LEHRBUCH

Thomas Rießinger

Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure

Mit durchgerechneten und erklärten Lösungen

6. Auflage

Springer Vieweg

LEHRBUCH

Thomas Rießinger

Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure

Mit durchgerechneten und erklärten Lösungen

6. Auflage

Springer Vieweg

Springer-Lehrbuch

Thomas Rießinger

Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure

Mit durchgerechneten und erklärten Lösungen

6., korrigierte Auflage

Springer Vieweg

Thomas Rießinger
Bensheim, Deutschland

ISBN 978-3-642-36920-9 ISBN 978-3-642-36921-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-36921-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-vieweg.de

Vorwort zur 6. Auflage

Manches hat sich geändert in den letzten Jahren, und auch die Hochschulen wurden von Änderungen nicht verschont: Während Sie früher nach dem Abschluss eines Ingenieurstudiums in der Regel mit einem Diplom belohnt wurden, erhalten Sie heute einen Bachelor- oder einen Mastergrad. Aber das Schöne ist, dass manche Dinge eben doch konstant bleiben. Denn egal, ob Bachelor oder Diplom, Sie werden auf jeden Fall ein wenig Mathematik lernen und üben müssen, und genau dabei soll Ihnen nach wie vor dieses Buch helfen. Und schon ist alles gesagt außer: Viel Vergnügen bei der Arbeit!

Bensheim, November 2012 Thomas Rießinger

Vorwort zur 4. Auflage

An der Notwendigkeit, Mathematik nicht nur theoretisch zu verstehen, sondern auch praktisch zu üben, hat sich nichts geändert. Auch in der dritten Auflage dieses Übungsbuchs möchte ich Ihnen die Gelegenheit geben, einerseits selbst Aufgaben zu rechnen, andererseits aber bei Schwierigkeiten genau erklärte Lösungswege zur Verfügung zu haben und damit Ihre Probleme zu lösen. Beim Rechnen und beim Studieren der Lösungen wünsche ich Ihnen viel Erfolg und hoffentlich auch ein wenig Vergnügen.

Januar 2008 Thomas Rießinger

Vorwort zur 1. und 2. Auflage

Vielleicht kennen Sie die Situation. Sie haben ein Lehrbuch über Mathematik gelesen oder eine Vorlesung über Mathematik gehört, glauben nun, die Sache im Großen und Ganzen verstanden zu haben, und wollen zur Übung die eine oder andere Beispielaufgabe rechnen. Kaum haben Sie aber fröhlich mit dem Rechnen angefangen, stellen Sie fest, daß Sie nicht so recht wissen, wie es nun weitergehen soll. Oder – was fast noch unangenehmer ist – Sie rechnen tatsächlich ein Ergebnis aus und vergleichen es mit der angegebenen Lösung, doch leider können Sie sich mit Ihrem Dozenten oder dem Autor Ihres Lehrbuchs nicht auf einen gemeinsamen Wert einigen. Das ist besonders unangenehm, wenn in einem Buch zwar die Aufgabenstellung ausführlich beschrieben ist, aber im Lösungsteil dann kurz und schmerzlos so etwas wie „$x = 17$“ als Lösung mitgeteilt wird, so dass man sich verzweifelt fragt, wie um alles in der Welt der Autor wohl darauf gekommen sein mag.

Dummerweise kann man es in einem Lehrbuch kaum anders machen. Wenn Sie sich einmal ein sechshundert Seiten dickes Buch vorstellen, zu dem noch zwei- oder dreihundert Seiten Lösungsteil dazukommen, dann sollten Sie sich an das Telefonbuch von New York oder einen Aktenordner mit Steuergesetzen erinnert fühlen, und wer will so etwas schon lesen? Der Umfang eines Lehrbuchs sollte in einem vernünftigen Rahmen bleiben, damit man es auch wirklich problemlos handhaben kann. Nun habe ich aber vor einiger Zeit ein Lehrbuch mit dem Titel „Mathematik für Ingenieure“ herausgebracht, das an dem gleichen Problem leidet: natürlich gibt es darin Übungsaufgaben, aber im Lösungsteil muss sich der geplagte Leser mit den puren Ergebnissen zufrieden geben, ohne Angabe des Lösungsweges. Und selbst wenn ich von meinem eigenen Lehrbuch absehe, schien es mir auf jeden Fall sinnvoll zu sein, dass man eine Sammlung von Aufgaben zur Verfügung hat, deren Lösungswege detailliert und in aller Ausführlichkeit durchgerechnet werden, so dass Sie genau verfolgen können, wie man an bestimmte Aufgabentypen herangeht. Eine solche Aufgabensammlung haben Sie mit diesem Buch in der Hand. Ich habe hier jede Aufgabe aus meinem Lehrbuch durchgerechnet und die Rechenwege mit ausführlichen Erklärungen versehen, denn oft genug steht man vor einer Formel und wüsste nur zu gern, wo sie wohl herkommen mag. Dass die Aufgaben aus meinem eigenen Lehrbuch stammen, heißt aber nicht, dass Sie erst das Lehrbuch lesen müssen, um mit der Aufgabensammlung etwas anfangen zu können: es geht hier nicht nur um das Durchrechnen von Lösungen, sondern ich habe mich bemüht, auch die prinzipiellen Methoden, die bei den Aufgaben angewendet werden, anhand der Beispiele zu erklären - natürlich nicht so umfassend wie in einem Lehrbuch, sonst wären wir nämlich wieder beim New Yorker Telefonbuch angelangt. Deshalb finden Sie auch in den ersten neun Kapiteln jeweils einige Aufgaben, die nicht im Lehrbuch stehen und vielleicht etwas schwieriger sind als die Aufgaben des Lehrbuchs.

