Trigonometrie – Formalien, die Sie einfach brauchen

1

In diesem Kapitel ...

- Erfahren, was Trigonometrie ist
- Die Sprache der Trigonometrie kennen lernen
- Alles in Gleichungen ausdrücken
- Graphen zeichnen – für ein besseres Verständnis

Wie fand Kolumbus seinen Weg über den Atlantik? Wie haben die Ägypter ihre Pyramiden gebaut? Wie maßen die ersten Astronomen die Entfernung zum Mond? Nein, Kolumbus folgte nicht dem Regenbogen. Die Ägypter hatten auch keine Lego-Baupläne. Und es gab kein Bandmaß, das auch nur annähernd bis zum Mond gereicht hätte. Es gibt nur eine Antwort: Trigonometrie.

Trigonometrie ist die Lehre von Winkeln und Dreiecken und von all den wunderbaren Dingen, die Sie damit anstellen können. Jahrhunderte lang konnten Menschen Distanzen messen, die sie physisch nie hätten erreichen können – dank dieses Bereichs der Mathematik.

Packen wir's an: Was ist Trigonometrie?

»Was für ein Winkel ist das eigentlich?« Diese Frage begegnet uns sehr viel seltener als »Welches Sternzeichen haben Sie?« In der Trigonometrie können Sie Winkel in Grad und im Bogenmaß messen. Sie können sie in Dreiecke und Kreise verschieben und alles Mögliche damit machen. Winkel gehören untrennbar zur Trigonometrie. Natürlich brauchen Sie auch die Algebra und andere Mathematik. Aber ohne Winkel gibt es keine Trigonometrie. Sie setzen einen Winkel in eine trigonometrische Funktion ein und erhalten eine ganz bestimmte, eindeutige Zahl. Was machen Sie mit dieser Zahl? Lesen Sie einfach weiter, weil es genau darum in der Trigonometrie geht.

Die wichtigsten Figuren

Strecken, Strahlen und Geraden sind einige der grundlegenden Formen der Geometrie, und in der Trigonometrie sind sie fast genau so wichtig. Wie ich Ihnen auf den nächsten Seiten erklären werde, benutzen Sie diese Strecken, Strahlen und Geraden, um Winkel zu bilden.

Strecken, Strahlen und Geraden zeichnen

Eine *Strecke* ist eine gerade Figur, die zwischen zwei Endpunkten gezeichnet wird. Normalerweise benennt man sie anhand ihrer Endpunkte, die mit Großbuchstaben bezeichnet werden. Manchmal benennt ein einziger Buchstabe eine Strecke, aber ein Kleinbuchstabe steht in der Regel für einen Winkel, der dieser Strecke gegenüberliegt.

Ein *Strahl* ist eine andere gerade Figur, die einen Endpunkt hat und von dort aus unendlich in eine bestimmte Richtung verläuft. Strahlen werden benannt, indem man zuerst ihren Endpunkt und dann einen beliebigen anderen Punkt auf dem Strahl angibt.

Eine *Gerade* ist eine gerade Figur, die endlos in beide Richtungen verläuft. Sie brauchen nur zwei Punkte, um eine Gerade festzulegen – und nur eine Gerade kann durch beide Punkte verlaufen. Sie können eine Gerade immer nach zwei beliebigen Punkten benennen, die auf ihr liegen.

Abbildung 1.1 zeigt eine Strecke, einen Strahl und eine Gerade.

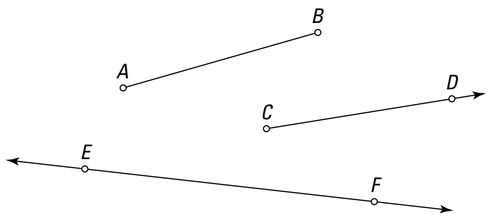

Abbildung 1.1: Segment AB, Strahl CD und Gerade EF

Sich schneidende Geraden

Wenn sich zwei Geraden schneiden – falls sie sich schneiden –, geschieht dies in genau einem Punkt. Sie können nicht umkehren und sich erneut schneiden. Wenn sich zwei Geraden schneiden, passieren einige bemerkenswerte Dinge. Die Winkel, die sich zwischen diesen beiden Geraden bilden, haben ein ganz bestimmtes Verhältnis zueinander. Jeweils zwei nebeneinander liegende Winkel, die sich auf einer Seite befinden, werden als *Nebenwinkel* bezeichnet. In Abbildung 1.2 schneiden sich die Geraden *AB* und *CD* am Punkt *E*. Die beiden Winkel unterhalb der Geraden *CD* (nummeriert als 1 und 2) sind Nebenwinkel. Dasselbe gilt für die beiden Winkel rechts von Gerade *AB* (nummeriert als 3 und 4), die Winkel links von Gerade *AB* (nummeriert als 1 und 4) und die Winkel über der Geraden *CD* (nummeriert als 3 und 4). Dieser Schnittpunkt bildet also vier verschiedene Paare von Nebenwinkeln.

Die Winkel, die einander gegenüberliegen, wenn sich zwei Geraden schneiden, haben ebenfalls einen speziellen Namen. Die Mathematiker bezeichnen sie als *Scheitelwinkel*. Sie haben keine gemeinsamen Seiten. Abbildung 1.2 zeigt zwei Paare von Scheitelwinkeln: das Paar der Winkel links und rechts (nummeriert als 1 und 3) und das Paar der Winkel oben und unten (nummeriert als 2 und 4).

