

Hans-Jochen Bartsch

Limitierte
Sonderedition
inkl. extra
Serviceteil

Taschenbuch
Mathematischer Formeln
für Ingenieurinnen und
Naturwissenschaftlerinnen



22., neu bearbeitete Auflage



HANSER

„Ohne Frauen fehlt der Technik was!“
Prof. Dr.-Ing. Moniko Greif

Liebe Leserin,

schön, dass Sie dieses Taschenbuch in die Hand genommen haben. Das gibt uns die Gelegenheit, Ihnen etwas zum Anliegen dieses Buches zu sagen.

Interessant wäre außerdem zu erfahren, was Ihre Aufmerksamkeit mehr erregt hat, – der Buchtitel oder eher das ungewöhnliche Cover?

Eine Formelsammlung für Ingenieurinnen und Naturwissenschaftlerinnen? – Wofür ist das gut, haben Sie sich wohl gefragt? Gibt es seit Neuestem etwa spezielle „weibliche“ Formeln? Das wohl eher nicht.

Wir können Ihnen versichern, die vorliegende Ausgabe enthält die gleichen mathematischen Formeln, Regeln und Gesetze wie die Standardausgabe. Leider sind Frauen in Technikfächern immer noch in der Minderheit. Deshalb wollen wir Sie mit einem zusätzlichen Serviceteil speziell für Frauen und den darin enthaltenen Informationen, Tipps und Webseiten unterstützen.

Stöbern Sie darin! – Recherchieren Sie die Fülle der Stipendienangebote, bestimmt ist etwas für Sie dabei. Verfolgen Sie die Internetadressen, um gezielt Frauen in gleichen Studiengängen und Berufen zu finden. Hinter zunächst anonymen Adressen stehen viele engagierte Personen, Frauen als auch Männer, die gerne ihre Erfahrungen und ihr Wissen sowie Unterstützung anbieten. Davon können Sie profitieren, heute und auch in Zukunft. Nutzen Sie Adressen von Verbänden und Gruppierungen zum Aufbau Ihres ganz persönlichen Netzwerks.

Wir wünschen Ihnen ein erfolgreiches Studium!

Leipzig, im Sommer 2011

Der Verlag

1	Logik, Mengen, Zahlensysteme	21
2	Arithmetik	46
3	Algebra (Gleichungen)	91
4	Elementare (klassische) Geometrie	129
5	Lineare Algebra	173
6	Vektoren, Analytische Geometrie	249
7	Funktionen	340
8	Differenzialrechnung	421
9	Integralrechnung	467
10	Vektoranalysis	512
11	Differenzialgleichungen	536
12	Reihen, F- und L-Transformation	595
13	Statistik, Stochastik	643
14	Integraltabellen	719
A	Anhang	772
S	Sachwortverzeichnis	783
	Serviceteil	833

Bartsch
Taschenbuch mathematischer Formeln
für Ingenieurinnen und Naturwissenschaftlerinnen

Taschenbuch mathematischer Formeln für Ingenieurinnen und Naturwissenschaftlerinnen

von

Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

unter Mitwirkung von Michael Sachs

22., neu bearbeitete Auflage

Mit über 500 Bildern, zahlreichen Beispielen
und umfassenden Integraltabellen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autor

Dr.-Ing. Hans-Jochen Bartsch

Bearbeiter

Prof. Dr. Michael Sachs

Hochschule München

Fakultät für Feinwerk- und Mikrotechnik, Physikalische Technik

www.hm.edu/fb06

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-42910-9

E-Book-ISBN 978-3-446-43025-9

Einbandbild: shoe „Diana“ © by Kerrie Luft

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

© 2011 Carl Hanser Verlag München

www.hanser.de/taschenbuecher

Lektorat: Christine Fritsch

Herstellung: Katrin Wulst

Satz: Satzherstellung Dr. Naake, Brand-Erbisdorf

Coverrealisierung: Stephan Rönigk

Druck und Binden: Kösel, Krugzell

Printed in Germany

Vorwort

Das *Taschenbuch Mathematischer Formeln* wendet sich vornehmlich an Studierende von Ingenieurstudiengängen an Hochschulen für Angewandte Wissenschaften (ehemals Fachhochschulen), aber auch Studierenden an Universitäten wird das Taschenbuch ein nützliches Hilfsmittel zur Bewältigung des Mathematikstoffes eines technischen oder naturwissenschaftlichen Studiums sein.

