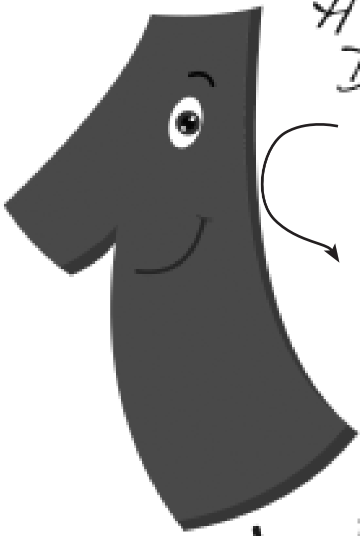
Holger Dambeck



Nullen machen Einsen groß

Mathe-Tricks für alle Lebenslagen

Kiepenheuer & Witsch

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411

Verlag Kiepenheuer & Witsch, FSC® N001512

1. Auflage 2013

Umschlaggestaltung: Barbara Thoben, Köln
Umschlagmotiv und Cartoons im Innenteil: © Leo Leowald, Köln
Alle Grafiken und Fotos, sofern nicht anders angegeben © Holger Dambeck
Gesetzt aus der Minion und der News Gothic
Satz: Buch-Werkstatt GmbH, Bad Aibling
Druck und Bindung: CPI – Clausen & Bosse, Leck
ISBN 978-3-462-04511-6

Wir lernen das Einmaleins in der Schule – und später das schriftliche Addieren und Multiplizieren. Leider kein Schulstoff sind die vielen verblüffenden Rechentricks, die Menschen im Laufe der Jahrhunderte entwickelt haben, um sich das Jonglieren mit Zahlen zu erleichtern.

Eigentlich wollte ich dieses Kapitel gar nicht schreiben. Denn darin geht es ums Rechnen – und das hat für mich mit Mathematik nicht allzu viel zu tun. Mir fehlt einfach das kreative Element beim Büffeln von Zahlenkolonnen.

Trotzdem fängt dieses Buch mit einem Kapitel über Zahlen und Rechnen an, und das hat gute Gründe. Man kann nämlich durchaus intelligent rechnen und dabei elegante Wege gehen. Man muss sich dazu nur die Zahlen etwas genauer anschauen.

Nehmen wir zum Beispiel die Multiplikation 19 mal 19. Ich weiß nicht, wie es Ihnen geht, aber ich würde da instinktiv den Taschenrechner zücken. Doch es gibt einen verblüffenden Trick, der die im Kopf sperrige Rechnung deutlich vereinfacht. Wir addieren zur ersten 19 die Zahl 1 hinzu und erhalten 20. Bei der zweiten 19 ziehen wir 1 ab und bekommen 18. Dann multiplizieren wir 18 mit 20 – was nicht allzu schwer ist, das Ergebnis lautet 360. Zu dieser Zahl addieren wir dann noch $1 \times 1 = 1$ hinzu und haben somit das Endergebnis von 361.

Hier noch mal die Rechnung in übersichtlicher Form:

$$\begin{aligned} 19 \times 19 &= (19+1) \times (19-1) + 1 \times 1 \\ &= 20 \times 18 + 1 \\ &= 360 + 1 \\ &= 361 \end{aligned}$$

Dieser Trick funktioniert auch beim Quadrat von 22:

$$\begin{aligned}22 \times 22 &= (22+2) \times (22-2) + 2 \times 2\\ &= 24 \times 20 + 4\\ &= 480 + 4\\ &= 484\end{aligned}$$

Vielleicht haben Sie den Trick schon längst durchschaut. Er hat mit einer binomischen Formel zu tun und mit der Suche nach einer glatten Zahl – dazu gleich mehr. Auf den nächsten Seiten werden Sie noch mehr solcher Kniffe kennenlernen und auch verstehen, wie sie funktionieren.

Bei der Recherche für dieses Kapitel hat mir das Internet nicht allzu viel geholfen. Ich musste stattdessen in Bibliotheken gehen. Abgesehen von zwei neuen Büchern zum Thema Rechentricks, sind die meisten Werke schon 50, 60 Jahre alt.

Das ist auch kaum verwunderlich. Als es noch keine Taschenrechner gab, waren Kopfrechnen und schriftliches Rechnen völlig normal. Vor allem kompliziertere Kalkulationen waren eine große Herausforderung – und natürlich auch fehlerträchtig. Deshalb waren alle Tricks willkommen, mit denen man sich das Rechnen erleichtern konnte.

Ich bin immer noch verblüfft, wie viele raffinierte Tricks es gibt. Es sind so viele, dass man ein und dieselbe Aufgabe mitunter gleich auf mehreren Wegen elegant und einfach lösen kann. Schade, dass diese Tricks in der Schule kaum Thema sind. Denn sie könnten Kindern zeigen, dass Zahlen ein spannendes Abenteuer sind und keine dröge Pflichtaufgabe.