Was haben diese verschiedenen Winkel so Besonderes an sich? Sie unterscheiden sich dahingehend, wie sie sich zueinander verhalten. Die Nebenwinkel werden hier als *Supplementwinkel* bezeichnet. Die Seiten, die sie nicht gemeinsam haben, bilden eine gerade Linie mit einem Maß von 180 Grad. Die Scheitelwinkel haben immer dasselbe Maß.

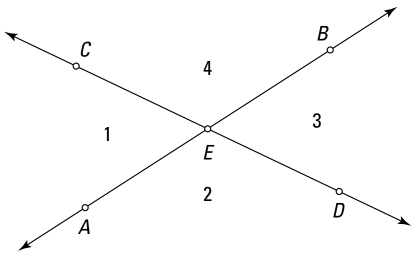

Abbildung 1.2: Sich schneidende Geraden bilden Nebenwinkel und Supplementwinkel

Winkel und ihre Position

Wenn sich zwei Geraden, Strecken oder Strahlen berühren oder kreuzen, bilden sie einen Winkel. Im Fall von zwei sich schneidenden Geraden ergeben sich vier verschiedene Winkel. Wenn sich zwei Strecken schneiden, können sie abhängig davon, wie sie sich berühren, einen, zwei oder vier Winkel bilden, wie in Abbildung 1.3 gezeigt. Dasselbe gilt für zwei Strahlen.

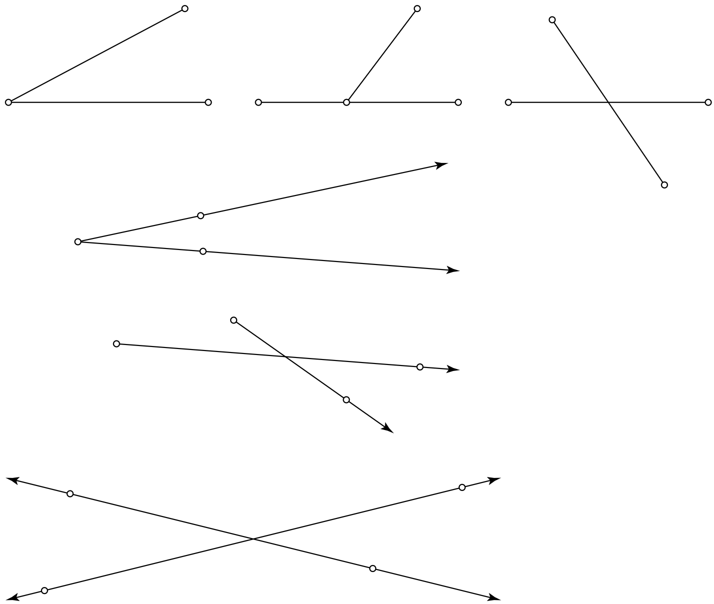

Abbildung 1.3: Verschiedene Möglichkeiten, Winkel zu erzeugen

Diese Beispiele zeigen nur einige der Möglichkeiten, wie Sie Winkel bilden können. Die Geometrie beispielsweise sagt, ein Winkel entsteht, wenn zwei Strahlen einen gemeinsamen Endpunkt haben. Sie können also einen Winkel auf vielerlei Arten erzeugen, ebenso wie aus vielen verschiedenen Figuren. Und weil es sich um zwei Strahlen handelt, können Sie die beiden Seiten eines Winkels beliebig ausdehnen, um Messungen, Berechnungen und praktische Problemlösungen zu vereinfachen.

Für die Komponenten aller Winkel gilt dieselbe Namensgebung. Der Punkt, an dem sich die Geraden, Strecken oder Strahlen kreuzen, wird als *Scheitelpunkt* (*Eckpunkt*) des Winkels bezeichnet. Vom Scheitelpunkt aus erstrecken sich die beiden Schenkel.

Benennung von Winkeln nach der Größe

Sie können Winkel abhängig von ihrer Größe oder ihrem Gradmaß benennen oder kategorisieren (siehe Abbildung 1.4):

- ✔ **Spitz:** Ein Winkel zwischen 0 und 90 Grad
- ✔ **Stumpf:** Ein Winkel zwischen 90 und 180 Grad

- **Rechtwinklig:** Ein Winkel mit genau 90 Grad
- **Gestreckt**: Ein Winkel mit genau 180 Grad (eine gerade Linie)

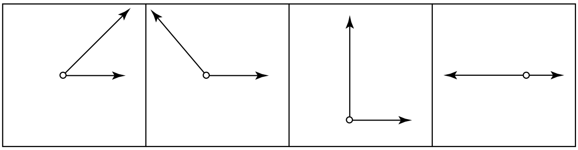

Abbildung 1.4: Winkeltypen – spitz, stumpf, rechtwinklig und gestreckt

Winkel mit Buchstaben bezeichnen

Welchen Namen geben Sie einem Winkel? Warum braucht er überhaupt einen Namen? Größtenteils will man einfach in der Lage sein, einen bestimmten Winkel von allen anderen Winkeln in einer Abbildung zu unterscheiden. Wenn Sie sich ein Bild in einer Zeitung ansehen, wollen Sie schließlich auch die Namen der verschiedenen Leute wissen und in der Lage sein, sie zu unterscheiden. Bei Winkeln wird es Ihnen nicht anders gehen.

