Zeichen und Abkürzungen

Zeichen / Abkürzungen für spezielle Mengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (einschließlich Null)
$\mathbb{N}^*$	Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich Null
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^{>3}$	Menge der rationalen Zahlen, die größer als 3 sind
$\mathbb{Q}_+$	Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_-$	Menge der negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\emptyset$, { }	leere Menge
G	Grundmenge
D	Definitionsmenge
L	Lösungsmenge
W	Wertemenge

Schreibweisen bei Mengen

$A = \{2; 3; 5; 7\}$	aufzählende Schreibweise einer Menge
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 101\}$ $= \{x \mid x < 101\}_{\mathbb{N}}$	beschreibende Darstellungen einer Menge
$3 \in A$	3 ist Element von A
$101 \notin B$	101 ist nicht Element von B

Relationen zwischen Mengen

$M = N$	M gleich N (M und N haben dieselben Elemente)
$M \subseteq N$	M ist Teilmenge von N
$M \supseteq N$	M ist Obermenge von N
$M \nsubseteq N$	M ist nicht Teilmenge von N

Verknüpfungen von Mengen

$M \cup N$	Vereinigungsmenge von M und N
$M \cap N$	Schnittmenge von M und N
$M \setminus N$	Restmenge M ohne N
$\bar{N}$	Komplement von N bezüglich M, falls $N \subseteq M$ ($\bar{N} = M \setminus N$)
$M \times N$	Produktmenge von M und N

Logische Zeichen

$\wedge$	und (Konjunktor)
$\vee$	oder (Adjunktor/Disjunktor)
$\rightarrow$	wenn … so … (Subjunktor)
$\leftrightarrow$	… genau dann, wenn … (Bijunktor)
$\neg$	nicht (Negator)
$\Rightarrow$	aus … folgt … (Folgerungspfeil)
$\Leftrightarrow$	… äquivalent zu … (Äquivalenzpfeil, Äquivalentor)
$\underset{(D)}{\Leftrightarrow}$	… äquivalent (bezüglich D) zu …
$\not\Leftrightarrow$	… nicht äquivalent zu …

Relationen zwischen Zahlen bzw. Größen

$a = b$	a gleich b
$a \neq b$	a ungleich b
$a < b$	a kleiner als b
$a > b$	a größer als b
$a \leqq b$	a kleiner oder gleich b
$a \geqq b$	a größer oder gleich b
$a \approx b$	a ungefähr gleich b
$a \triangleq b$	a entspricht b

Weitere Zeichen und Abkürzungen

$\lvert x \rvert$	Betrag von x
$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$	zweireihige Determinante
$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$	dreireihige Determinante
: oder $\boxed{\div}$	dividiert durch
e = 2,7182818 …	Euler'sche Zahl e (Basis der natürlichen Logarithmen)
$f: x \mapsto f(x), x \in D$	Funktion
$y = f(x)$	Funktionsgleichung
$f(x)$	Funktionsterm
$x \mapsto f(x)$	Funktionsvorschrift
$f(2)$	Funktionswert an der Stelle 2
67° 30′	… Grad … Minuten (Altgrad)
HN	Hauptnenner
i	imaginäre Einheit
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b (a und b eingeschlossen)
$]a; b[$	offenes Intervall von a bis b (a und b ausgeschlossen)
$\log_b(a)$	Logarithmus von a zur Basis b
lg	dekadischer Logarithmus (Basis 10)
ln	natürlicher Logarithmus (Basis e)
· oder $\boxed{\times}$	mal
–	minus
$(2 \mid 3)$	geordnetes Zahlenpaar; Punkt mit der Abszisse 2 und der Ordinate 3
$y \sim x$	y proportional x
π = 3,1415926 …	Pi (Kreiszahl)
+	plus
a^b	Potenz mit der Basis a und dem Exponenten b
$\overline{AB}$	Strecke
TR	Taschenrechner
$(4 \mid 2 \mid 3)$	geordnetes Zahlentripel
f^u	Umkehrfunktion zu f
R^u	Umkehrrelation zu R
∞	unendlich
$-\infty$	minus unendlich
$a : b$	Verhältnis a zu b
$\sqrt{a}$	Quadratwurzel aus a
$\sqrt[n]{a}$	n-te Wurzel aus a
$\bar{z}$	die zu z konjugiert komplexe Zahl

