$

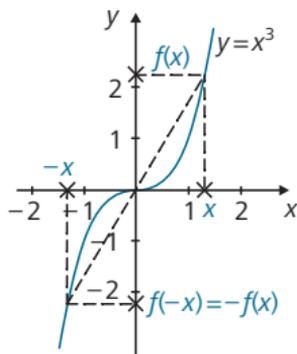
Wegen  $D_f = \mathbb{R}$  ist mit  $x \in \mathbb{R}$  auch

$-x \in \mathbb{R}$ . Weiter gilt:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

### BEACHTE

Der Graph einer ungeraden Funktion ist **punktsymmetrisch** zum Ursprung des Koordinatensystems.



## Allgemeine Symmetrie

Der Graph einer Funktion  $f$  ist achsensymmetrisch zur vertikalen Geraden  $x_0 = a$ , wenn stets gilt:  $f(a - x) = f(a + x)$ ,  $x \in D_f$ .

Der Graph einer Funktion  $f$  ist punktsymmetrisch bezüglich des Punktes  $P(a|b)$ , wenn stets gilt:  $b - f(a - x) = f(a + x) - b$ ,  $x \in D_f$ .

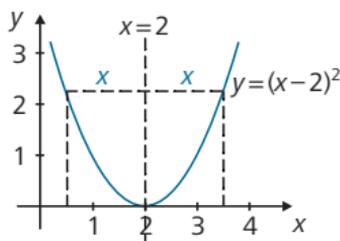
### BEISPIELE

◆  $f: x \mapsto (x - 2)^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$G_f$  ist achsensymmetrisch zur Geraden  $x = 2$ . Es gilt:

$$f(2 - x) = ((2 - x) - 2)^2 = x^2$$

$$\text{und } f(2 + x) = ((2 + x) - 2)^2 = x^2.$$



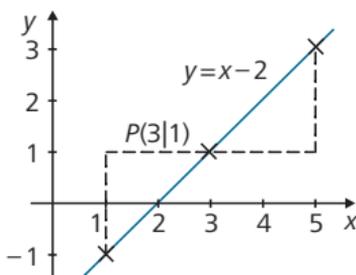
◆  $f: x \mapsto x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

$G_f$  ist punktsymmetrisch bezüglich  $P(3|1)$ . Es gilt:

$$1 - f(3 - x) = 1 - ((3 - x) - 2)$$

$$= x \text{ und}$$

$$f(3 + x) - 1 = ((3 + x) - 2) - 1 = x.$$



## Monotonie

Eine Funktion  $f: x \mapsto f(x)$ ,  $x \in D_f$ , heißt auf einer Teilmenge  $M$  der Definitionsmenge  $D_f$  genau dann

**monoton zunehmend**  
(oder steigend),

**monoton abnehmend**  
(oder fallend),

wenn für alle  $x_1, x_2 \in M$  gilt:

Aus  $x_1 < x_2$  folgt  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

Aus  $x_1 < x_2$  folgt  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

D. h., bei wachsendem Argument bleibt der Funktionswert  $f(x)$  gleich oder nimmt zu.

gleich oder nimmt ab.

Gilt sogar für alle  $x_1, x_2 \in M$ :

Aus  $x_1 < x_2$  folgt  $f(x_1) < f(x_2)$ ,

Aus  $x_1 < x_2$  folgt  $f(x_1) > f(x_2)$ ,

so heißt die Funktion  $f$  auf  $M$

**streng (oder echt) monoton zunehmend** (oder steigend).

**streng (oder echt) monoton abnehmend** (oder fallend).

## Stichwortverzeichnis

### Abbildungsmatrizen 196

abhängig 223

Ablehnungsbereich 237

Ableitung 70, 74, 77, 82

Ableitungsfunktion 72 f.

absolute Häufigkeit 201, 210

absolute Skala 200

Abstand 113, 154, 186

Abszisse 11

Achse 128

Achsenabschnittsform 145, 159,  
162

achsensymmetrisch 14, 19 f., 40,  
51 f.