Sie können einen Winkel auf drei verschiedene Arten benennen:

- **Nur nach seinem Scheitelpunkt:** Häufig werden Winkel nur nach ihrem Scheitelpunkt bezeichnet, weil diese Beschriftung effizient, sauber und leicht lesbar ist. In Abbildung 1.5 sehen Sie den Winkel *A*.
- **Nach einem Punkt auf einem Schenkel, gefolgt vom Scheitelpunkt und einem Punkt auf dem anderen Schenkel:** Sie können den Winkel in Abbildung 1.5 beispielsweise als Winkel *BAC* oder Winkel *CAB* bezeichnen. Diese Methode der Namensgebung ist sinnvoll, wenn es mehrdeutig sein kann, welchen Winkel in einem Bild Sie meinen. ***Hinweis:*** Achten Sie darauf, den Scheitelpunkt immer in der Mitte anzugeben.
- **Nach einem Buchstaben oder einer Zahl, der bzw. die im Winkel angegeben ist:** Normalerweise verwendet man einen griechischen Buchstaben. In Abbildung 1.5 jedoch heißt der Winkel *w*. Häufig verwendet man der Einfachheit halber eine Ziffer, falls man keine griechischen Buchstaben zur Verfügung hat, oder wenn man später verschiedene Winkel vergleichen will.

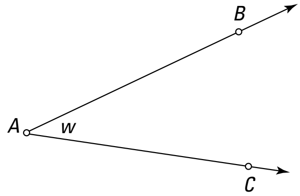

Abbildung 1.5: Winkelbezeichnungen

Positionen mit Hilfe von Dreiecken festlegen

Schon Winkel allein sind sehr spannend. Aber wenn Sie sie in ein Dreieck verschieben, ist das die absolute Krönung. Dreiecke sind eine der am häufigsten untersuchten geometrischen Figuren. Die Winkel, aus denen das Dreieck besteht, geben ihm viele seiner charakteristischen Eigenschaften.

Winkel in Dreiecken

Die Winkel innerhalb des Dreiecks ergeben in ihrer Summe immer 180 Grad – nicht mehr, nicht weniger. Ein Dreieck mit dem Namen *ABC* hat die Winkel *A*, *B* und *C*, und Sie können die Seiten als *AB*, *BC* und *AC* bezeichnen, abhängig davon, welche zwei Winkel um die Seiten herum liegen. Die eigentlichen Winkel können spitz, stumpf oder rechtwinklig sein. Wenn das Dreieck einen stumpfen oder einen rechten Winkel hat, müssen die beiden anderen Winkel spitz sein.

Dreiecke ihrer Form nach benennen

Dreiecke haben spezielle Namen – abhängig von ihren Winkeln und Seiten. Sie können auch mehrere Namen haben – ein Dreieck kann beispielsweise sowohl spitz als auch gleichschenklig sein. Die nachfolgende Liste beschreibt die verschiedenen Winkel. In Abbildung 1.6 sehen Sie die zugehörigen Bilder.

- ✔ **Spitzes Dreieck:** Ein Dreieck mit drei spitzen Winkeln
- ✔ **Rechtwinkliges Dreieck:** Ein Dreieck mit einem rechten Winkel (die beiden anderen Winkel müssen spitz sein)
- ✔ **Stumpfes Dreieck:** Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel (die beiden anderen Winkel müssen spitz sein)
- ✔ **Gleichschenkliges Dreieck:** Ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln; die Längen der diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten sind ebenfalls gleich.
- ✔ **Gleichseitiges Dreieck:** Ein Dreieck, in dem alle Winkel gleich 60 Grad sind; die Längen aller Seiten sind ebenfalls gleich.

- ✔ **Ungleichseitiges (allgemeines) Dreieck:** Ein Dreieck, dessen Winkel oder Seiten nicht dieselben Maße haben

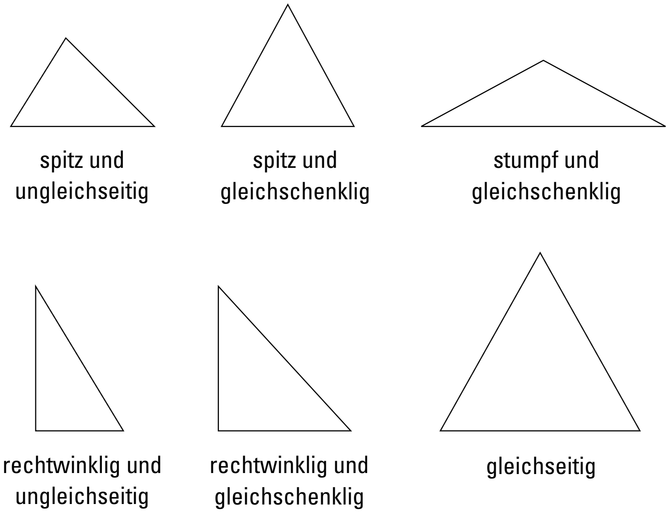

Abbildung 1.6: Dreiecke können abhängig von ihren Eigenschaften mehrere Namen haben

Bilden wir einen Kreis!