2.2 Multiplikation und Division

Die **Multiplikation** ist wie die Addition und die Subtraktion eine innere Verknüpfung in $\mathbb{Q}$.
Für die Multiplikation gelten die folgenden Gesetze:

1. $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ (**Kommutativgesetz der Multiplikation**)
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (**Assoziativgesetz der Multiplikation**)

Veranschaulichung des Assoziativgesetzes der Multiplikation für $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$:

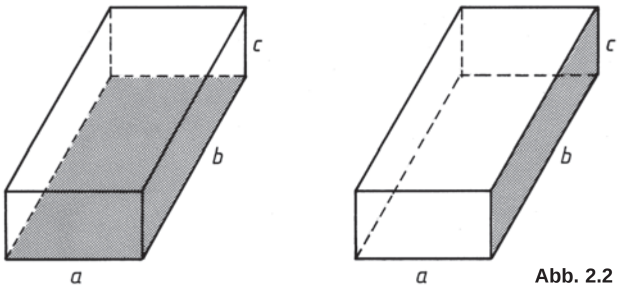

Abb. 2.2

Das Volumen eines Quaders lässt sich wie folgt berechnen:
V = Grundfläche · Höhe.
Dabei kann jede Fläche als Grundfläche gewählt werden.

$$V = \underbrace{(a \cdot b)}_{\text{Grundfläche}} \cdot \underbrace{c}_{\text{Höhe}} = \underbrace{a}_{\text{Höhe}} \cdot \underbrace{(b \cdot c)}_{\text{Grundfläche}}$$

Für die Multiplikation gelten ebenfalls das allgemeine Assoziativ- und das allgemeine Kommutativgesetz:

Bei der Multiplikation dürfen Klammern weggelassen werden.
Bei der Multiplikation darf die Reihenfolge der Faktoren vertauscht werden.

Für die **Multiplikation** gelten die folgenden **Rechenregeln**:

1. Das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv.
2. Das Produkt einer negativen und einer positiven Zahl ist negativ.
3. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv.
4. $1 \cdot a = a$; $(-1) \cdot a = -a$
5. $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$; $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$; $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Die **Division** lässt sich in der folgenden Weise auf die Multiplikation zurückführen ($b \neq 0$):

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

$\frac{1}{b}$ ist die Gegenzahl (das inverse Element) zu b bezüglich der Multiplikation. Statt „Gegenzahl zu b bezüglich der Multiplikation" sagt man auch, $\frac{1}{b}$ ist der **„Kehrwert von *b*"**. Z.B. ist $\frac{1}{3}$ der Kehrwert von 3.

Für das Bilden von **Kehrwerten** gelten die folgenden **Regeln**:

1. $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$

Abb. 2.3

(in Worten: der Kehrwert einer positiven Zahl ist positiv)

Beispiel: $3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} > 0$

2. $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$

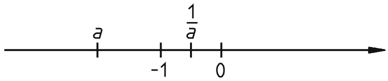

Abb. 2.4

Beispiel: $-2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} < 0$

3. $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

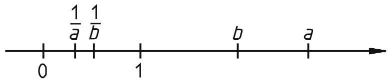

Abb. 2.5

Beispiel: $3 > 2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

4. $a < b < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

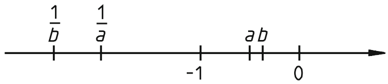

Abb. 2.6

Beispiel: $-5 < -4 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{5} > -\frac{1}{4}$

5. $a > 0 > b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

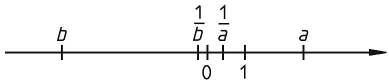

Abb. 2.7

Beispiel: $2 > 0 > -3 \Rightarrow \frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$

Die Division ist die Umkehroperation zur Mulitplikation:

$(a \cdot b) : b = a$ für alle $a \in \mathbb{Q}$ und alle $b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$.

Beachten Sie, dass für die Division weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz gilt.

Beispiele

$12 : 6 = \underline{2}$; aber $6 : 12 = \underline{0{,}5}$.

$(12 : 4) : 2 = 3 : 2 = \underline{1{,}5}$; aber $12 : (4 : 2) = 12 : 2 = \underline{6}$.

