HANSER

Leseprobe

zu

Elektro-Aufgaben Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation

von Helmut Lindner

ISBN (Buch): 978-3-446-43330-4
ISBN (E-Book): 978-3-446-46181-9

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/9783446433304
sowie im Buchhandel

Inhaltsverzeichnis

1 Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen

Aufgaben zur Einführung in das Rechnen mit komplexen Zahlen, insbesondere zur Umrechnung der Normalform in die Exponentialform und umgekehrt, sind im Band 2 der Elektro-Aufgaben (Wechselstrom) enthalten.

1.1 Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl

Liegt der Radikand in der Exponentialform vor, so ist die Quadratwurzel aus dem Betrag Z zu ziehen und der Winkel φ zu halbieren:

$$\sqrt{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}} = \sqrt{Z} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\varphi}{2}}$$

Liegt der Radikand in der Normalform $\underline{Z} = a + \mathrm{j}\,b$ vor, dann ist diese zuvor in die Exponentialform umzuwandeln: $\sqrt{a+\mathrm{j}\,b} = \sqrt{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}}$ mit $Z = \sqrt{a^2+b^2}$ und $\tan\varphi = b/a$; ferner ist

$$\sqrt{-a+\mathrm{j}\,b} = \mathrm{j}\,\sqrt{a-\mathrm{j}\,b}$$

Aus folgenden Ausdrücken ist die Quadratwurzel zu ziehen und diese in der Normalform anzugeben:

1. $\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{j}}}$ **2.** $\sqrt{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}}$

3. $\sqrt{16\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,150^\circ}}$ **4.** $\sqrt{0{,}01\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,5^\circ}}$

5. $\sqrt{\mathrm{j}\,9}$ **6.** $\sqrt{-\mathrm{j}}$

7. $\sqrt{-\mathrm{j}\,0{,}16}$ **8.** $\sqrt{\frac{5}{\mathrm{j}}}$

9. $\sqrt{1+\mathrm{j}}$ **10.** $\sqrt{-1-\mathrm{j}}$

11. $\sqrt{1-\mathrm{j}}$ **12.** $\sqrt{-1+\mathrm{j}}$

13. $\sqrt{2-\mathrm{j}\,3}$ **14.** $\sqrt{-5+\mathrm{j}\,4}$

15. $\sqrt{-3-\mathrm{j}\,6}$ **16.** $\sqrt{-2{,}65+\mathrm{j}\,1{,}68}$

17. $\mathrm{j}\,\sqrt{5+\mathrm{j}}$ **18.** $\frac{\sqrt{3+\mathrm{j}\,5}}{\mathrm{j}}$

19. $\sqrt{\frac{13}{5+\mathrm{j}}}$ **20.** $\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}}$

21. $\sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}}}$ **22.** $\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{j}}}$

23. $\sqrt[3]{\mathrm{j}}$ **24.** $\left(1-\sqrt{\mathrm{j}}\right)^2$

25. $\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{\mathrm{j}}}$

1.2 Exponentialtunktionen mit komplexen Exponenten und Logarithmen komplexer Zahlen

Die Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten kann in einen reellen und einen imaginären Faktor zerlegt werden:

$$\mathrm{e}^{a+\mathrm{j}\,b} = \mathrm{e}^{a} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,b}$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl kann in einen reellen und einen imaginären Teil aufgespalten werden:

$$\ln(a+\mathrm{j}\,b) = \ln\left(Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}\right) = \ln Z + \mathrm{j}\,\varphi$$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $\underline{Z}\,\mathrm{e} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ gebracht werden:

26. $\mathrm{e}^{2+\mathrm{j}\,3}$

27. $\mathrm{e}^{-1{,}5+\mathrm{j}\,0{,}8}$

28. $\mathrm{e}^{-(0{,}75+\mathrm{j}\,0{,}4)}$

29. $\sqrt{\mathrm{e}^{0{,}84-\mathrm{j}\,1{,}24}}$

30. $\sqrt{\mathrm{e}^{-1{,}25+\mathrm{j}\,0{,}6}}$

31. $\dfrac{\mathrm{e}^{1{,}6+\mathrm{j}\,0{,}9}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}}}$

32. $\dfrac{\mathrm{e}^{0{,}1+\mathrm{j}\,0{,}2}}{\mathrm{e}^{0{,}2-\mathrm{j}\,0{,}1}}$

33. $\mathrm{e}^{0{,}1} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2}$

34. $\mathrm{e}^{0{,}2+\mathrm{j}\,1{,}5} + \mathrm{e}^{0{,}2-\mathrm{j}\,1{,}5}$

35. $\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{0{,}8+\mathrm{j}\,0{,}8} + \mathrm{e}^{-(0{,}8+\mathrm{j}\,0{,}8)}\right]$

36. $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\underline{g}} - \mathrm{e}^{-\underline{g}}\right)$ mit $\underline{g} = (1+\mathrm{j}\,)$