Ein Kreis ist eine geometrische Figur, die durch nur zwei Elemente identifiziert und der Größe nach klassifiziert wird: seinen *Mittelpunkt* und seinen *Radius* (das ist der Abstand vom Mittelpunkt zu einem Punkt auf der Kreislinie). Technisch betrachtet ist der Mittelpunkt nicht Bestandteil des Kreises, sondern nur eine Art Anker- oder Referenzpunkt. Der Kreis besteht nur aus all jenen Punkten, die denselben Abstand vom Mittelpunkt haben.

Radius, Durchmesser, Umfang und Fläche

Nachdem Sie einen Punkt als Kreismittelpunkt ausgewählt haben und wissen, wie weit dieser Punkt von allen Punkten entfernt sein soll, die auf der Kreislinie liegen, können Sie ein recht genaues Bild zeichnen. Anhand der Länge des Radius können Sie eine Menge über den Kreis aussagen: seinen *Durchmesser* (den Abstand von einer Seite zur anderen durch den Mittelpunkt), seinen *Umfang* (wie weit es ist, ihn zu umrunden) und seine *Fläche* (wie viele Quadratmeter Sie brauchen, damit er Platz hat). Abbildung 1.7 zeigt diese Merkmale.

Die alten Mathematiker haben herausgefunden, dass der Umfang eines Kreises immer ein wenig mehr als sein dreifacher Durchmesser ist. Mit der Zeit haben sie dieses »ein wenig mehr als der dreifache Durchmesser« immer weiter eingegrenzt, bis sie schließlich einen Wert namens *Pi* dafür eingeführt haben, dargestellt durch den griechischen Buchstaben π.

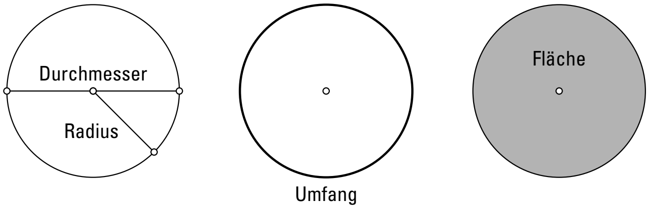

Abbildung 1.7: Die verschiedenen Merkmale eines Kreises

Der Dezimalwert von Pi ist nicht exakt – er ist endlos, aber die meisten Menschen verwenden ihn als annähernd 3,14 oder $\frac{22}{7}$, abhängig davon, welche Form für die jeweilige Berechnung am besten geeignet ist.

Die Formel für die Berechnung des Kreisumfangs ist mit π und dem Durchmesser verknüpft.

Umfang eines Kreises: $U = \pi d = 2\pi r$

Das d stellt das Maß des Durchmessers dar, r das Maß des Radius. Der Durchmesser ist immer der doppelte Radius, es ist also jede Form der Gleichung gültig.

Analog dazu ist die Formel für die Kreisfläche mit π und dem Radius verknüpft.

Fläche eines Kreises: $A = \pi r^2$

Diese Formel liest man wie »Fläche ist Pi *r* Quadrat«.

Beispiel: Ermitteln Sie Radius, Umfang und Fläche für einen Kreis mit dem Durchmesser 10 m.

Ist der Durchmesser (d) gleich 10, schreiben Sie diesen Wert als $d = 10$. Der Radius ist der halbe Durchmesser, also gleich 5 m oder $r = 5$. Den Umfang ermitteln Sie anhand der Formel $U = \pi d = \pi \cdot 10 \approx 3{,}14 \cdot 10 = 31{,}4$. Der Umfang beträgt also ca. 31 m. Die Fläche ermitteln Sie anhand der Formel $A = \pi r^2 = \pi 5^2 = \pi \cdot 25 \approx 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}50$. Die Fläche des Kreises beträgt also etwa 78,5 Quadratmeter.

Sehnen oder Tangenten

Den Durchmesser und den Radius eines Kreises stellen Sie dar, indem Sie Strecken von einem Punkt auf dem Kreis zum Mittelpunkt bzw. durch den Mittelpunkt zu einem anderen Punkt auf dem Kreis zeichnen. Es gibt jedoch noch zwei andere gerade Figuren, die an einem Kreis dargestellt werden können. Eine dieser Figuren wird als Sehne bezeichnet, die andere als Tangente.

Sehnen eines Kreises

Eine *Sehne* eines Kreises ist eine Strecke, die Sie von einem Punkt auf dem Kreis zu einem anderen Punkt auf dem Kreis zeichnen (siehe Abbildung 1.8). Diese Strecke liegt immer innerhalb des Kreises. Die längstmögliche Sehne ist der Durchmesser. Eine längere Strecke innerhalb des Kreises gibt es nicht.

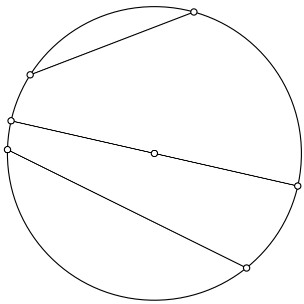

Abbildung 1.8: Sehnen eines Kreises verbinden zwei Punkte auf dem Kreis

Tangenten an Kreisen

Eine *Tangente* an einem Kreis ist eine Gerade, ein Strahl oder eine Strecke, die die Außenseite des Kreises an genau einem Punkt berühren, wie in Abbildung 1.9 gezeigt. Sie bewegt sich nie in den Kreis hinein. Eine Tangente kann keine Sehne sein, weil eine Sehne einen Kreis an zwei Punkten berührt und durch das Kreisinnere verläuft.