Sie finden also im Folgenden 155 Übungsaufgaben aus den verschiedensten Bereichen der Mathematik, deren Lösungen vorgerechnet und erklärt werden. Um unnötiges Blättern zu vermeiden, habe ich die Lösung jeder Aufgabe direkt im Anschluß an die Aufgabe aufgeschrieben und keine Unterteilung in einen Aufgabenteil und einen Lösungsteil vorgenommen. Trotzdem empfehle ich natürlich, dass Sie die Aufgaben zuerst einmal selbst angehen und erst dann, sobald Sie erfolgreich oder auch weniger erfolgreich gerechnet haben, die Lösungen durchlesen.

Und damit genug der Ansprache; wir fangen an.

Frankfurt im Frühjahr 2004 Thomas Rießinger

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Zahlenarten

1.1 Es seien

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}, \ B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

und

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}.$$

Bestimmen Sie $A \cap B$, $A \cup B \cup C$, $A \backslash C$ und $B \backslash C$.

Lösung In Worte gefasst, ist A die Menge aller reellen Zahlen, die kleiner oder gleich Null sind, also die Menge aller negativen Zahlen, erweitert um die Null. B ist die Menge der reellen Zahlen, die größer als 1 sind, das heißt B enthält die 1 selbst nicht als Element, sondern nur die reellen Zahlen, die über der 1 liegen. Schließlich ist C die Menge aller reellen Zahlen, die zwar größer oder gleich Null sind, aber echt kleiner als 1. Die Menge C enthält also die Null und dazu alle reellen Zahlen, die größer als Null und gleichzeitig kleiner als 1 sind.

Die Mengenoperationen kann ich nun am besten ausführen, indem ich mich erst einmal ganz formal nach den Definitionen von Durchschnitt, Vereinigung und Differenz richte. Damit wird:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } x > 1\}.$$

Der Durchschnitt von A und B enthält also alle reellen Zahlen, die *sowohl* kleiner oder gleich Null *als auch* größer als 1 sind. Das kommt aber einigermaßen selten vor, denn eine Zahl, die echt größer als 1 ist, wird es nicht fertigbringen, gleichzeitig auch noch kleiner oder gleich Null zu sein. Daher ist:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } x > 1\} = \emptyset.$$

T. Rießinger, *Übungsaufgaben zur Mathematik für Ingenieure*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-36921-6_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Insgesamt ergibt sich also:

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ und } x \in B\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } x > 1\} = \emptyset.$$

Auf die gleiche Art kann ich alle anderen geforderten Verknüpfungen angehen. Mit $A \cup B \cup C$ ist die Vereinigung der drei gegebenen Mengen gemeint, also:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } x > 1 \text{ oder } 0 \leq x < 1\}. \end{aligned}$$

In dieser Vereinigungsmenge sind also alle reellen Zahlen versammelt, die mindestens eines der drei Kriterien erfüllen. Sie enthält also auf jeden Fall alle Zahlen, die kleiner oder gleich Null sind, also die negativen Zahlen und die Null. Sie enthält aber auch alle reellen Zahlen, die größer als 1 sind, also alle reellen Zahlen oberhalb der 1. Damit könnten bestenfalls die positiven Zahlen bis aufwärts zur 1 der Vereinigungsmenge entgehen, aber auch die werden fast vollständig von ihr erwischt, denn $A \cup B \cup C$ enthält natürlich zusätzlich noch die Zahlen, die gleichzeitg größer oder gleich Null und kleiner als 1 sind. Als letzte Lücke bleibt daher nur noch die Zahl 1, die weder in A noch in B noch in C als Element enthalten ist. Somit ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ oder } x \in B \text{ oder } x \in C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ oder } x > 1 \text{ oder } 0 \leq x < 1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Auch die Berechnung der beiden Differenzen erfolgt nach dem gleichen Schema. Zunächst ist

$$A \setminus C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ und } x \notin C\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } \textit{nicht } 0 \leq x < 1\}.$$