Seit über 50 Jahren ist dieses Buch auf dem Markt und seither Generationen von Studierenden und Anwendern der Mathematik ein Begriff geworden. Im Januar 2008 ist der Verfasser, Dr.-Ing. Hans-Jochen BARTSCH, nachdem er noch die 21. Auflage besorgt hatte, am Beginn der Vorbereitungen zur 22. Auflage verstorben. Gerne habe ich die mir vom Fachbuchverlag Leipzig angebotene Aufgabe, das Werk zu bearbeiten und weiterzuführen, wahrgenommen. So lege ich nun der Öffentlichkeit die 22., neu bearbeitete Auflage des *Bartsch* vor.

Zunächst wurde das gesamte Werk neu erfasst. Hier gilt mein Dank den Erfasserinnen und Erfassern Arvid EICHHOLZ, Carina HÜBNER, Sascha LANGE, Stefanie LOWSKI, Dr. Monika NOACK, Andrea PLOCKE, Sandra SCHNEIDER und Alexander UNGER von der Humboldt-Universität zu Berlin, die mit großem Sachverstand und Akribie dieses formal schwierige Werk mit dem modernen Textsatzprogramm \LaTeX gesetzt und es so EDV-technisch für die Zukunft „fit“ gemacht haben.

Kapitel 1 und 2 habe ich nach hinterlassenen Skizzen des Autors überarbeitet, Kapitel 13 völlig neu geschrieben. Der grundlegende Aufbau in Beschreibende Statistik, Stochastik und Schließende Statistik ist dabei gleich geblieben, besondere Sorgfalt habe ich auf den logischen Aufbau, auf die axiomatische Herleitung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und die Beschreibung und Anwendung der wichtigsten Verteilungen gelegt.

Das *Sachwortverzeichnis* wurde bewusst redundant und sehr umfangreich gestaltet, um dem Leser die Möglichkeit eines raschen Quereinstiegs zu einem gewählten Thema oder Begriff zu gewähren. Wohl kaum jemand wird so ein Buch linear von vorne nach hinten durchlesen. Das Sachwortverzeichnis soll daher auch zum „Stöbern“ und Diagonallesen einladen und Interesse an der Materie erwecken.

Zahlreiche *Beispiele*, eingeleitet und beendet mit \blacklozenge , zeigen die abstrakten mathematischen Formeln in ihrer Anwendung, wobei Wert gelegt wurde

auf Einfachheit der Rechnung, um das Verständnis der Grundsätze nicht zu erschweren.

Kapitel 14 enthält *Integraltabellen* mit fast 600 unbestimmten und bestimmten Integralen. Eine zusätzliche Übersicht am Kapitelanfang ermöglicht einen raschen Zugriff auf das gesuchte Integral. Ein *Daumenregister* erleichtert das Auffinden der einzelnen Kapitel.

Dem Wesen einer Formelsammlung gemäß kann und will das Buch kein Lehrbuch ersetzen, schon gar nicht in der Mathematik, wo die Herleitung neuen Wissens aus bereits vorhandenem nach den strengen Regeln des logischen Schließens oberstes Gebot ist. In diesem Buch sind Herleitungen nur in Ausnahmefällen angedeutet, es soll in erster Linie ein Nachschlagewerk für Studierende technischer Fachrichtungen sein. Gleichwohl ist die Stofffülle so in Kapitel gegliedert und sind diese Kapitel so aufgebaut, dass sie auch einzeln zur Wiederholung eines schon einmal gelernten Stoffes gelesen werden können.

Manche Irrtümer aus der vorangegangenen Auflage habe ich korrigiert, hier danke ich besonders Herrn Prof. Dr. Ulrich TIPP, Hochschule Niederrhein, für viele wertvolle Hinweise. Trotz sorgfältiger Prüfung kann aber bei einem Werk von solchem Umfang völlige Irrtumsfreiheit nie garantiert werden. Der Verlag und ich nehmen deshalb weitere Hinweise, die zur stetigen Verbesserung und Aktualisierung dieses Buches beitragen, jederzeit gerne entgegen.

Mein besonderer Dank gilt den Mitarbeiterinnen des Fachbuchverlags Leipzig, Frau Christine FRITZSCH und Frau Katrin WULST, die unermüdlich und sorgfältig korrekturgelesen haben, für die stets angenehme Zusammenarbeit, sowie Herrn Dr. Steffen NAAKE für den Umbruch der Endfassung.

Möge der *Bartsch* auch nach dem Tode seines Verfassers weiterhin ein treuer und zuverlässiger Begleiter in Studium und Beruf bleiben.