Außer den erwähnten Regeln für die Addition und die Multiplikation gelten noch die beiden sog. „Verteilungs-" oder **„Distributivgesetze"**:

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Veranschaulichung des ersten Distributivgesetzes für $a, b, c \in \mathbb{Q}_+$:

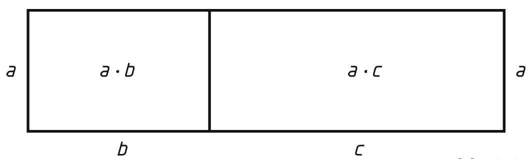

Abb. 2.8

Der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen a und $(b + c)$ beträgt $a \cdot (b + c)$. Dieser Flächeninhalt ergibt sich auch, wenn man die Flächeninhalte der beiden Rechtecke (mit den Seitenlängen a und b bzw. a und c) addiert: $a \cdot b + a \cdot c$.

Bei der Anwendung der beiden Distributivgesetze von links nach rechts spricht man auch von **„Ausmultiplizieren"**, bei der Anwendung von rechts nach links von **„Ausklammern"**.

Beispiele

$2 \cdot (b + c) = 2 \cdot b + 2 \cdot c$ (Ausmultiplizieren)

$5 \cdot x + 5 \cdot y = 5 \cdot (x + y)$ (Ausklammern)

Aus den Distributivgesetzen (und anderen bereits genannten Rechenregeln) ergeben sich weitere **Regeln für das „Rechnen mit Klammern"**:

1. $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Herleitung: $a \cdot (b - c) = a \cdot [b + (-c)] = a \cdot b + a \cdot (-c)$
$= a \cdot b + [-(a \cdot c)] = a \cdot b - a \cdot c$

6 Funktionen

6.1 Funktionen und Relationen

Bei einem Testfahrzeug wurde gemessen, wie hoch der Benzinverbrauch auf jeweils 100 km für verschiedene Geschwindigkeiten ist. Die Ergebnisse sind in einer Tabelle festgehalten.

Wertetabelle:

Geschwindigkeit in km/h	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Verbrauch in l/100 km	5,9	5,4	5,7	6,3	7,1	8,0	8,9	10,1	11,4	12,8

Lesen Sie: Bei einer gleich bleibenden Geschwindigkeit von 40 km/h hat das Testfahrzeug 5,9 l auf 100 km verbraucht.

Die Abhängigkeit zwischen Geschwindigkeit und Verbrauch des Fahrzeugs kann in einer graphischen Darstellung veranschaulicht werden.

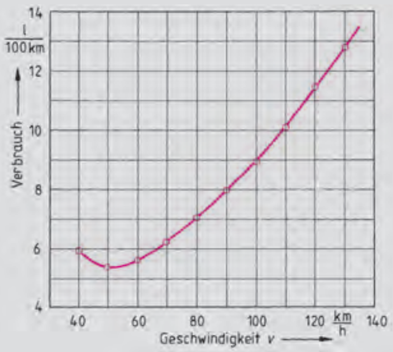

Abb. 6.1

Schaubild:

In waagerechter Richtung tragen wir die Geschwindigkeiten ein, senkrecht dazu den Verbrauch. Für jede der in der Tabelle angegebenen Messungen zeichnen wir einen Punkt. Die Punkte dürfen wir nicht einfach geradlinig verbinden; denn den Messungen ist nicht zu entnehmen, wie sich der Verbrauch zwischen den angegebenen Geschwindigkeiten ändert. Wir können es bestenfalls vermuten. Tatsächlich ergibt sich bei zahlreichen Einzelmessungen ungefähr die eingezeichnete Kurve, also keine geradlinige Verbindung zwischen den Punkten.

Solche Abhängigkeiten zwischen zwei Größen nennt man in der Mathematik **„Funktionen“**. Erhält man den funktionalen Zusammenhang aufgrund von Untersuchungen oder Messreihen, spricht man von **„empirischen“** Funktionen (Erfahrungsfunktionen). Funktionen lassen sich in nahezu allen Lebensbereichen feststellen, daher ist ihre genaue Untersuchung sehr wichtig.