Das ist auf den ersten Blick eine etwas ungewöhnliche Schreibweise, denn für das zweite Kriterium der Menge $A \setminus C$ habe ich angegeben, welche Bedingung die Elemente *nicht* erfüllen dürfen: sie dürfen auf keinen Fall gleichzeitig größer oder gleich Null und kleiner als 1 sein. Das kann man aber leicht in eine positive Beschreibung umsetzen, denn offenbar gilt genau dann *nicht* $0 \leq x < 1$, wenn $x < 0$ oder $x \geq 1$ gilt. Daher ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } \textit{nicht } 0 \leq x < 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und: } x < 0 \text{ oder } x \geq 1\}.$$

Die Zahlen in $A \setminus C$ müssen also einerseits kleiner oder gleich Null sein und andererseits kleiner als Null oder aber größer oder gleich 1 sein. Das vereinfacht die Sachlage, denn eine Zahl, die kleiner oder gleich Null ist, kann nicht gleichzeitig größer oder gleich 1 sein. Damit wird:

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und: } x < 0 \text{ oder } x \geq 1\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } x < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}, \end{aligned}$$

denn jede reelle Zahl, die kleiner als Null ist, muss natürlich auch kleiner oder gleich Null sein. Insgesamt habe ich also erhalten:

$$\begin{aligned} A\backslash C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ und } x \notin C\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } \textit{nicht } 0 \leq x < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und: } x < 0 \text{ oder } x \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ und } x < 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}. \end{aligned}$$

Die zweite Differenz lautet $B\backslash C$ und ist besonders einfach zu bestimmen, weil ich hier eigentlich gar nichts tun muss. Laut Definition gilt:

$$B\backslash C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \text{ und } x \notin C\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ und } \textit{nicht } 0 \leq x < 1\}.$$

Das ist ausgesprochen praktisch, denn *keine* reelle Zahl, die echt größer als 1 ist, erfüllt gleichzeitig die Bedingung $0 \leq x < 1$. Ich brauche also aus der Menge B überhaupt kein Element zu entfernen, weil sie kein Element mit C gemeinsam hat. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} B\backslash C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \text{ und } x \notin C\} &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ und } \textit{nicht } 0 \leq x < 1\} \\ &= B. \end{aligned}$$

1.2 Es seien A und B Mengen. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(i) $A \cap A$;
(ii) $A \cup \varnothing$;
(iii) $A \cap (A \cup B)$;
(iv) $A \cap (B\backslash A)$.

Lösung

(i) Wenn man nichts über die zugrundeliegenden Mengen weiß, außer dass es eben Mengen sind, dann bleibt einem nichts anderes übrig, als sich streng an die Definitionen der entsprechenden Operationen zu halten und zu hoffen, dass sich dadurch irgendetwas vereinfachen wird. In diesem Fall ist das nicht weiter schwierig. Es gilt:

$$A \cap A = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in A\} = \{x \mid x \in A\} = A,$$

denn dass ein Element gleichzeitig in A und auch noch in A ist, kann nur bedeuten, dass es ganz schlicht Element der Menge A ist. Das stimmt auch mit dem Alltagsverstand überein: wenn man eine Menge mit sich selbst schneidet, dann bleibt die Menge so wie sie war.

(ii) Auch hier entstehen keine nennenswerte Probleme. Die leere Menge ist die Menge, die keinerlei Elemente enthält, und für die Vereinigung mit A bedeutet das:

$$A \cup \varnothing = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in \varnothing\} = \{x \mid x \in A\} = A,$$

denn in der leeren Menge gibt es nun einmal keine Elemente, und daher ist die Bedingung $x \in A$ oder $x \in \varnothing$ gleichbedeutend mit der einfacheren Bedingung $x \in A$.