Additionssatz 216

Additionsverfahren 115

Allgemeiner Multiplikations-  
satz 222

allgemeine Symmetrie 14

$\alpha$ -Fehler 238

Alternativtest 237

Annahmehbereich 237

Arbeitsintegral 112

Argument 11, 31 ff.

arithmetische Reihe 57

arithmetisches Mittel 54

arithmetische Zahlenfolge 54 f.

Assoziativgesetz 125 f.

Asymptote 45 f.

äußere Funktion 22, 75

Axiome von Kolmogorow 210,  
216

**B**asis 128

Baumdiagramm 205 ff., 217

Bayes 223

bedingte relative Häufigkeit 222

bedingte relative Wahr-  
schein-  
lichkeit 222

Bernoulli-Experiment 227 f.

Bernoulli-Kette 228 f.

beschränkt 16

Beschränktheit 16, 68

bestimmt divergent 62

bestimmtes Integral 94, 97 f., 100

$\beta$ -Fehler 238, 240

Betrag 26, 33

Betrag eines Vektors 132

Betragsfunktion 26

Binomialkoeffizient 212, 228

Binomialverteilung 227, 230, 233

**C**ramersche Regel 120

**D**efinitionsbereich

(Definitionsmenge) 11, 84

Determinante 117

Determinantensätze 117

Differentialquotient 70

Differenzenquotient 70

differenzierbar 70 ff.

Differenzierbarkeitsbereich  
(Differenzierbarkeitsmenge)  
72, 101

Dimension 128

disjunkt 209, 216

Diskriminante 27

Distributivgesetz 126

divergent 60, 61, 62

- Drei-Mindestens-Aufgabe 229  
 Drei-Punkte-Form 157  
 dreireihige Determinante 117  
 Durchschnitt 203
- e**indeutig 10  
 eineindeutig 10 f., 18  
 einfache Hypothese 241  
 Einheitsvektor 133  
 Einschränkung 12, 30  
 einseitiger Grenzwert 59, 66  
 einseitiger Test 241  
 einseitige Stetigkeit 66 f.  
 Einsetzungsverfahren 114 f.  
 Elementarereignis 207, 209, 211, 218  
 endliche arithmetische Reihe 57  
 endliche geometrische Reihe 57  
 endliche Reihe 56, 60  
 Entscheidungsregel 237, 239 ff.  
 $\varepsilon$ -Umgebung 60  
 Ereignis 207 ff., 218, 223  
 Ereignisraum 207, 209 f., 222  
 Ergebnis 206, 211, 217, 219, 224  
 Ergebnisraum 206 f., 210 f., 224  
 Erwartungswert 226 f., 231 f., 235, 243 f.  
 explizite Definition einer Zahlenfolge 53  
 explizite Form der Geradengleichung 24  
 Exponentialfunktion 48 ff., 65  
 Extremwert (Extremum) 17, 79 ff., 85  
 Extremwertaufgabe 91  
 Extremwertsatz 68
- F**akultät 65, 212  
 Fehler 1. Art (2. Art) 238, 240 ff., 244  
 Flächeninhalt (Flächenmaßzahl) 110, 136, 144, 202  
 Formel von Bernoulli 228  
 Fortsetzung 12, 66 ff.  
 Funktion 10 ff.  
 Funktionsgleichung 11 f.  
 Funktionsterm 11 f.  
 Funktionswert 11 f., 14, 17
- g**anzrationale Funktion 40  
 Gauß-Funktion 232  
 Gauß-Kurve 232  
 Gaußsche Intergralfunktion 108, 232  
 Gauß-Verfahren 118  
 gebrochenrationale Funktion 44, 46 ff., 84 ff.  
 Gegenereignis 207 f.  
 Gegenvektor 125  
 geometrische Reihe 57  
 geometrische Zahlenfolge 55 f.  
 geordnete Stichprobe 213  
 gerade Funktion 13, 34, 40, 52  
 gerichteter Abstand 187  
 geschlossene Vektorkette 126, 141  
 Gesetz der großen Zahlen 210, 231  
 Gesetze von de Morgan 209  
 Gleichheit 12  
 Gleichsetzungsverfahren 124  
 Gleichungssystem 114