Um Funktionen allgemein beschreiben oder darstellen zu können, bezeichnet man eine der beiden Größen gewöhnlich mit „*x*“, die andere mit „*y*“. Für die graphische Darstellung wird in der Mathematik meistens das **„kartesische Koordinatensystem“** gewählt: Auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Geraden (Achsen) trägt man in waagerechter Richtung die *x*-Werte, in dazu senkrechter Richtung die *y*-Werte ab. Die waagerechte Achse bezeichnet man daher meist als *x*-Achse (oder: „Abszissenachse“), die dazu senkrechte Achse als *y*-Achse (oder: „Ordinatenachse“), beide zusammen als Koordinatenachsen. (Manchmal spricht man auch von der 1. Achse und der 2. Achse.) Der Achsenschnittpunkt erhält die Bezeichnung „Ursprung“ des Koordinatensystems.

In dem Koordinatensystem wird jedem Zahlenpaar $(x \mid y)$ (wichtig: zuerst *x*, dann *y*!) eindeutig ein Punkt der Zeichenebene zugeordnet.

Beispiel

Für $x = 2$ und $y = 3$ finden wir den entsprechenden Punkt $P\ (2|3)$, indem wir vom Ursprung aus zuerst 2 Einheiten in (positiver) x-Richtung, dann 3 Einheiten in (positiver) y-Richtung gehen.

Die Zahl 2 wird die x-Koordinate (oder: Abszisse), die Zahl 3 die y-Koordinate (oder: Ordinate) des Punktes P genannt.

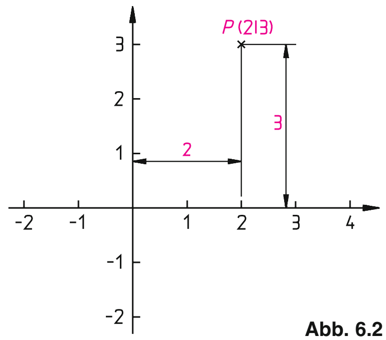

Abb. 6.2

Bemerkungen:

1. Beim kartesischen Koordinatensystem werden die Zahlen auf beiden Achsen vom Ursprung aus in gleichen Abständen abgetragen. Für besondere Zwecke verwendet man auch andere Einteilungen, z.B. auf einer Achse eine sog. „logarithmische“ Einteilung wie beim halb logarithmischen Papier (vgl. Abschnitt 11.3).
2. Bei Anwendungen haben wir es mit unterschiedlichen Größen zu tun, deren Maßzahlen wir in möglichst sinnvoller Weise auf den jeweiligen Achsen abtragen. In unserem eingangs beschriebenen Beispiel etwa sind auf der 1. Achse Geschwindigkeiten, auf der 2. Achse Verbrauchswerte abgetragen. Aus Gründen der Zweckmäßigkeit ist dabei ein Ausschnitt des Koordinatensystems gewählt worden, in dem der Ursprung gar nicht enthalten ist.
3. Ein Koordinatensystem wird auch als Bezugskanten bei der Bemaßung in Zeichnungen oder der Festlegung von Hydranten verwendet. In anderen technischen Bereichen werden auch andere Koordinaten benutzt, z.B. „Polarkoordinaten“ in der Luft- und Schifffahrt.

Durch ein kartesisches Koordinatensystem wird die Ebene in 4 sog. **„Quadranten“** eingeteilt, die man, von rechts oben anfangend, entgegen dem Uhrzeigersinn (im mathematisch positiven Sinne) beziffert.

Eine funktionale Abhängigkeit kann durch einzelne (Mess-)Werte oder auch durch eine für alle x geltende Vorschrift gegeben sein.

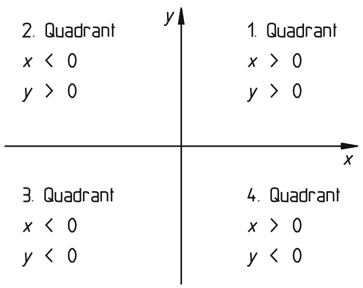

Abb. 6.3

Beispiel

Jeder Zahl wird ihre Hälfte zugeordnet (x $0{,}5x$, gesprochen: „x wird zugeordnet $0{,}5x$“, kürzer: „x Pfeil $0{,}5x$“); oder: y ist die Hälfte von x ($y = 0{,}5x$).

Zunächst tragen wir einige (einfache) Zahlen für x und ihre Funktionswerte y in eine Wertetabelle ein. Zu den erhaltenen Zahlenpaaren zeichnen wir dann die entsprechenden Punkte in ein Koordinatensystem.