Zehnerpäckchen

Rechnen bedeutet in der Regel, mehrere Einzelschritte nacheinander auszuführen. Oft kommt es dabei nicht darauf an, mit welchem Schritt ich beginne und mit welchem ich aufhöre. Das eröffnet uns Möglichkeiten, Rechnungen radikal zu vereinfachen, wie das Beispiel der Zehnerpäckchen zeigt.

Nehmen wir die simple Addition

$$7+2+5+13+8$$

Sie können die Zahlen in der Reihenfolge, wie sie dastehen, addieren. Oder aber Sie schauen sie sich erst einmal genauer an. Dann entdecken Sie schnell, dass 2 und 8 sowie 7 und 13 wunderbar zusammenpassen. Sie ergeben gemeinsam 10 und 20. Zählt man noch die 5 hinzu, erhält man 35 und ist fertig. Eine clevere Methode, die gut funktioniert, solange nicht zu viele Summanden im Spiel sind, weil man dann womöglich die Übersicht verliert, welche Zahlen man schon addiert hat und welche noch fehlen.

Mit 10 zu rechnen, fällt uns leicht. Das gilt auch fürs Multiplizieren, wo wir ebenfalls Zahlen geschickt umsortieren können. Die Aufgabe

$$46\times35$$

lässt sich bequem im Kopf rechnen, wenn man die Zahlen neu ordnet. In 35 steckt der Faktor 5, in der 46 der Faktor 2. Und 5 mal 2 ergibt 10. Wir können also schreiben:

$$
\begin{aligned}
46 \times 35 &= 23 \times 2 \times 5 \times 7 \\
&= 23 \times 7 \times 10
\end{aligned}
$$

23×7 bekomme ich im Kopf gerade noch so hin – es ist $140 + 21 = 161$. Also lautet das Ergebnis:

$$46 \times 35 = 1610$$

Man hätte übrigens auch gleich schreiben können

$$46 \times 35 = 23 \times 70$$

Mit dem geschickten Umsortieren von Zahlen machte übrigens auch der junge Carl Friedrich Gauß (1777–1855) auf sich aufmerksam. Sein Lehrer hatte die Aufgabe gestellt, die Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Der siebenjährige Gauß gruppierte die Zahlen zu Paaren, die gemeinsam jeweils 101 ergeben.

$$(1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots (50 + 51)$$

Er arbeitete also mit 101er-Päckchen. So brauchte das junge Mathegenie nur 50×101 zu rechnen und kam auf das richtige Ergebnis 5050.

Multiplikation mit 5

Kommen wir nun zu einfachen Multiplikationen, die uns im Alltag immer wieder begegnen. Was ist beispielsweise 74×5? Das Ergebnis dieser Aufgabe habe ich wahrscheinlich schneller hingeschrieben, als Sie die Zahlen in Ihren Taschenrechner tippen können: 370.

Wie geht der Trick? Er nutzt ebenfalls die 10. Wenn wir eine Zahl mit 5 multiplizieren, können wir auch ihre Hälfte verzehnfachen – also $1/2 \times 10$ rechnen. Solange eine Zahl gerade ist, macht das keine Probleme. Ich halbiere die Zahl und hänge eine Null an:

$$34 \times 5 = 17 \times 10 = 170$$
$$46 \times 5 = 23 \times 10 = 230$$

Das klappt übrigens auch mit Geldbeträgen:

$$34{,}98\ € \times 5 = 17{,}49\ € \times 10 = 174{,}90\ €$$

Was tue ich aber, wenn die Zahl ungerade ist? Etwa bei 27×5? Ich halbiere die 27 und komme auf 13 Rest 1. An die 13 hänge ich dann aber keine 0 an, sondern eine 5. Und das mache ich immer, wenn das Halbieren nur mit Rest klappt.

$$27 \times 5 = 13 \times 10 + 5 = 130 + 5 = 135$$
$$45 \times 5 = 22 \times 10 + 5 = 220 + 5 = 225$$

Gruppen sehen

Bei zweistelligen, vielleicht auch noch bei dreistelligen Zahlen, bereitet es kaum Probleme, diese im Kopf zu halbieren. Bei größeren Zahlen, fünfstelligen beispielsweise wie 34588, wird das schon schwieriger. Hier hilft es ungemein, die Zahl in leicht rechenbare Gruppen aufzuspalten. Ich setze einfach senkrechte Striche zwischen die Ziffern und multipliziere dann jede Gruppe separat mit 5. Das heißt, ich halbiere sie und hänge ganz am Ende eine 0 an – oder eine 5, falls die letzte Ziffer ungerade ist.