München, im Juni 2011

Michael Sachs
Bearbeiter

Inhaltsverzeichnis

1	Logik, Mengen, Zahlensysteme	21
1.1	Aussagenlogik	21
1.1.1	Allgemeines	21
1.1.2	Ein- und zweistellige BOOLEsche Funktionen	23
1.1.3	BOOLEsche Algebra	25
1.1.4	Normalformen	27
1.2	Prädikatenlogik	29
1.3	Mengen	30
1.3.1	Allgemeines	30
1.3.2	Mengenoperationen	33
1.3.3	Beziehungen, Gesetze, Rechenregeln	35
1.3.4	Relationen	36
1.3.5	Intervalle	38
1.3.6	Unschärfe Mengen	38
1.4	Zahlensysteme	40
1.4.1	Polyadische Zahlensysteme	40
1.4.2	Römisches Zahlensystem	45
2	Arithmetik	46
2.1	Menge der reellen Zahlen	46
2.1.1	Standard-Zahlenmengen	46
2.1.2	Grundoperationen an reellen Zahlen	48
2.1.2.1	Die vier Grundrechenarten	48
2.1.2.2	Proportionen, Verhältnisgleichungen	52
2.1.2.3	Prozentrechnung	53
2.1.2.4	Näherung	54
2.1.2.5	Fehlerrechnung	55
2.1.2.6	Betrag und Signum	56
2.1.2.7	Summen- und Produktzeichen	57
2.1.3	Potenzen und Wurzeln	59
2.1.4	Logarithmen	61
2.1.5	Fakultät und Binomialkoeffizient	63
2.2	Menge der komplexen Zahlen	66
2.2.1	Grundbegriffe	66
2.2.2	Darstellungsformen komplexer Zahlen	69
2.2.3	Grundrechenarten mit komplexen Zahlen	70
2.2.4	Potenzen und Wurzeln komplexer Zahlen	71
2.2.5	Natürliche Logarithmen komplexer Zahlen	73
2.3	Kombinatorik	74
2.3.1	Permutationen	74

2.3.2	Variationen	76
2.3.3	Kombinationen	77
2.4	Folgen	79
2.4.1	Allgemeines	79
2.4.2	Schranken, Grenzen, Grenzwert einer Folge	80
2.4.3	Arithmetische und geometrische Folgen	83
2.4.4	Finanzmathematik	86
2.4.4.1	Zinsrechnung	86
2.4.4.2	Zinseszinsrechnung	87
2.4.4.3	Rentenrechnung	88
2.4.4.4	Schuldentilgung, Annuität	89
3	Algebra (Gleichungen)	91
3.1	Allgemeines	91
3.2	Lineare algebraische Gleichungen	95
3.2.1	Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen	95
3.2.2	Lineare Gleichungen/Ungleichungen mit mehreren Variablen	97
3.3	Nichtlineare Gleichungen	100
3.3.1	Nichtlineare algebraische Gleichungen	101
3.3.1.1	Quadratische Gleichungen/Ungleichungen mit einer Variablen	101
3.3.1.2	Quadratisches Gleichungssystem mit zwei Variablen	102
3.3.1.3	Kubische Gleichungen	104
3.3.1.4	Gleichungen 4. Grades	105
3.3.1.5	Symmetrische Gleichungen	106
3.3.1.6	Algebraische Gleichungen n -ten Grades	107
3.3.1.7	HORNER-Schema	108
3.3.1.8	Wurzelgleichungen mit einer Variablen	110
3.3.2	Transzendente Gleichungen	111
3.3.2.1	Exponentialgleichungen	111
3.3.2.2	Logarithmische Gleichungen	111
3.3.2.3	Goniometrische Gleichungen	112
3.3.2.4	Betragsgleichungen, Betragsungleichungen	113
3.4	Numerische Verfahren	114
3.4.1	Verfahren von MULLER für Polynome	114
3.4.2	Fixpunktiteration	117
3.4.3	NEWTONSches (Tangenten-)Näherungsverfahren	119
3.4.4	Sekantenmethode (Regula falsi)	121
3.4.5	Einschlussverfahren	122
3.5	Nichtlineare Gleichungssysteme	124
3.5.1	Allgemeines	124