(iii) Hier wird es schon ein wenig schwieriger, weil der vielleicht aufkommende erste Gedanke bei dieser Aufgabe in die Irre führt. Sie könnten nämlich auf die Idee kommen, dass der Ausdruck $A \cap (A \cup B)$ ein ausgezeichnetes Beispiel für eine Anwendung des Distributivgesetzes ist, das beschreibt, wie man auch bei Mengenoperationen Klammern „ausmultiplizieren" kann. Allgemein lautet es für drei beliebige Mengen K, M und N:

$$K \cap (M \cup N) = (K \cap M) \cup (K \cap N).$$

Das passt gut zu unserer Situation: offenbar muss ich nur $K = A$, $M = A$ und $N = B$ setzen und kann dann sofort loslegen. Das ergibt:

$$A \cap (A \cup B) = (A \cap A) \cup (A \cap B) = A \cup (A \cap B),$$

denn $A \cap A$ hatte ich schon in (i) berechnet. Nun sieht der neue Ausdruck zwar sicher etwas anders aus als der alte, aber wohl nicht sehr viel besser oder gar einfacher, und es soll ja um eine Vereinfachung der Ausdrücke gehen. Vielleicht kann aber das Distributivgesetz noch einmal helfen, denn es gibt ja nicht nur ein Distributivgesetz, sondern zwei, und möglicherweise nützt das folgende Gesetz etwas:

$$K \cup (M \cap N) = (K \cup M) \cap (K \cup N).$$

Für meinen Fall bedeutet das:

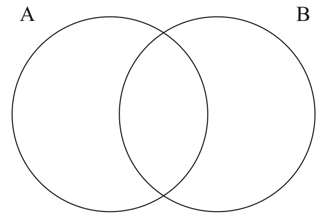
$$A \cup (A \cap B) = (A \cup A) \cap (A \cup B) = A \cap (A \cup B),$$

denn man kann sich schnell überlegen, dass $A \cup A = A$ gilt. Wie Sie feststellen werden, waren meine bisherigen Bemühungen nicht sehr erfolgreich, genau genommen habe ich mich nur einmal im Kreis gedreht und damit meinen Ausgangspunkt wieder erreicht. Sie können daran sehen, dass die sture Anwendung der Rechenregeln nicht immer weiterhilft, wenn man ein konkretes Problem zu lösen hat.

In diesem Fall hilft wieder nur die Besinnung auf die Definitionen der Mengenoperationen. Es gilt:

$$A \cap (A \cup B) = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in A \cup B\}.$$

Abb. 1.1 $A \cap (A \cup B) = A$



Wir haben es hier also mit den Elementen zu tun, die gleichzeitig in A und in $A \cup B$ liegen. Wenn man aber gleichzeitig in A und in $A \cup B$ liegt, muss man auf jeden Fall in A liegen. Liegt aber ein Element in der Menge A, dann liegt es natürlich auch in $A \cup B$ und damit auch in $A \cap (A \cup B)$. Deshalb ist

$$A \cap (A \cup B) = A.$$

Sie können sich diese Formel aber auch durch einen Blick auf Abb. 1.1 veranschaulichen: wenn sie erst A mit B vereinigen, ergibt sich natürlich die Vereinigung der beiden Ovale. Und wenn Sie diese Vereinigung dann wieder mit A schneiden, dann bleibt genau A selbst übrig.

(iv) Die Bestimmung von $A \cap (B \backslash A)$ ist recht einfach, weil am Ende ziemlich wenig übrigbleibt. Laut Definition gilt:

$$A \cap (B \backslash A) = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B \backslash A\}.$$

Nun kann aber ein Element schwerlich gleichzeitig in A und auch noch in $B \backslash A$ sein, denn in $B \backslash A$ finden sich genau die Elemente, die zwar in B, aber nicht in A liegen. Daher ist die Schnittmenge von A und $B \backslash A$ leer, und das heißt:

$$A \cap (B \backslash A) = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B \backslash A\} = \emptyset.$$

1.3 Veranschaulichen Sie das Distributivgesetz

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Lösung Eine Regel für den Umgang mit Mengen kann man am besten veranschaulichen, indem man die Mengen als Diagramme aufzeichnet, und am einfachsten sind dabei Kreise oder Ovale auf dem Papier. In Abb. 1.2 sehen Sie auf der linken Seite drei Ovale, die die Mengen A, B und C darstellen sollen. Sie sind so gezeichnet, dass jede Menge jede andere Menge schneidet und außerdem ein Bereich existiert, den alle drei Mengen gemeinsam haben. Nun muss ich $B \cap C$ in dieser Graphik markieren, aber $B \cap C$ besteht aus genau den Elementen, die gleichzeitig in B und in C sind, und in dieser Graphik sind das die hellgrau