Aus 34588 × 5 wird dann:

34 | 58 | 8 × 5 = 17 | 29 | 40 = 172940

Sie ahnen schon, worauf das Ganze hinausläuft: Wer geschickt rechnen will, muss genau hinschauen. Noch schnell ein zweites Beispiel:

249857830583 × 5 =
24 | 98 | 578 | 30 | 58 | 3 × 5 =
12 | 49 | 289 | 15 | 29 | 15 =
1249289152915

Die letzte Rechnung verdeutlicht, dass der Trick dann am besten funktioniert, wenn meine Ausgangszahl viele gerade Ziffern enthält, sodass ich möglichst immer Zweierpäckchen bilden kann, die geradzahlig sind.

Wenn dann doch mal vier ungerade Ziffern aufeinander folgen, wird die Rechnung etwas schwieriger, aber sie funktioniert trotzdem. Beispiel 249857330583 – hier ist im Vergleich zur eben untersuchten Zahl aus der Ziffer 8 an siebenter Stelle eine 3 geworden. Aus den ursprünglichen Päckchenzahlen 578 und 30 wird dann 57 und 330. Das Päckchen 57 ergibt halbiert 28 Rest 1 – ich muss also eine 5 ins Päckchen rechts daneben verschieben. Dort steht eigentlich 165 (die Hälfte von 330), aber es kommt ganz links noch eine 5 hinzu, die wir zu der 1 aus der 165 addieren müssen. Daher wird aus 165 schließlich 665:

$249857330583 \times 5 =$
$24 \mid 98 \mid 57 \mid 330 \mid 58 \mid 3 \times 5 =$
$12 \mid 49 \mid 28 + \text{Rest } 1 \mid 165 \mid 29 \mid 15 =$
$12 \mid 49 \mid 28 \mid (5+1)65 \mid 29 \mid 15 =$
1249286652915

Der Gruppierungstrick funktioniert übrigens nicht nur beim Multiplizieren mit 5, sondern auch mit anderen einstelligen Faktoren.

$523 \times 3 = 5 \mid 23 \times 3 = 15 \mid 69 = 1569$

$816 \times 6 = 8 \mid 16 \times 6 = 48 \mid 96 = 4896$

$911 \times 8 = 9 \mid 11 \times 8 = 72 \mid 88 = 7288$

Die Rechnung wird anspruchsvoller, wenn aus einem Zweierpäckchen ganz rechts nach dem Multiplizieren eine dreistellige Zahl entsteht – dann muss man sich Zahlen merken. Im Beispiel 523×8 wird aus der zweistelligen Zahl 23 nach der Multiplikation mit 8 eine dreistellige – nämlich 184. Die 84 bleiben ganz rechts im Ergebnis stehen – die 1 addieren wir zur Gruppe links daneben hinzu:

$$
\begin{aligned}
523 \times 8 = 5 \mid 23 \times 8 &= 40 \mid 184 = \\
&= 4(0+1) \mid 84 = \\
&= 4184
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit 9, 18, 27

Beim Faktor 9 ist die Sache klar: Ich multipliziere die Ausgangszahl mit 10 und ziehe dann davon wieder ein Zehntel ab.

$$
\begin{aligned}
53 \times 9 &= 530 - 53 \\
&= 477
\end{aligned}
$$

Wenn Sie ein Vielfaches von 18 oder 27 berechnen wollen, multiplizieren Sie mit 20 beziehungsweise 30 und subtrahieren vom Ergebnis ebenfalls ein Zehntel, denn 2 beziehungsweise 3 sind ein Zehntel von 20 beziehungsweise 30.

$$
\begin{aligned}
53 \times 18 &= 1060 - 106 \\
&= 954
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
53 \times 27 &= 1590 - 159 \\
&= 1431
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit 25

Bei der 5 halbieren wir die Zahl und rechnen mal 10, beim Multiplizieren mit 25 vierteln wir sie und rechnen mal 100.

$$16 \times 25 = 16 \times \frac{1}{4} \times 100 = 400$$

$$84 \times 25 = 21 \times 100 = 2100$$

Wenn die Zahl nicht glatt durch 4 teilbar ist, addieren wir ganz zum Schluss das 25-Fache des Restes hinzu.

$$17 \times 25 = (4 \text{ Rest } 1) \times 100 = 400 + 25 = 425$$

$$83 \times 25 = (20 \text{ Rest } 3) \times 100 = 2075$$

Mit etwas Geschick können wir auch größere Zahlen mit 25 multiplizieren:

$$\begin{aligned} 327 \times 25 &= (324 + 3) \times 25 \\ &= 81 \times 100 + 3 \times 25 \\ &= 8175 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 65281 \times 25 &= (16000 + 320) \times 100 + 1 \times 25 \\ &= 1632025 \end{aligned}$$

Sollten Sie mal in die Verlegenheit kommen, eine Zahl mit 2,5 multiplizieren zu müssen, wissen Sie nun auch, wie das geht: Sie teilen wie beim Faktor 25 erst durch 4 und rechnen dann mal 10 statt mal 100.