3.5.2	Iterationsverfahren	125
3.5.3	Quadratisch konvergentes NEWTON-Verfahren	126
3.6	Grafische Lösung von Gleichungen	127
4	Elementare (klassische) Geometrie	129
4.1	Planimetrie, ebene Trigonometrie	129
4.1.1	Winkel	129
4.1.2	Teilungen, Ähnlichkeit, Kongruenz, Symmetrie	131
4.1.3	Dreieck	134
4.1.3.1	Schiefwinkliges Dreieck	135
4.1.3.2	Gleichschenkliges und gleichseitiges Dreieck	140
4.1.3.3	Rechtwinkliges Dreieck	141
4.1.4	Vierecke	143
4.1.4.1	Trapez	143
4.1.4.2	Parallelogramme	144
4.1.4.3	Unregelmäßige Vierecke mit Umkreis bzw. Inkreis	145
4.1.5	Vielecke (Polygone)	146
4.1.5.1	Ebene sternförmige n -Ecke	146
4.1.5.2	Regelmäßige (reguläre) Vielecke	146
4.1.5.3	Einige bestimmte regelmäßige Vielecke	147
4.1.5.4	Konstruktion der einfachen regelmäßigen Vielecke	148
4.1.6	Der Kreis	149
4.1.6.1	Sätze zum Kreis	149
4.1.6.2	Kreisberechnungen	150
4.2	Geometrische Körper (Stereometrie)	152
4.2.1	Allgemeines	152
4.2.2	Ebenflächig begrenzte Körper (Polyeder, Vielfache)	154
4.2.2.1	Prismatische Körper	154
4.2.2.2	Pyramide, Pyramidenstumpf	155
4.2.2.3	Prismoid	156
4.2.2.4	Die fünf regelmäßigen Polyeder	157
4.2.3	Krummflächig begrenzte Körper	159
4.2.3.1	Zylinder, Zylinderabschnitt	159
4.2.3.2	Kegel, Kegelstumpf	160
4.2.3.3	Kugel	161
4.2.3.4	Tonne, Torus	163
4.2.3.5	Fraktale Geometrie	163
4.3	Sphärische Trigonometrie	165
4.3.1	Allgemeines	165
4.3.2	Rechtwinkliges sphärisches Dreieck	166
4.3.3	Schiefwinkliges sphärisches Dreieck	167

4.3.4	Berechnung sphärischer Dreiecke	169
4.3.5	Mathematische Geografie	170
5	Lineare Algebra	173
5.1	Vektorraum	173
5.2	Matrizen	177
5.2.1	Matrizenarten, Definitionen	177
5.2.1.1	Allgemeines	177
5.2.1.2	Quadratische Matrizen	179
5.2.1.3	Inverse Matrix, (Um)kehrmatrix \mathbf{A}^{-1}	185
5.2.1.4	Rang einer Matrix	186
5.2.1.5	Matrizennormen	187
5.2.1.6	Grenzwert, Differenzialquotient, Integral	188
5.2.2	Matrizengesetze	188
5.2.2.1	Gleichheit und Summe zweier Matrizen	188
5.2.2.2	Multiplikation von Matrizen	188
5.2.3	Matrizengleichungen	191
5.2.4	Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen	192
5.2.5	Numerische Verfahren	195
5.2.5.1	HOUSEHOLDER-Orthogonalisierung (-Transformation)	195
5.2.5.2	QR-Verfahren	196
5.2.5.3	Vektoriteration (Potenzmethode, v.-MISES-Verfahren)	197
5.3	Determinanten	198
5.3.1	Determinante einer quadratischen Matrix	198
5.3.2	Berechnung von Determinanten	199
5.3.3	Rechenregeln für Determinanten	201
5.3.4	Praktische Berechnung einer Determinante	202
5.4	Lineare Gleichungssysteme	203
5.4.1	Allgemeines	203
5.4.2	Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme	204
5.4.3	Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme	206
5.4.3.1	Einfacher und verketteter GAUSSscher Algorithmus	207
5.4.3.2	GAUSSscher Algorithmus für Systeme mit gleicher Matrix \mathbf{A} und m rechten Seiten	211
5.4.3.3	GAUSS-JORDAN-Verfahren zur Matrixinversion	212
5.4.3.4	GAUSSscher Algorithmus für symmetrische, positiv definite Koeffizientenmatrix, CHOLESKY-Verfahren	213
5.4.3.5	Gleichungssysteme mit symmetrischer, tridiagonaler, positiv definiter Matrix	214