- globales Maximum/Minimum  
17, 30, 34
- Grad 40, 42 f., 65, 87, 107
- Graph 10 ff.
- Grenzwert 45, 58 ff., 60
- Grenzwertsätze 63, 234
- Grundgesamtheit 199, 235, 237,  
243
- Grundintegrale 101
- H**äufigkeitspolygon 202
- Häufigkeitstabellen 201
- Häufigkeitsverteilung 202
- Hauptsatz der Differential- und  
Integralrechnung 100
- Hessesche Normalenform (HNF)  
146, 161, 163, 187
- Histogramm 202
- Hochpunkt 17, 81 f.
- homogenes Gleichungssystem  
114, 123
- Hyperbel  $n$ -ter Ordnung 35
- Hypothese 237, 239 ff., 243 f.
- i**dentisch 32, 150, 152, 173 f.
- implizite Form der Geraden-  
gleichung 24
- Infimum 16, 26
- inhomogenes Gleichungssystem  
114
- innere Funktion 22, 75
- Integralfunktion 99 f., 108
- Integrandenfunktion 97, 99 f.,  
103, 106, 109 ff.
- Integrationsbereich 97, 108 ff.
- Integrationsformel 100
- integrierbar 97 ff., 108 f.
- Intervallskala 200
- k**artesisches Koordinaten-  
system 128, 160
- Kategorisierung 201, 207
- Kettenregel 75, 102
- Koeffizienten 29, 40, 87, 114 ff.
- kollinear 126 f., 140, 172, 174
- Kolmogorow 210, 216
- Kombinationen 213 ff.
- Kombinatorik 211, 215
- Kommutativgesetz 125, 194, 209
- komplanar 127, 140, 173, 175
- Komponenten 18, 128 ff.
- konkav 82
- konvergent 60 ff.
- konvex 82
- Koordinaten 11, 128 f.
- Koordinatenebenen 129, 164 f.
- Koordinatenform 145, 159, 175,  
189 f.
- Kosinuskurve 51 f.
- $k$ -Permutationen 213, 215
- Kreis 189, 192
- Krümmung 82 f.
- Krümmungsverhalten 82, 86
- $k$ -Teilmengen 213 ff.
- $k$ -Tupel 213 ff.
- Kugel 189 f., 192
- kumulative Häufigkeit 201
- L**änge eines Vektors 132
- Laplace-Experiment 211, 219
- Laplace-Wahrscheinlichkeit 211,  
219

- linear abhängig 127
- lineare Funktion 23 ff.
- lineares Gleichungssystem 114 ff.
- Linearkombination 127
- linear unabhängig 127
- linksgekrümmt 82, 86
- linksseitiger (rechtsseitiger) Grenzwert 59, 72
- Logarithmusfunktion 48 ff., 65
- lokaler Hochpunkt (Tiefpunkt) 81
- lokales Extremum (Maximum, Minimum) 17, 80 f., 93
- M**atrizen 116 f., 194 f.
- Maximum 17, 54, 68, 81, 93
- Median 203
- mehrdeutig 10 f.
- mehrstufiges Zufallsexperiment 205, 211, 217 f.
- Merkmal 199, 202 f., 220
- Merkmalausprägung 199 ff.
- Merkmalsträger 199
- Minimum 17, 54, 68, 80 f., 88
- Mittelpunkt 137, 189 f., 192 f.
- Mittelwert 113, 203, 236
- mittlere quadratische Abweichung 226
- Moivre-Laplace 233, 240, 242
- monoton (ab-)zunehmend 14 f., 34 ff., 50 ff.
- Monotonie 14 f., 29, 34 ff., 77, 86, 98, 216.
- Monotonieregel 39
- Morgan 209
- Multiplikationssatz 222
- n**achdifferenzieren 75
- nach unten (oben) beschränkt 16, 26, 41, 56
- Näherungsformel von de Moivre-Laplace 233, 240, 242
- Nebenbedingungen 91
- Neigungswinkel 23 f., 70 f.
- $n$ -mal differenzierbar 73
- Nominalskala 200
- Normale 78
- Normaleneinheitsvektor 146, 161
- Normalenform 146, 160 ff., 168, 170, 172
- Normalenvektor 142, 146, 156, 160 ff., 170, 174 f., 181, 185
- normalverteilt 232, 234, 236, 243 f.
- Normalverteilung 227, 232, 243
- normiert 227
- $n$ -te Ableitung 73
- Nullfolge 60, 95
- Nullhypothese 241 ff.
- Nullstelle 12 f., 23, 26 ff., 42, 44 ff.
- Nullstellensatz 68
- Nullvektor 125, 129, 141
- o**bere Schranke 16
- Obersumme 94 ff.
- Ordinalskala 200 f.
- Ordinate 11
- orthogonal 135, 141, 151, 169 f., 174 f.
- orthonormiert 135 f.
- Ortsvektor 131, 145, 147, 166, 196