Sektoren bestimmen

Ein *Sektor* eines Kreises ist der Teil des Kreises zwischen zwei Radien. Sie können sich so einen Teil wie ein Tortenstück vorstellen (siehe Abbildung 1.10).

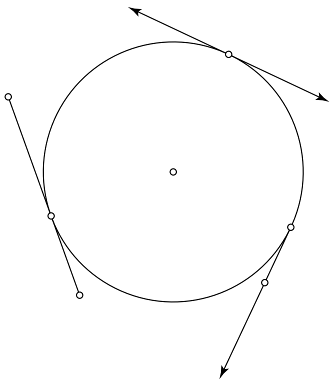

Abbildung 1.9: Tangenten an einem Kreis

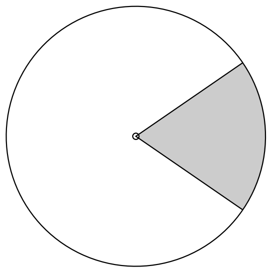

Abbildung 1.10: Ein Sektor eines Kreises

Sie können die Fläche eines Kreissektors berechnen, wenn Sie den Winkel zwischen den beiden Radien kennen. Ein Kreis hat insgesamt 360 Grad. Wenn ein Sektor also ein Winkelmaß von 60 Grad zwischen den beiden Radien aufweist, nimmt der Sektor $\frac{60}{360}$ oder $\frac{1}{6}$ der Gesamtgradzahl ein. Gleichzeitig gilt, dass der Sektor in diesem Fall $\frac{1}{6}$ der Gesamtfläche des Kreises einnimmt.

Beispiel: Bestimmen Sie die Fläche eines Kreissektors, wenn der Winkel zwischen den beiden Radien, die den Sektor bilden, gleich 80 Grad beträgt, und der Radius des Kreises 9 m lang ist.

2. Ermitteln Sie die Kreisfläche.

Die Fläche des gesamten Kreises beträgt $A = \pi r^2 = \pi \cdot (4{,}5)^2 = \approx 3{,}14 \cdot 20{,}25 = 63{,}585$, also etwa 63,5 Quadratmeter.

3. **Bestimmen Sie den Teil des Kreises, den der Sektor abdeckt.**

   Der Sektor nimmt nur 80 Grad des Kreises ein. Sie teilen 80 durch 360 und erhalten:

   $$\frac{80}{360} = \frac{2}{9} \approx 0{,}222$$

4. **Berechnen Sie die Fläche des Sektors.**

   Multiplizieren Sie den Bruch oder die Dezimalzahl aus Schritt 2 mit der Gesamtfläche, um die Fläche des Sektors zu erhalten: $0{,}222 \cdot 63{,}585 \approx 14{,}116$. Der gesamte Kreis hat eine Fläche von fast 64 Quadratmetern, der Sektor nimmt eine Fläche von etwas mehr als 14 Quadratmetern ein.

Trigonometrie-Slang

In der Mathematik hat sich ebenso wie in anderen Wissenschaften ein ganz spezielles Vokabular gebildet. Einige sehr hübsche Wörter aus unserer Alltagssprache haben im Kontext dieses Bereichs eine ganz spezielle Bedeutung angenommen. Die Trigonometrie bildet da keine Ausnahme.

Trigonometrische Funktionen definieren

Jedes Dreieck besteht aus sechs Teilen: drei Seiten und drei Winkeln. Wenn Sie die Seiten messen und diese Messungen (jeweils zwei davon) zueinander in Beziehung bringen, erhalten Sie drei verschiedene Paarungen. Führen Sie Divisionen für die Paarungen durch – und ändern dabei die Reihenfolge der Paare –, dann erhalten Sie sechs verschiedene Lösungen. Wenn Ihr Dreieck beispielsweise Seiten mit den Maßen 3, 4 und 5 hat, dann ergeben sich die sechs Divisionen $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{3}, \frac{4}{5}$ und $\frac{5}{4}$. In Kapitel 7 werden Sie erfahren, was alle diese Brüche in der Welt der trigonometrischen Funktionen bedeuten, indem Sie das Ganze anhand eines rechtwinkligen Dreiecks betrachten. In Kapitel 8 verfolgen Sie dann einen ganz anderen Ansatz. Dort lernen Sie, wie Sie die trigonometrischen Funktionen anhand eines Kreises definieren.

Die sechs trigonometrischen Funktionen heißen *Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens*, *Sekans* und *Kosekans*. Diese Bezeichnungen kommen nur in der Trigonometrie vor.

Abkürzungen in der Trigonometrie

Auch wenn das Wort *Sinus* nicht allzu lang ist, gibt es eine drei Buchstaben kurze Abkürzung dafür, ebenso wie für alle anderen trigonometrischen Funktionen. Die Mathematiker halten diese Abkürzungen für einfacher, und sie passen außerdem besser auf die Tasten der Taschenrechner. Die Funktionen und ihre Abkürzungen sind:

- ✔ Sinus → sin
- ✔ Kosinus → cos
- ✔ Tangens → tan
- ✔ Kotangens → cot
- ✔ Sekans → sec
- ✔ Kosekans → csc

Wie Sie sehen, werden die Abkürzungen aus den jeweils ersten drei Buchstaben der Namen gebildet, außer für den Kosekans. Die Abkürzungen entsprechen natürlich der Schreibweise der Sprache der gebildeten Mathematiker, und das war damals Latein.