Multiplikation mit 11

Fast schon ein Klassiker ist das Rechnen mal 11. Besonders leicht geht das bei zweistelligen Zahlen. Was ist 43 mal 11? Das Ergebnis ist eine dreistellige Zahl. Ganz links steht die 4, ganz rechts die 3. Und in der Mitte die Summe aus 4 und 3, also 7.

$$43 \times 11 = 4(4+3)\,3 = 473$$

Diese Rechnung funktioniert wunderbar, solange die Summe der beiden Ziffern einstellig ist.

$$54 \times 11 = 5(5+4)\,4 = 594$$

$$81 \times 11 = 8(8+1)1 = 891$$

Wenn die Summe zweistellig wird, ist das aber auch nicht weiter dramatisch, dann muss ich mir nur ihre linke Ziffer, das kann nur eine 1 sein, merken. Diese 1 addiere ich dann zur Ziffer ganz links hinzu:

$$\begin{aligned} 68 \times 11 &= 6(6+8)\,8 = 6(14)\,8 \\ &= (6+1)4\,8 = 748 \end{aligned}$$

Leider haben wir es aber nicht immer nur mit zweistelligen Zahlen zu tun, die wir mit 11 multiplizieren wollen. Doch auch Zahlen mit drei und mehr Ziffern stellen uns nicht vor allzu große Probleme. Beim klassischen schriftlichen Malnehmen müsste ich zwei Zahlen untereinanderschreiben und addieren.

$$\begin{array}{r} \underline{368345 \times 11} \\ 368345 \\ \underline{+\,368345} \\ \underline{\underline{=4051795}} \end{array}$$

Wir erledigen das aber nun in einem Schritt. Das geht nicht nur schneller als bei der schriftlichen Methode – mit etwas Übung sind wir sogar schneller als mit dem Taschenrechner.

Der Rechenweg ist der folgende: Wir setzen links eine Null vor die Zahl und schreiben dann unter jede Ziffer die Summe aus dieser Ziffer und der rechts daneben. Ganz rechts bei der 5 gibt es keine Ziffer rechts daneben, also ist das erste Ergebnis 5.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 11 \\ 5 \end{array}$$

Unter die 4 schreiben wir $4+5=9$.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 11 \\ 95 \end{array}$$

Unter die 3 kommt $3+4=7$

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 11 \\ 795 \end{array}$$

Die nächste Summe lautet $8+3=11$, wir notieren die 1 und merken uns 1 für die Ziffer daneben.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 11 \\ {}^{1}1795 \end{array}$$

Danach folgen $6+8+1$ (gemerkt) $=15$, also 5 und 1 gemerkt, sowie $3+6+1=10$, was 0 und 1 gemerkt entspricht, und schließlich $0+3+1=4$. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 11 \\ 4051795 \end{array}$$

Multiplikation mit 12

Was mit 11 klappt, funktioniert in abgewandelter Form auch mit 12. Ich rechne dann nicht *Ziffer darüber plus Ziffer daneben,* sondern *zweimal Ziffer darüber plus Ziffer daneben.* Wir bleiben bei unserem Beispiel 368345 und beginnen mit $2 \times 5 = 10$, eine Ziffer daneben gibt es nicht. Also bleibt es bei 0 und 1 gemerkt.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 12 \\ {}^{1}0 \end{array}$$

Dann folgt $2 \times 4 + 1 + 5 = 14$, also 4 und 1 gemerkt.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 12 \\ {}^{1}40 \end{array}$$

Weiter geht's mit $3 \times 2 + 1 + 4 = 11$.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 12 \\ {}^{1}140 \end{array}$$

Nun folgt $2 \times 8 + 1 + 3 = 20$.

$$\begin{array}{l} 0368345 \times 12 \\ {}^{2}0140 \end{array}$$

$2 \times 6 + 2 + 8$ ist 22, also schreiben wir unter die 6 eine 2 und merken uns 2.

$$0368345 \times 12$$
$$^{2}\;20140$$

Es folgt $3 \times 2 + 2 + 6 = 14$, also 4 und 1 gemerkt.

$$0368345 \times 12$$
$$^{1}\,420140$$

Und ganz vorn ergibt sich $1 + 3 = 4$. Damit sind wir mit der Multiplikation mal 12 fertig.

$$0368345 \times 12$$
$$4420140$$

Wenn Sie Spaß an dieser Art des Multiplizierens mit 11 und 12 haben: In Kapitel 6 stelle ich Ihnen die Trachtenberg-Schnellrechenmethode vor, mit der Sie auf ganz ähnliche Weise auch mal 8 oder mal 7 rechnen können.