- P**aarmenge 10, 12, 18  
Parabel  $n$ -ter Ordnung 34  
parallel 150, 154, 164, 167 ff.  
parallelgleich 125  
Parameter 23, 25  
Parameterform 145, 157, 162 ff.,  
171, 189 f.  
Parameterschätzung 235  
Partialbruchzerlegung 107  
partielle Integration 106  
Passante 192  
Periode 17, 51  
periodisch 17, 51 f.  
Pfad 205, 207, 218, 222  
Pfadregel 218  
Pfeil 125, 131  
Pfeilgraph 10  
Polarkoordinaten 191  
Polstelle 44 ff.  
Polynom 40  
Polynomdivision 42 ff., 47, 107  
Polynomfunktion 40 ff., 87  
Potenzfunktion 34 ff., 65  
Produktregel 74 f., 106, 212  
punktierter Umgebung 58 f.  
Punkt-Richtungs-Form 145, 157  
punktsymmetrisch 13 f., 34 f., 40,  
51 ff.
- Q**uadratische Ergänzung 29  
quadratische Funktion 27 ff.  
Quotientenregel 74 f.
- R**angskala 200, 203  
rationale Funktion 44 ff., 107  
Rauminhalt (Raummaßzahl)  
112, 144  
rechtsgekrümmt 82, 86  
Regel von Sarrus 117  
rekursive Definition einer  
Zahlenfolge 54  
relative Häufigkeit 201 ff., 210,  
222, 231  
Repräsentant 125  
Richtungsvektor 145, 148, 150 f.,  
157 ff., 164, 169 f.  
Rotationskörper 112
- S**arrus 117  
Satz von Bayes 223  
Satz von der totalen Wahrschein-  
lichkeit 222  
Schätzfunktion 235  
Scheitel 28, 30  
Scheitelform 29  
Schnittgerade 173 ff.  
Schnittpunkt 85, 151 f., 169 f.,  
176  
Schnittwinkel 24, 79, 153, 184 f.  
Schranke 16 f., 59, 62, 241  
Schrankenfunktion 64  
Schwerpunkt 137  
Sekante 70, 192  
senkrecht 151, 169 f., 174 f.  
senkrechte Projektion 143  
sicheres Ereignis 207  
Sicherheit 1. Art (2. Art) 238 f.  
signifikante Abweichungen 241  
Signifikanzniveau 241 ff.  
Sinusfunktion 51  
Sinuskurve 51