Notationen

Winkel sind die wichtigsten Komponenten der Trigonometrie, und häufig kennt man ihr Maß nicht. Für viele Winkel und ihre Winkelmaße gibt es allgemeine Regeln. Sie können die Winkel mit einem Buchstaben, drei Buchstaben oder einer Ziffer benennen, aber um trigonometrische Aufgaben zu lösen und Berechnungen vorzunehmen, bezeichnen die Mathematiker die Winkelmaße in der Regel mit griechischen Buchstaben.

Die gebräuchlichsten Buchstaben für Winkelmaße sind α (Alpha), β (Beta), γ (Gamma) und θ (Theta). In vielen Gleichungen wird die Variable x eingesetzt, um ein Winkelmaß darzustellen.

Die Algebra verwendet konventionelle Notationen wie Hochstellungen, z. B. die 2 in x^2. In der Trigonometrie gelten für Hochstellungen dieselben Regeln und Eigenschaften wie in der restlichen Mathematik. Aber die Hochstellungen in der Trigonometrie sehen häufig anders aus. Tabelle 1.1 zeigt, wie Hochstellungen in der Trigonometrie aussehen können.

In der trigonometrischen Notation sieht es so aus:	Und das bedeutet die Hochstellung:
$\sin^2\theta$	$(\sin\,\theta)^2$
$(\sin\theta)^{-1}$	$\frac{1}{\sin\,\theta}$
$\sin^{-1}\,\theta$	$\arcsin\,\theta$

Tabelle 1.1: Hochstellungen in der Trigonometrie

Der erste Eintrag in Tabelle 1.1 zeigt, wie Sie es sich sparen können, jedes Mal Klammern zu schreiben, wenn Sie eine trigonometrische Funktion potenzieren wollen. Diese Notation ist hübsch und praktisch, aber sie kann auch verwirrend sein, wenn Sie den »Code« nicht kennen. Der zweite Eintrag zeigt, wie Sie den Reziprokwert einer trigonometrischen Funktion darstellen können. Es bedeutet, Sie teilen 1 durch den Wert der Funktion. Der letzte Eintrag in Tabelle 1.1 zeigt, wie Sie die *inverse Sinus-Funktion* schreiben können. Mit der Hochstellung von –1 unmittelbar hinter dem Sinus drücken Sie aus, dass Sie über den inversen Sinus (oder *arcsin*) sprechen, nicht über den Reziprokwert der Funktion. In Kapitel 13 geht es detaillierter um inverse trigonometrische Funktionen, dann wird auch die Notation für eine inverse trigonometrische Funktion klarer.

Funktionen mit Winkeln

Die Funktionen in der Algebra verwenden zahlreiche Operationen und Symbole, die sich von den Zeichen für Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in der Arithmetik unterscheiden. Betrachten Sie beispielsweise die Quadratwurzeloperation $\sqrt{25} = 5$. Wenn Sie 25 unter das Quadratwurzelsymbol stellen, erhalten Sie die Lösung 5. Andere Operationen in der Algebra, wie etwa der Absolutwert, Brüche und die Schrittfunktion, werden in der Trigonometrie ebenfalls verwendet. Aber die Welt der Trigonometrie erweitert diesen Horizont und führt noch differenziertere Prozesse ein. Wenn Sie mit trigonometrischen Funktionen arbeiten, müssen Sie eine ganz neue Menge an Werten lernen. Um beispielsweise die Sinus-Funktion auf 25 anzuwenden, schreiben Sie: sin 25. Die Lösung, die daraus entsteht, ist 0,423 oder –0,132, abhängig davon, ob Sie in Grad oder im Bogenmaß arbeiten (weitere Informationen über diese beiden wichtigen Konzepte der Trigonometrie finden Sie in den Kapiteln 4 und 5). In der Regel kann man sich die Werte, die durch Anwendung der trigonometrischen Funktionen auf Winkelmaße entstehen, nicht ganz einfach merken, und man kann sie auch nicht auf Anhieb erkennen. Sie brauchen also trigonometrische Tabellen für die Werte oder wissenschaftliche Taschenrechner, um mit der Trigonometrie zurechtzukommen.

Im Allgemeinen gilt: Wenn Sie eine trigonometrische Funktion auf ein Winkelmaß anwenden, erhalten Sie irgendeine reale Zahl. Einige Winkel und trigonometrische Funktionen produzieren übersichtlichere Werte, die meisten jedoch nicht. Tabelle 1.2 zeigt die trigonometrischen Funktionen für einen 30°-Winkel.

Trigonometrische Funktion	Auf drei Dezimalstellen gerundeter Wert
sin 30°	0,500
cos 30°	0,866
tan 30°	0,577
cot 30°	1,732
sec 30°	1,155
csc 30°	2,000

Tabelle 1.2: Die trigonometrischen Funktionen für einen Winkel von 30 Grad

Es gibt einige charakteristische Eigenschaften, die von Einträgen in Tabelle 1.2 bestätigt werden. Beispielsweise gilt, dass die Sinus- und Kosinus-Funktionen immer Werte zwischen –1 und 1 haben. Die Sekans- und Kosekans-Funktionen haben immer Werte gleich oder größer 1 oder gleich oder kleiner –1. Ich werde in Kapitel 7 genauer auf diese Eigenschaften eingehen.