Wertetabelle:

x	y	Zahlenpaar $(x\|y)$
0	0	(0|0)
1	0,5	(1|0,5)
2	1	(2|1)
3	1,5	(3|1,5)
4	2	(4|2)
– 1	– 0,5	(– 1|– 0,5)
– 2	– 1	(– 2|– 1)
– 3	– 1,5	(– 3|– 1,5)
– 4	– 2	(– 4|– 2)

Koordinatensystem (Schaubild):

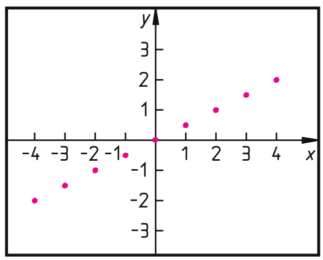

Abb. 6.4

6.2 Lineare Funktionen ($y = m\,x$)

1 m Rundstahl mit einem Durchmesser von 18 mm hat eine Masse von etwa 2 kg. Die Masse des Rundstahls soll als Funktion der Länge dargestellt werden.

Wir stellen zuerst eine Wertetabelle auf:

Länge in m	1	2	3	4	5	6	7	8
Masse in kg	2	4	6	8	10	12	14	16

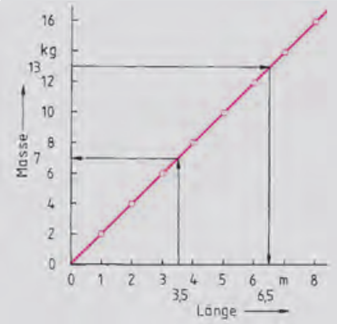

Abb. 6.21

Die entsprechenden Zahlenpaare werden als Punkte in ein Koordinatensystem eingetragen (auf der *x*-Achse die Längenmaße, auf der *y*-Achse die Massenmaße). Alle Punkte liegen auf einer Geraden. Das Verhältnis von Masse zu Länge ist immer gleich:

$$\frac{2\,\text{kg}}{1\,\text{m}} = \frac{4\,\text{kg}}{2\,\text{m}} = \frac{6\,\text{kg}}{3\,\text{m}} = \ldots = 2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}},$$

d.h. die Masse ist **proportional** zur Länge. Die Maßzahl der Masse ist dabei jeweils das Doppelte der Maßzahl der zugehörigen Länge. Daher können wir die Punkte geradlinig verbinden.

An dem gezeichneten Graphen können wir jetzt z.B. direkt ablesen (vgl. Abb. 6.21): Ein Stab von 3,5 m Länge besitzt eine Masse von 7 kg. Oder: Ein Stab mit der Masse 13 kg hat eine Länge von 6,5 m.

$\frac{y}{x} = \mathbf{m}^3$; Größe *y* proportional zu einer zweiten Größe *x*, so gilt:

m heißt auch **„Proportionalitätsfaktor"** $\left(\text{im obigen Beispiel ist } \mathbf{m} = 2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$.

Wir können schreiben:

$\boxed{y = m\,x}$ Funktionsgleichung einer Geraden, die durch den Ursprung verläuft (Ursprungsgerade).

Beispiel Zeichnen Sie den Graphen der Geraden mit der Funktionsgleichung $y = 1{,}2\,x$.

Zuerst stellen wir eine Wertetabelle auf, etwa in der folgenden Weise:

x	0	1	2	3	4	– 1	– 2	– 3	– 4
y	0	1,2	2,4	3,6	4,8	– 1,2	– 2,4	– 3,6	– 4,8

$$\frac{1{,}2}{1} = \frac{2{,}4}{2} = \frac{3{,}6}{3} = \ldots = 1{,}2;$$

also ist *y* proportional zu *x* mit dem Proportionalitätsfaktor 1,2. Alle Punkte $(x\,|\,y)$ des zugehörigen Graphen liegen auf einer Geraden durch den Ursprung. Daher würde es genügen, in der Wertetabelle nur zwei Punkte zu bestimmen; denn durch zwei verschiedene Punkte ist eine Gerade bereits eindeutig festgelegt. Der Einfachheit halber wählen wir die Punkte mit den *x*-Koordinaten 0 bzw. 1 (siehe Kasten in der Wertetabelle). (Zum sauberen Zeichnen einer Geraden ist es allerdings günstiger, zwei ihrer Punkte zu verbinden, die nicht so nahe beieinander liegen.)