- Skala 200  
 Skalarprodukt 134, 141  
 S-Multiplikation 126, 130  
 Spatmittelpunkt 137  
 Spiegelung 32, 188, 196  
 Spurgerade 182 f.  
 Spurpunkt 182  
 Stammfunktion 72, 99 ff.  
 Standardabweichung 204, 226  
 standardisiert 227, 236, 244  
 statistische Erhebung 199 f.  
 Steigung 23 ff., 71  
 Steigungsdreieck 23  
 stetig 66 ff.  
 stetige Fortsetzung 66 f.  
 stetig fortsetzbar 66  
 stetig hebbare Definitionslücke  
   44, 46, 66  
 Stichprobe 199, 212 f., 235 ff., 244  
 Stichprobenmittel 235 f., 243 f.  
 Stichprobenvariable 235, 243  
 Stichprobenvarianz 243  
 Stichprobenwerte 200 ff.  
 streng monoton (ab-) zuneh-  
   mend 15, 19 ff., 30, 34 ff., 77  
 streng monoton fallend  
   (steigend) 77, 86  
 Strichliste 200  
 Substitutionsregel 103, 105  
 Summengrenzwertformel 95 f.  
 Summenhäufigkeit 201, 203  
 Summenkurve 203  
 Summenregel 74 f., 216  
 Summenvektor 125 f.  
 Supremum 16  
 Symmetrie 14, 40  
 Tangensfunktion 52  
 Tangenskurve 52  
 Tangente 70 f., 78, 82 f., 192  
 Tangentialebene 193  
 Teilverhältnis 138  
 Terrassenpunkt 83, 87  
 Testgröße 237, 242  
 Tiefpunkt 17, 80 f., 85  
 totale Wahrscheinlichkeit 222  
 Trefferwahrscheinlichkeit 227 f.  
 Tschebyschew 231, 235  
 Übergangsmatrizen 197  
 Umgebung 17, 58, 66, 70, 80  
 umkehrbar 18, 20 f., 29 f., 36 f.,  
   76  
 Umkehrfunktion 18, 20 f., 29 f.,  
   36 ff., 50, 76, 105  
 unabhängig 223, 225  
 unbestimmtes Integral 101  
 uneigentlicher Grenzwert 48, 50,  
   61  
 uneigentliches Integral 108 f.  
 unendliche Reihe 60 f.  
 Unendlichkeitsstelle 44, 53, 61,  
   85  
 ungeordnete Stichproben 213  
 ungerade Funktion 13, 34 f., 40 f.,  
   51 f.  
 Ungleichungen  
   von Tschebyschew 231  
 unmögliches Ereignis 207  
 unstetig 66  
 untere Schranke 16, 26, 41  
 Untersumme 94 ff.  
 unvereinbar 209, 223

- Urliste 200 ff.  
Urnenmodell 220 f., 228  
Ursprung 128  
Ursprungsebene 164  
Ursprungsgerade 23, 148
- V**arianz 204, 226 f., 231 f., 234 ff., 243  
Variationen 213, 215  
Vektor 125 ff.  
Vektoraddition 126  
Vektorprodukt 136, 142, 162, 181, 187  
Vektorraum 126 ff.  
vereinbar 209, 223  
Verfeinerung 205  
Vergrößerung 205 f.  
Verhältnisskala 200  
Verkettung 22, 69, 75, 102 f.  
Verschiebungsvektor 196  
Versuch 205, 210, 231, 242 f.  
Verteilungsfunktion 224 f., 235  
Vorzeichenbereiche 85
- W**ahrscheinlichkeit 205, 210 f., 216 ff., 228 ff., 236, 238 ff.  
Wahrscheinlichkeitsfunktion 224  
Wahrscheinlichkeitsraum 210  
Wahrscheinlichkeitsverteilung 210, 222, 224, 227, 230 f., 235  
Wendepunkt 83, 86 ff.  
Wendestelle 83, 86 ff.  
Wendetangente 83
- Wert  
– der endlichen arithmetischen Reihe 57  
– der endlichen geometrischen Reihe 57  
Wertebereich (Wertemenge) 11 f., 18, 20, 22 f., 26 f., 34 ff., 86  
Wertetabelle 10, 47  
windschief 149, 151 f., 154  
Winkel 134 ff., 153, 184  
Wurzelfunktion 29 f., 36
- y**-Abschnitt 23, 25
- Z**ahlenfolge 53 ff., 60  
Zählprinzip 212, 214  
zentraler Grenzwertsatz 234  
Zentralwert 203  
Zerlegung 209, 211, 216, 222 f.  
Ziehen  
– mit Zurücklegen 206, 217, 221, 228  
– ohne Zurücklegen 206, 217, 220, 222  
Zufallsexperimente 205, 210 f., 220  
Zufallsgröße 224 ff., 232 ff., 243 f.  
Zufallsvariable 224, 234  
Zuordnung 10 f., 18, 21, 201 f.  
Zuordnungsvorschrift 10  
Zustandsvektor 197  
Zwei-Punkte-Form 145  
zweireihige Determinante 117  
zweiseitiger Test 242, 244  
zweite Ableitung 73  
Zwischenwertsatz 67