Multiplikation mit 15

Der Faktor 15 erscheint auf den ersten Blick unhandlich, aber wenn wir ihn in die Summanden 10 und 5 zerlegen, wird die Rechnung ganz einfach. Mal 5 heißt ja bekanntlich, die Hälfte verzehnfachen. Mal 15 heißt dann, die Zahl plus ihrer Hälfte verzehnfachen.

$$34 \times 15 = (34 + 17) \times 10 = 51 \times 10 = 510$$

$$436 \times 15 = (436 + 218) \times 10 = 654 \times 10 = 6540$$

Sollte die Zahl nicht gerade sein, addieren wir zur ursprünglichen Zahl ihre ganzzahlige Hälfte und hängen dann statt der 0 eine 5 an das Ergebnis.

$$437 \times 15 = (437 + 218) \times 10 + 5 = 655 \times 10 + 5$$

Das Ergebnis lautet 6555.

Mitunter ist es aber leichter, beim Multiplizieren mit 15 anders vorzugehen. Wenn die Zahl durch 2 teilbar ist, halbiere ich sie und rechne dann mal 30.

$$16 \times 15 = 8 \times 30 = 240$$

Sollte die Zahl ungerade sein, nehme ich ihre ganzzahlige Hälfte mal 30 und addiere am Schluss noch 15.

$$19 \times 15 = 9 \times 30 + 15 = 285$$

Diese Aufgabe könnte man natürlich auch noch lösen, indem man die 15 mit 20 multipliziert und vom Ergebnis dann 15 wieder abzieht.

$$19 \times 15 = 20 \times 15 - 15 = 300 - 15 = 285$$

Sie sehen: Es gibt oft mehrere Wege, eine Rechnung elegant abzukürzen. Welchen Sie wählen, ist manchmal auch Geschmackssache. Aber je mehr solcher Kniffe Sie kennen, umso kreativer können Sie rechnen.

Quadrate und Kubikzahlen

Beim nächsten Trick geht es ums Quadrieren. Sie erinnern sich an das Beispiel gleich zu Beginn des Kapitels:

$$\begin{aligned} 19 \times 19 &= (19+1) \times (19-1) + 1 \times 1 \\ &= 20 \times 18 + 1 \\ &= 361 \end{aligned}$$

Sie können mit dieser Methode beliebige zweistellige Zahlen leicht im Kopf quadrieren, wie 85×85 oder 27×27.

$$\begin{aligned} 85 \times 85 &= (85+5) \times (85-5) + 5 \times 5 \\ &= 90 \times 80 + 25 \\ &= 7225 \\ 27 \times 27 &= (27+3) \times (27-3) + 3 \times 3 \\ &= 30 \times 24 + 9 \\ &= 729 \end{aligned}$$

Natürlich könnten Sie 85×85 auch schnell in den Taschenrechner eintippen. Aber mit einem Trick macht das Rechnen viel mehr Spaß – und zudem werden Ihre Kollegen oder Mitschüler Augen machen, wenn sie mitbekommen, was Sie mal eben so im Kopf kalkulieren.

Wie schon zu Beginn erwähnt, basiert die Methode auf der binomischen Formel

$$a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b)$$

Wenn wir das b^2 auf die andere Seite der Gleichung bringen, haben wir genau den Rechenweg von oben hergeleitet.

$$a^2 = (a+b) \times (a-b) + b^2$$

Das Prinzip der Methode ist, aus a durch Addieren oder Subtrahieren einer Zahl b eine glatte, durch 10 teilbare Zahl zu machen, mit der wir gut kalkulieren können.

Prinzipiell eignet sich die Formel auch für drei- oder vierstellige Zahlen. Der Abstand b der Zahl zur nächsten glatten Zahl sollte aber nicht zu groß sein, damit die Rechnung nicht zu kompliziert wird. Schließlich müssen Sie immer auch b^2 ausrechnen. Beim folgenden Beispiel fällt uns das zum Glück nicht schwer:

$$\begin{aligned} 391 \times 391 &= 400 \times 382 + 9 \times 9 \\ &= 160.000 - 8000 + 800 + 81 \\ &= 152.881 \end{aligned}$$

Bei weniger handlichen Zahlen, etwa $667 \times 667 = 700 \times 634 + 33^2$, würde ich dann doch lieber den Taschenrechner zücken.

Was bei Quadratzahlen klappt, funktioniert auf ähnliche Weise auch bei Kubikzahlen. Der Trick basiert auf folgender Formel:

$$a^3 = (a-b) \times a \times (a+b) + a \times b^2$$

Ganz so einfach wie bei den Quadraten ist die Rechnung leider nicht, wir müssen ja mit 3 statt mit 2 Faktoren arbeiten. Auch hier geht es darum, durch geschicktes Addieren beziehungsweise Subtrahieren auf durch 10 teilbare Zahlen zu kommen.

$$
\begin{aligned}
13^3 &= (13-3)\times 13\times (13+3)+13\times 3^2\\
&= 10\times 13\times 16+9\times 13\\
&= 10\times(160+48)+117\\
&= 2080+117\\
&= 2197
\end{aligned}
$$

Zahl endet auf 5

Die Rechentricks, die Sie bis zu dieser Stelle kennengelernt haben, waren im Grunde alle von allgemeiner Art. Das heißt: Sie funktionieren ausnahmslos für alle Zahlen, die Sie zum Beispiel mit 11, 12 oder 15 multiplizieren. Zahlen sind jedoch sehr verschieden. Manche sind sperrig, mit anderen rechnet es sich leichter. Wenn man das weiß, kann man es geschickt nutzen.