	5.4.3.6	GAUSS-SEIDELsches Iterationsverfahren	214
	5.4.3.7	Austauschverfahren	218
	5.4.4	CRAMERSche Regel	218
	5.4.5	Überbestimmte lineare Gleichungssysteme	219
5.5		Lineare Optimierung	221
	5.5.1	Allgemeines	221
	5.5.2	Grafische Lösung für zwei Variable	223
	5.5.3	Simplexalgorithmus	224
5.6		Abbildungen	228
	5.6.1	Lineare Abbildungen	228
	5.6.2	Affine Abbildungen	231
		5.6.2.1 Allgemeines	231
		5.6.2.2 Allgemeine, nicht winkeltreue affine Abbildungen	236
		5.6.2.3 Ähnlichkeitsabbildungen	239
		5.6.2.4 Kongruenzabbildungen	240
5.7		Koordinatentransformation	243
	5.7.1	Allgemeines	243
	5.7.2	Orthogonale Koordinatentransformation in der Ebene	244
	5.7.3	Orthogonale Koordinatentransformation im Raum	245
6		Vektoren, Analytische Geometrie	249
	6.1	Vektoren, Grundlagen	249
	6.2	Vektoralgebra	254
		6.2.1 Addition und Subtraktion von Vektoren	254
		6.2.2 Multiplikation von Vektoren	256
		6.2.2.1 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	256
		6.2.2.2 Skalarprodukt (inneres Produkt, Punktprodukt)	256
		6.2.2.3 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	258
		6.2.2.4 Mehrfache Produkte von Vektoren	260
	6.3	Koordinatensysteme	261
		6.3.1 Allgemeines	261
		6.3.2 Ebene (2D-)Koordinatensysteme	262
		6.3.3 Räumliche (3D-)Koordinatensysteme	263
	6.4	Punkte, Kurven 1. Ordnung	266
		6.4.1 Punkte	266
		6.4.2 Gerade, Strahl, Strecke	267
		6.4.2.1 Punktmengen, Teilung einer Strecke	267
		6.4.2.2 Gleichungen einer Geraden in der (x, y) -Ebene	269
		6.4.2.3 Gleichungen einer Geraden im Raum	271
		6.4.2.4 Abstand eines Punktes von einer Geraden	274
		6.4.3 Mehrere Geraden	275
		6.4.3.1 Schnittpunkt zweier Geraden	275
		6.4.3.2 Schnittwinkel zweier Geraden	277

	6.4.3.3	Abstand zweier Geraden	279
	6.4.3.4	Drei und mehr Geraden	280
6.5	Ebenen		281
	6.5.1	Eine Ebene	281
	6.5.1.1	Gleichungen einer Ebene im Raum	281
	6.5.1.2	Richtungskosinus der Normalen einer Ebene	285
	6.5.1.3	Abstand eines Punktes P_1 von einer Ebene	286
	6.5.1.4	Durchstoßpunkt D einer Geraden durch eine Ebene	287
	6.5.1.5	Winkel φ zwischen Gerade und Ebene	288
	6.5.2	Zwei Ebenen	289
	6.5.3	Drei und mehr Ebenen	290
	6.5.4	Flächeninhalt, Schwerpunkt, Volumen	290
6.6	Kurven 2. Ordnung (Kegelschnitte)		292
	6.6.1	Allgemeines	292
	6.6.2	Kreis	294
	6.6.2.1	Gleichungen des Kreises	294
	6.6.2.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kreis	296
	6.6.2.3	Tangente und Normale eines Kreises	297
	6.6.2.4	Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis	297
	6.6.2.5	Potenz p eines Punktes in Bezug auf einen Kreis	298
	6.6.2.6	Kreisbüschel	299
	6.6.3	Ellipse	299
	6.6.3.1	Gleichungen der Ellipse	299
	6.6.3.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse	301
	6.6.3.3	Tangente, Normale und Durchmesser einer Ellipse	302
	6.6.3.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Ellipse	303
	6.6.3.5	Krümmung einer Ellipse	303
	6.6.3.6	Haupt- und Nebenkreis einer Ellipse	304
	6.6.3.7	Flächeninhalt und Umfang von Ellipse, Ellipsensegment und Ellipsensektor	304
	6.6.3.8	Ellipsenkonstruktionen	305
	6.6.4	Parabel	307
	6.6.4.1	Gleichungen der Parabel	307
	6.6.4.2	Schnittpunkte einer Geraden mit einer Parabel	309
	6.6.4.3	Tangente und Normale einer Parabel	310
	6.6.4.4	Polare eines Punktes in Bezug auf eine Parabel	310
	6.6.4.5	Krümmung einer Parabel	311
	6.6.4.6	Parabelsegment, Parabelbogen, Brennstrahl	311
	6.6.4.7	Parabelkonstruktionen	312
	6.6.5	Hyperbel	313
	6.6.5.1	Gleichungen der Hyperbel	314