# DER KLASSIKER

## LERNEN MIT KARTEIKARTEN

Eine effektive Technik, um den nötigen Merkstoff schnell und pointiert in den stressgeplagten Kopf zu bekommen, ist das **Lernen mit Karteikarten**.

Insbesondere für die Vorbereitung auf die mündliche Abi-Prüfung bzw. für Referate ist diese Methode geeignet, weil hierbei die wichtigsten Fakten und Zusammenhänge aufs Kürzeste verdichtet werden.

Eine Auswahl an relevanten Prüfungsthemen finden Sie auf den 20 Karteikarten in diesem Buch. Die jeweiligen Vorderseiten sind dabei von den Autoren des Buches konzipiert und die Rückseiten bewusst frei gelassen worden, damit Sie hier Ihre individuellen Notizen zum Thema aufschreiben können. Ob Sie die Rückseite nutzen, um dort eigene Geschichten, Eselsbrücken oder Abbildungen zu platzieren, bleibt Ihnen überlassen.

Die Karten im Buch sollen Ihnen als Impuls dienen, um sich gegebenenfalls selbst weitere Karteikarten nach eigenen Bedürfnissen zu erstellen. Hier gibt's die entsprechenden Vorlagen zum Ausdrucken: [www.duden.de/pocket-teacher-abi](http://www.duden.de/pocket-teacher-abi)

## Tipps zum Lernen mit Karteikarten

### Strukturierung und Themenwahl

- ♦ je nach Sachverhalt sind Karteikarten mit reinem Lernstoff ebenso denkbar wie solche mit Fragen und Abbildungen
- ♦ bei Fragen auf den Karten beschränken Sie sich auf maximal 5
- ♦ das Aufschreiben und Sortieren von Themen führt bereits zu einer intensiven Auseinandersetzung mit dem Lernstoff

### Individuelle Komponente

- ♦ eigene Notizen und Eselsbrücken helfen oftmals, um sich Merkstoff einzuprägen

### Systematisches Lernen

- ♦ der Sinn des Lernens mit Karteikarten besteht darin, sich den komprimierten Lernstoff regelmäßig anzuschauen
- ♦ man sorgt dadurch für ein stetiges Auffrischen des Gelernten (bevor es aus dem Kurzzeitgedächtnis verschwindet)
- ♦ der Fokus liegt bei den Themen, die am meisten Schwierigkeiten bereiten

### Training mit Methode

- ♦ regelmäßiges Anschauen oder gegenseitiges Abfragen zu bestimmten Tageszeiten
- ♦ gelernte Karten durch ein Häkchen oder Kreuzchen markieren

### Mobiles Lernen

- ♦ das handliche Format des Buches und der Karteikarten sind ideal für unterwegs

**DUDEN**

POCKET  
TEACHER  
**MATHEMATIK**

**Abi**

**Dein Lernstoff für die gesamte  
Oberstufe – kurz und knackig:**

- > Analysis: Funktionen, Differential-  
und Integralrechnung
- > Lineare Algebra und analytische Geometrie
- > Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Für den optimalen Endspurt  
vor Prüfungen und Klausuren

**EXTRA** Mit Do-it-yourself-Lernkarten  
zum Herausnehmen

ISBN 978-3-411-87207-7  
8,99 € (D) · 9,30 € (A)



[www.duden.de](http://www.duden.de)