Die Kniffe, die ich Ihnen nun vorstellen möchte, klappen leider nur bei ganz speziellen Rechenoperationen und Zahlenkonstellationen. Aber sie sind genial – und deshalb gehören sie unbedingt in dieses Kapitel.

Wie man Zahlen mit einer binomischen Formel geschickt quadriert, wissen Sie bereits. Falls die Zahl auf 5 endet, brauchen Sie diese Formel aber nicht einmal. Wenn Sie 35 mal 35 ausrechnen wollen, nehmen Sie einfach die 3 und multiplizieren sie mit $3+1=4$. Hinter das Ergebnis 12 schreiben Sie dann 5 mal $5=25$, und schon sind Sie fertig!

$$
\begin{aligned}
35\times 35 &= (3\times 4)25\\
&= 1225
\end{aligned}
$$

Die Methode funktioniert auch bei dreistelligen Zahlen:

$$\begin{aligned} 115 \times 115 &= (11 \times 12)25 \\ &= 13225 \end{aligned}$$

Warum klappt das Ganze? Wenn wir die auf 5 endende Zahl in der Form $10a + 5$ schreiben, dann ist ihr Quadrat:

$$\begin{aligned} (10a+5)^2 &= 100a^2 + 2 \times 10a \times 5 + 25 \\ &= 100a^2 + 100a + 25 \\ &= 100a \times (a+1) + 25 \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck entspricht genau der Rechenvorschrift dieser Methode. Ich multipliziere a mit $a + 1$ und hänge dann 25 an.

Zehner oder Einer gleich

Hübsch finde ich auch den noch spezielleren Fall, dass bei einem Produkt von zweistelligen Zahlen die Zehner gleich sind und die Einer zusammen 10 ergeben. Zum Beispiel 32 mal 38. Der Rechenweg ist im Grunde genauso wie beim Quadrat von Zahlen, die auf 5 enden. Zuerst multipliziere ich 3 mit $(3 + 1)$ und erhalte 12. Und an das Ergebnis hänge ich im zweiten Schritt 2 mal $8 = 16$ an.

$$\begin{aligned} 32 \times 38 &= (3 \times 4)(2 \times 8) \\ &= 1216 \end{aligned}$$

Ein zweites Beispiel:

$$\begin{aligned}61 \times 69 &= (6 \times 7)(1 \times 9)\\ &= 4209\end{aligned}$$

Wichtig ist, dass das Produkt der Einer immer aus zwei Stellen besteht. Hier ist es mit 9 ja eigentlich einstellig, wir müssen aber noch eine 0 davorschreiben, damit das richtige Ergebnis herauskommt. Auch dreistellige Produkte lassen sich mit diesem Verfahren berechnen:

$$\begin{aligned}123 \times 127 &= (12 \times 13)(3 \times 7)\\ &= 15621\end{aligned}$$

Diese Rechenregel setzt voraus, dass die Einer sich zu 10 ergänzen und die Stellen ab den Zehnern gleich sind. Zugegebenermaßen ist das ein spezieller Fall – aber wenn Ihnen eine solche Multiplikation mal unterkommt, wissen Sie, wie sie elegant gelöst wird.

Es gibt aber auch den umgedrehten Fall: Die Zehner ergänzen sich zu 10 und die Einer sind gleich. Nehmen wir das Produkt von 33 und 73. Der Rechentrick geht folgendermaßen: Wir multiplizieren die Zehner, also 3 mal $7 = 21$, und addieren dazu die Einerziffer 3. An das Ergebnis 24 hängen wir dann zweiziffrig das Quadrat der Einer.

$$\begin{aligned}33 \times 73 &= (3 \times 7 + 3)(3 \times 3)\\ &= 2409\end{aligned}$$

Ein anderes Beispiel:

$$\begin{aligned}44 \times 64 &= (24+4)(16)\\ &= 2816\end{aligned}$$

Warum die Rechenwege bei gleichem Einer oder gleichem Zehner funktionieren, können Sie selbst herausfinden. Es sind die Aufgaben 3 und 4 am Ende dieses Kapitels – die Lösungen finden Sie im Anhang.