Anhand der Tabelle im Anhang finden Sie weitere Werte von trigonometrischen Funktionen für bestimmte Winkelmaße (in Grad):

$\tan 45° = 1$

$\csc 90° = 1$

$\sec 60° = 2$

Ich habe diese Beispielwerte gewählt, damit die Ergebnisse rund und handlich erscheinen. Beachten Sie jedoch, dass sich die meisten Winkel und die meisten Funktionen sehr viel unübersichtlicher präsentieren.

Gleichungen und Gleichheit

Die Trigonometrie bietet Antworten auf viele Fragen aus dem Ingenieurswesen, aus der Navigation und aus der Wissenschaft. Die ersten Astronomen, Ingenieure, Bauern und Seeleute verfügten nicht über die aktuellen Systeme symbolischer Algebra und Trigonometrie, um ihre Probleme zu lösen, aber sie haben es trotzdem geschafft und das Feld für spätere Entwicklungen in der Mathematik bereitet. Die Menschen profitieren heute wesentlich von den schnellen und effizienten Methoden, Gleichungen in der Trigonometrie zu lösen, ebenso wie von den speziellen Techniken und trigonometrischen Gleichungen, mit denen sie experimentieren können und die von den Mathematikern der Vergangenheit entwickelt wurden.

Die Methoden, die Sie für die Lösung von Gleichungen in der Algebra verwenden, verfolgen einen völlig anderen Ansatz, wenn Sie in der Trigonometrie *Identitäten* verwenden (kurz gesagt, sind das Äquivalenzen, die Sie in Gleichungen einsetzen können, um sie zu vereinfachen). Um das Ganze zu vereinfachen (oder zum Teil auch zu verkomplizieren), können die verschiedenen trigonometrischen Funktionen viele verschiedene Identitäten haben. Man könnte fast sagen, es handelt sich um multiple Persönlichkeiten. Wenn Sie trigonometrische Gleichungen und trigonometrische Identitäten auflösen, arbeiten Sie ähnlich wie ein Detektiv, indem Sie substituieren, vereinfachen und auflösen. Welche Antwort erwarten Sie bei der Auflösung von Gleichungen? Winkel natürlich!

Nehmen Sie beispielsweise eine trigonometrische Gleichung: $\sin\theta + \cos^2\theta = 1$.

Bei diesem Problem geht es darum, herauszufinden, welche Winkel für θ eingesetzt werden können, damit die Gleichung stimmt. In diesem Fall gilt: Wenn θ beispielsweise gleich 0 Grad, 90 Grad oder 180 Grad ist, dann ist die Gleichung richtig.

Wenn Sie in der Gleichung θ durch 0 Grad ersetzen, erhalten Sie:

$$\begin{aligned} \sin 0° + (\cos 0°)^2 &= 1 \\ 0 + (1)^2 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Wenn Sie in der Gleichung θ durch 90 Grad ersetzen, erhalten Sie:

$$\begin{aligned} \sin 90° + (\cos 90°)^2 &= 1 \\ 1 + (0)^2 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

Etwas Ähnliches passiert für 180 Grad und alle anderen Winkelmaße, die in dieser Gleichung funktionieren. Beachten Sie jedoch, dass das nicht mit jedem Winkel geht. Ich habe sorgfältig die Winkel ausgewählt, bei denen es sich um *Lösungen* handelt, nämlich Winkel, für die die Gleichung gilt. Um trigonometrische Gleichungen wie diese zu lösen, müssen Sie inverse trigonometrische Funktionen, trigonometrische Identitäten und algebraische Techniken anwenden. In den Kapiteln 10 bis 13 erfahren Sie genau, wie Sie diese Prozesse anwenden können. Wenn Sie damit fertig sind, geht es in Kapitel 14 um die Lösung von Gleichungen.

In unserem speziellen Fall verwenden Sie eine *Identität*, um die Gleichung für alle Lösungen zu berechnen. Sie ersetzen $\cos^2\theta$ durch $1 - \sin^2\theta$, so dass in allen Termen der Sinus verwendet wird – oder nur eine Zahl. Es gibt natürlich auch noch andere Möglichkeiten, die

Identität von $\cos^2\theta$ zu ändern. Ich habe $1 - \sin^2\theta$ verwendet, aber es wären auch $\frac{1}{\sec^2\theta}$ oder $\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ möglich gewesen. Um die Lösung solcher Gleichungen wird es in Kapitel 14 gehen.

Dieses Beispiel sollte Ihnen einfach zeigen, dass eine Identität der trigonometrischen Funktionen einen Ausdruck wesentlich ändern kann – einigen sehr strengen Regeln gehorchend.

Graphen sind Gold wert!

Die trigonometrischen Funktionen haben ganz eigene Graphendarstellungen, die Ihnen helfen können, ihre Werte innerhalb bestimmter Intervalle und für bestimmte Anwendungen zu verstehen. In diesem Abschnitt beschreibe ich die Achsen. Außerdem zeige ich Ihnen sechs grundlegende Graphen.

Wir brauchen Skalen für die Graphen!