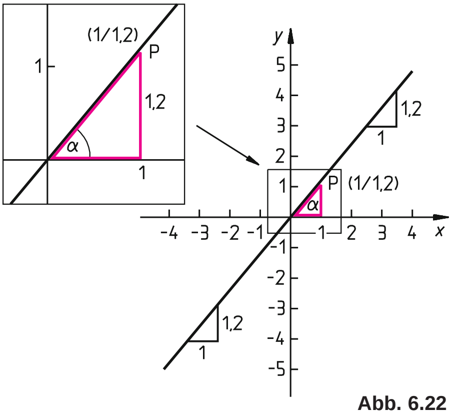

Abb. 6.22

Den Quotienten $\frac{y}{x}$ bezeichnet man als die **„Steigung"** *m* der Geraden. Die Gerade mit der Gleichung $y = 1{,}2x$ hat also die Steigung 1,2.

$\left(\text{Hinweis: } \frac{y}{x} = \tan(\alpha)\right)$

An der Stelle $x = 1$ ist der Funktionswert gleich der Steigung: $y = 1{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$. Somit haben wir außer dem Ursprung $(0\,|\,0)$ schnell einen zweiten Punkt $P\,(1\,|\,1{,}2)$ gefunden. Das rot eingezeichnete Dreieck nennt man auch Steigungsdreieck. Es kann in jeden anderen Punkt der Geraden verschoben werden – es gibt immer die Steigung der Geraden an.

Merksatz

Der Graph einer Funktion mit der Funktionsgleichung $y = mx$ ist eine Gerade durch den Ursprung mit der Steigung *m*.

Die Gerade zu $y = mx$ können wir schnell zeichnen, indem wir vom Ursprung aus das Steigungsdreieck antragen: um „1" in *x*-Richtung, um „*m*" in *y*-Richtung. Die Gerade verläuft dann durch die beiden Punkte $(0\,|\,0)$ und $(1\,|\,m)$. Für die Koordinaten eines beliebigen Punktes $(x\,|\,y)$ der Geraden gilt: $\frac{y}{x} = \frac{m}{1} = m$ (proportionale Zuordnung).

Wir erhalten insgesamt:
Alle Geraden mit einer Gleichung der Form $y = m \cdot x$ bilden ein Geradenbüschel mit dem Ursprung als Schnittpunkt. Je größer die Steigung ist ($m > 0$ wachsend), um so steiler verläuft die Gerade nach (rechts) oben. Für $m = 0$ ($y = 0$) erhält man die *x*-Achse. Je kleiner die Steigung ist ($m < 0$ fallend), um so steiler verläuft die Gerade nach (rechts) unten.

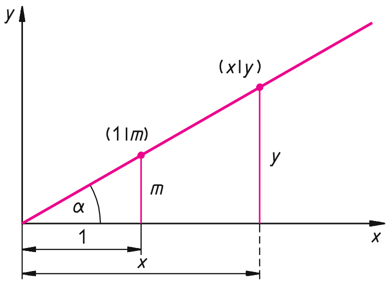

Abb. 6.23

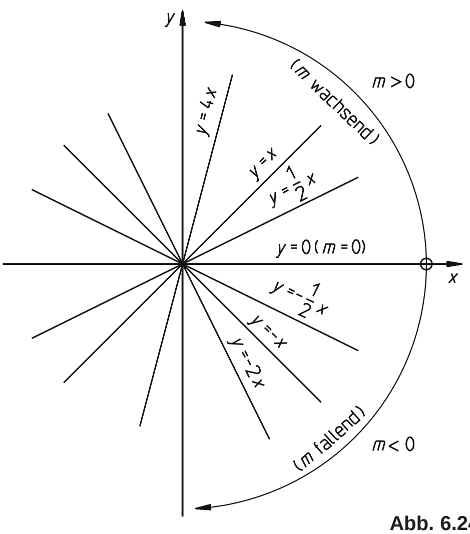

Abb. 6.24

$m > 0$: Gerade steigt (von links unten nach rechts oben).
$m = 0$: Gerade ist die *x*-Achse.
$m < 0$: Gerade fällt (von links oben nach rechts unten).