Faktoren nahe 100

Für Produkte wie 102 mal 107 gibt es eine verblüffende Methode, bei der man kaum rechnen muss. Beide Zahlen müssen knapp über 100 liegen. Dann kann ich das Ergebnis folgendermaßen aufschreiben: Ich addiere zu der einen Zahl den Hunderter-Überschuss der anderen, also $102+7=109$. Und an das Ergebnis hänge ich zweistellig das Produkt $2 \times 7 = 14$. Fertig.

$$\begin{aligned}102 \times 107 &= (102+7)(2 \times 7)\\ &= 10914\\ 108 \times 109 &= (108+9)(8 \times 9)\\ &= 11772\end{aligned}$$

Wenn beide Zahlen knapp unter 100 liegen, gehe ich ganz ähnlich vor.

Wir wählen als Beispiel 98 mal 96. Zuerst ziehe ich von der ersten Zahl 98 die Differenz der zweiten Zahl zu 100 ab, also $98-4=94$. Dahinter setze ich dann zweistellig das Produkt $(100-98) \times (100-96)$, also das Produkt der sogenannten Hunderterergänzungen. In diesem Fall ist es $2 \times 4 = 8$.

$$98 \times 96 = (98-4)(2 \times 4)$$
$$= 9408$$

$$91 \times 97 = (91-3)(9 \times 3)$$
$$= 8827$$

Schnapszahl mal 9

Zum Schluss dieses Kapitels möchte ich Ihnen noch einen einfachen Trick mit Schnapszahlen vorstellen. 33 oder 222 fallen in diese Kategorie. Mit diesem Trick ist es ein Kinderspiel, eine solche zifferngleiche Zahl mit 9 zu multiplizieren.

Rechnen wir zum Beispiel 8888×9. Wir nehmen die 8 ganz rechts weg und multiplizieren sie mit 9. Das Ergebnis ist 72. Zwischen die 7 und die 2 setzen wir dann so viele Neunen, wie noch Achten geblieben sind. In diesem Fall sind es drei. Und schon sind wir fertig.

$$8888 \times 9 = 7 \mid 999 \mid 2$$
$$= 79992$$
$$666666666 \times 9 = 5 \mid \text{achtmal Ziffer } 9 \mid 4$$
$$= 5 \mid 99999999 \mid 4$$
$$= 5999999994$$

Die Erklärung für diese Methode, die bei jeder Schnapszahl funktioniert, sollen Sie selbst finden – in Aufgabe 5!

Puh, das waren jetzt viele Zahlen. Ich hoffe aber, Sie haben so wie ich immer wieder gestaunt, auf welch verrückte Weise man sich Kalkulationen vereinfachen kann. Wichtig dabei ist, sich die Zahlen immer erst genau anzuschauen, bevor man loslegt. Also erst denken – dann rechnen.

Wenn Sie noch mehr Zahlentricks kennenlernen möchten, empfehle ich Ihnen dazu Kapitel 6, in dem es unter anderem um die Kreuzmultiplikation und um die Trachtenberg-Methode geht.

Damit Ihre grauen Zellen nicht zu einseitig beansprucht werden, tauchen wir im nächsten Kapitel in die faszinierende Welt der Geometrie ein.

Aufgaben

Aufgabe 1 *

Die Summe von vier natürlichen Zahlen ist eine ungerade Zahl. Beweisen Sie, dass das Produkt dieser vier Zahlen dann eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 2 * *

Karin hat 7 Tafeln Schokolade: 4 Vollmilch, 2 Zartbitter und 1 Nuss. Sie möchte 3 Tafeln ihrem Freund geben und 4 behalten. Wie viele Varianten gibt es?

Aufgabe 3 * * *

Beweisen Sie folgenden Rechentrick für die Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen, deren Zehner gleich sind und deren Einer zusammen 10 ergeben. Wir rechnen Zehner × (Zehner + 1) und hängen daran zweistellig das Produkt der beiden Einer an.

Aufgabe 4 * * *

Die Zehner zweier zweistelliger Zahlen ergänzen sich zu 10, die Einer sind gleich. Warum funktioniert folgender Trick zur Berechnung des Produkts? Wir multiplizieren die Zehner und addieren dazu die Einerziffer. An das Ergebnis hängen wir dann zweiziffrig das Quadrat der Einer.

Aufgabe 5 * * * * *

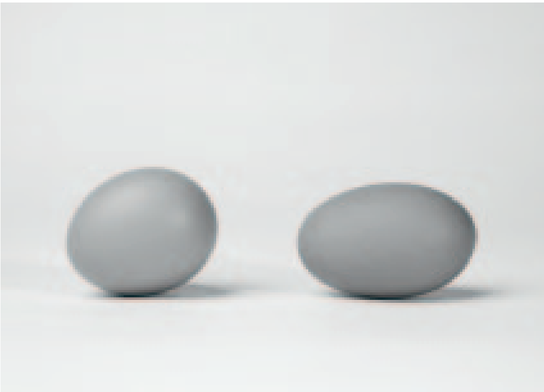
Beweisen Sie den Rechentrick für die Multiplikation einer Schnapszahl mit 9:

$$\begin{aligned} 8888 \times 9 &= 7\,|\,999\,|2 \\ &= 79992 \end{aligned}$$

Geometrie: Perfekt geformt und fair geteilt

Wie zeichne ich ein Ei oder ein regelmäßiges Pentagon? Und kann man ein Pizzastück überhaupt gerecht dritteln? Die Geometrie ist eines der schönsten Teilgebiete der Mathematik. Wer sie gut beherrscht, braucht sich vor keinem Kindergeburtstag mehr zu fürchten.