Graphen werden in der Algebra, in der Geometrie und in anderen mathematischen Bereichen in der *Koordinatenebene* gezeichnet. Die x-Achse erstreckt sich nach links und rechts, die y-Achse nach oben und unten. Sie können die Koordinatenebene auch in der Trigonometrie verwenden, allerdings mit einem kleinen Zusatz.

Die x-Achse ist eine trigonometrische Skala mit Markierungen, die sowohl Zahlen (positive und negative) als auch Winkelmaße (Grad oder Radianten) darstellen können. Normalerweise will man, dass horizontale und vertikale Markierungen dieselben Abstände voneinander aufweisen. Um äquivalente Markierungen auf der x-Achse in Grad anzugeben, beachten Sie, dass jeweils 90 Grad etwa 1,6 Einheiten darstellen (dieselben Einheiten, die Sie auf der vertikalen Achse verwenden). Diese *Einheiten* stellen Zahlen im realen Zahlensystem dar. Die Umwandlungsmethode basiert auf der Beziehung zwischen Gradmaß und Bogenmaß. Weitere

Informationen über die Methode zur Berechnung dieser Umwandlung finden Sie in Kapitel 5.

Grundlegende Graphen erkennen

Die Graphen der trigonometrischen Funktionen sind sich zum Teil sehr ähnlich, zum Teil aber auch sehr unterschiedlich. Die Graphen von Sinus und Kosinus sehen sich sehr ähnlich, ebenso wie die von Tangens und Kotangens und die von Sekans und Kosekans. Aber die drei Gruppierungen unterscheiden sich voneinander. Die einzige charakteristische Eigenschaft, die sie alle verbindet, ist die Tatsache, dass sie periodisch sind, das heißt, sie wiederholen immer wieder dieselbe Kurve oder dasselbe Muster in beide Richtungen der x-Achse. Sehen Sie sich dazu Abbildung 1.10 bis Abbildung 1.14 an.

Im Verlauf dieses Buches wird es noch sehr viel um die Graphen trigonometrischer Funktionen gehen. Sie finden diese Beschreibungen in den Kapiteln 16, 17, 18 und 19.

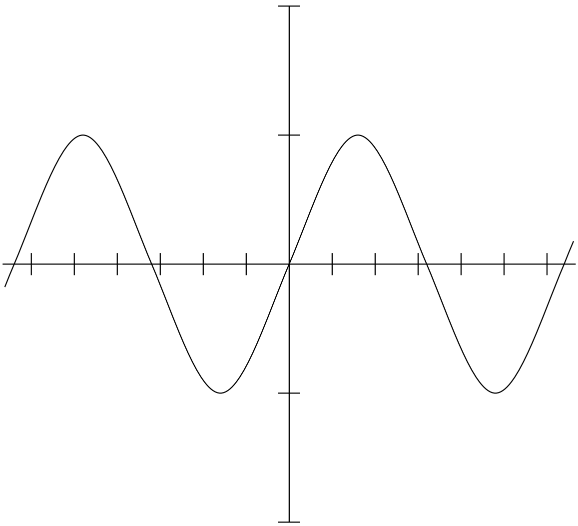

Abbildung 1.11: Der Graph für y = sin x

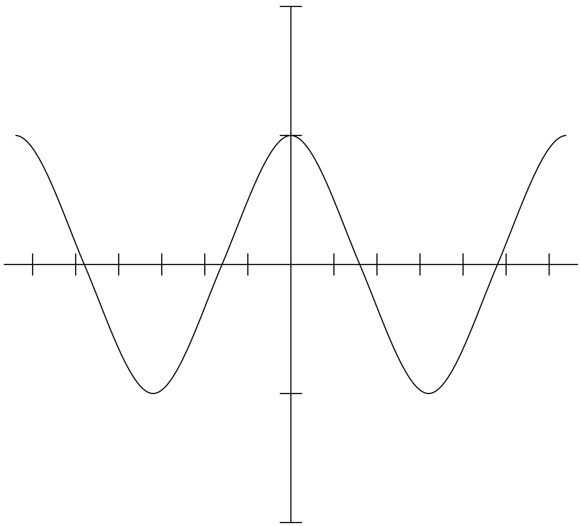

Abbildung 1.12: Der Graph für y = cos x

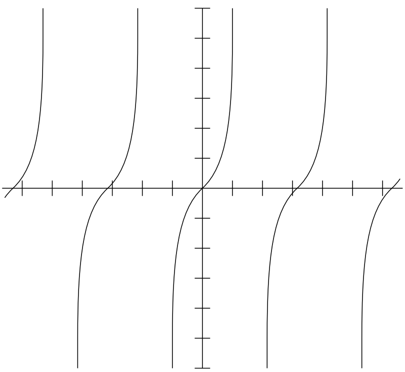

Abbildung 1.13: Der Graph für y = tan x

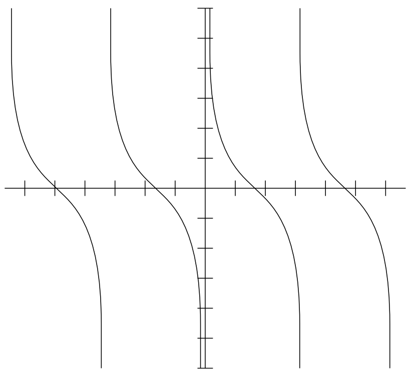

Abbildung 1.14: Der Graph für y = cot x