Es war kurz vor Ostern, und in einem Matheblog tauchte ein spannendes Thema auf, mit dem ich mich bis dahin noch nie beschäftigt hatte: Wie zeichnet man eigentlich ein Ei? Reicht ein Zirkel aus? Oder brauche ich vielleicht einen Faden wie bei der Konstruktion einer Ellipse? Was charakterisiert die Ei-Form überhaupt?


© Oliver Mann

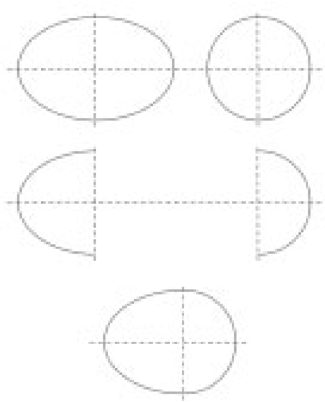
Eier: Mischung aus Kugel und Ellipsoid?

Wenn wir uns Hühnereier genauer anschauen, merken wir schnell, dass keins wie das andere ist. Manche sind spitzer, andere gehen fast schon in die Richtung einer Kugel. Aber zumindest eine Gemeinsamkeit haben die Umrisse von Hühnereiern: Es gibt nur eine Symmetrieachse, die in Längsrichtung verläuft. Das unterscheidet Eier von Ellipsen, die man als platt gedrückte Kreise betrachten kann. Ellipsen haben zwei Symmetrieachsen.

Die dickere Unterseite eines Eis ist nahezu wie ein Halbkreis geformt. Der spitzere Oberteil hingegen könnte von einer Ellipse stammen. Diese Beschreibung liefert uns schon eine erste Möglichkeit zur Konstruktion eines Eis. Wir zeichnen mit Bleistift eine Ellipse, radieren die Hälfte davon wieder weg und fügen an diese Stelle einen Halbkreis hinzu – siehe Zeichnung unten.

Ellipse zeichnen

Sie wissen sicher, wie man eine Ellipse konstruiert. Sie nehmen zwei Reißzwecken und stecken sie nebeneinander ins Papier (am besten zwei Pappen darunterlegen, damit die Tischplatte heil bleibt). Dann schneiden Sie sich ein Stück Faden

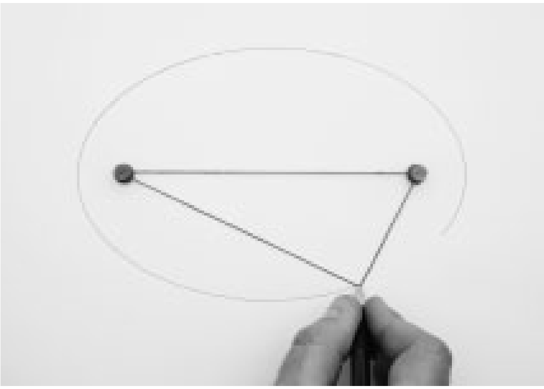


Aus Ellipse und Kreis entsteht ein Ei

von einer Rolle ab und verknoten die beiden Enden miteinander. Wenn Sie den Faden um die Reißzwecken legen, sollte nicht mehr allzu viel Spielraum sein, sonst ähnelt Ihre Ellipse zu sehr einem Kreis.

Dann nehmen Sie einen Stift und schieben damit den um die Reißzwecken geschwungenen Faden so weit nach oben, bis der geschlossene Faden ein Dreieck bildet. Nun brauchen Sie den Stift nur vorsichtig eine Runde um die beiden Reißzwecken zu bewegen und dabei aufzudrücken. Achten Sie darauf, dass der Faden stets straff gespannt ist. Wenn Sie eine Runde gemacht haben, ist die Ellipse fertig. Diese Methode heißt übrigens Gärtnerkonstruktion, weil Gärtner sie in der Renaissance nutzten, um Beete in elliptischer Form anzulegen.

Eine Ellipse zeichnet sich dadurch aus, dass für jeden Punkt auf ihr gilt: Die Summe des Abstandes zu den beiden Brennpunkten – diese sind identisch mit den Einstichstellen der Reißzwecken – ist konstant. Das zu beweisen, ist nicht schwer – es ergibt sich automatisch aus unserer Konstruktionstechnik, denn die Länge des Fadens ändert sich nicht.



© Oliver Mann

Gärtnerkonstruktion der Ellipse