37. $\dfrac{\mathrm{e}^{\underline{g}} - \mathrm{e}^{-\underline{g}}}{\mathrm{e}^{\underline{g}} + \mathrm{e}^{-\underline{g}}}$ mit $\underline{g} = 0{,}6 + \mathrm{j}\,0{,}5$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $\underline{Z} = a + \mathrm{j}\,b$ gebracht werden:

38. $\ln\left(16\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}\right)$

39. $\ln\left(0{,}1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,20^\circ}\right)$

40. $\ln\left(2{,}15\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,10^\circ}\right)$

41. $\ln(3+\mathrm{j}\,4)$

42. $\ln(0{,}4-\mathrm{j}\,0{,}2)$

43. $\ln(-1-\mathrm{j}\,)$

44. $\ln(0{,}05+\mathrm{j}\,0{,}02)$

45. $\ln(50-\mathrm{j}\,0{,}2)$

46. $\ln\sqrt{2-\mathrm{j}\,4}$

47. $\ln(\mathrm{j}\,3)$

48. $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\,3}\right)$

49. $\ln\sqrt{\mathrm{j}\,3}$

1.3 Hyperbelfunktion komplexer Argumente

Die Kenntnis der Hyperbelfunktionen und ihrer Eigenschaften wird hier vorausgesetzt. Beim Vorliegen komplexer Argumente werden die Funktionswerte unter Benutzung der allgemein verbreiteten Zahlentafeln mit den hier angegebenen Formeln berechnet. Sie können aber auch mithilfe besonderer Netztafeln (Sinus- und Tangensrelief) ermittelt werden.

$$\sinh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \sinh a \cdot \cos b \pm \mathrm{j}\,\cosh a \cdot \sin b$$

$$\cosh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \cosh a \cdot \cos b \pm \mathrm{j}\,\sinh a \cdot \sin b$$

$$\tanh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \frac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} \pm \frac{\mathrm{j}\,\sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$$

Ist der Funktionswert von $\tanh(a+\mathrm{j}\,b)$ in der Form $Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ (oder in der entsprechenden Normalform) gegeben, so findet man die Komponenten des Argumentes $a+\mathrm{j}\,b$ mit den Formeln

$$\tanh 2a = \frac{2Z\cos\varphi}{1+Z^2} \quad \text{und} \quad \tan 2b = \frac{2Z\sin\varphi}{1-Z^2}$$

Die Werte von a und b können entsprechenden tanh- bzw. tan-Tabellen entnommen werden.

Die Werte der folgenden Funktionen sind in der Normalform anzugeben:

50. $\sinh\mathrm{j}$

51. $\sinh(0{,}5\,\mathrm{j}\,)$

52. $\sinh(0{,}5+\mathrm{j}\,1{,}5)$

53. $\sinh(0{,}8-\mathrm{j}\,0{,}8)$

54. $\sinh(0{,}2+\mathrm{j}\,1{,}2)$

55. $\sinh(0{,}2+\mathrm{j}\,\pi)$

56. $\sinh(1{,}65-\mathrm{j}\,2{,}50)$

57. $\sinh\left(\pi/2+\mathrm{j}\,\right)$

58. $\cosh(1+\mathrm{j}\,)$

59. $\cosh\mathrm{j}\,0{,}9$

60. $\cosh(0{,}6+\mathrm{j}\,0{,}2)$

61. $\cosh(0{,}8-\mathrm{j}\,0{,}8)$

62. $\cosh\left(\pi/2-\mathrm{j}\,\pi\right)$

63. $\cosh\mathrm{j}\,\pi/4$

64. $\tanh\mathrm{j}\,\pi$

65. $\tanh(1+\mathrm{j}\,)$

66. $\tanh(0{,}2+\mathrm{j}\,0{,}3)$

67. $\tanh\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,60^\circ}$

68. $\tanh 1{,}5\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}\right)$

69. $\tanh\sqrt{0{,}5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,40^\circ}}$

70. $\tanh\dfrac{1}{\mathrm{j}\,3}$

Zu berechnen sind die komplexen Argumente $(a+\mathrm{j}\,b)$ folgender Funktionswerte:

71. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = \mathrm{j}$

72. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 2 + \mathrm{j}\, 2$

73. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}253 + \mathrm{j}\, 0{,}519$

74. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}923 + \mathrm{j}\, 0{,}157$

75. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}3\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, 1{,}5}$

76. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}8\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, 0{,}6}$

77. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}7 - \mathrm{j}\, 0{,}2$

78. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 1{,}117\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, 14{,}1^\circ}$

79. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 0{,}366\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, 54^\circ}$

80. $\tanh(a + \mathrm{j}\, b) = 1{,}11\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\, 40^\circ}$

1.4 Rechnen mit Matrizen

Zur Abkürzung der in der Vierpoltheorie vorkommenden Gleichungssysteme ist die Matrizenform nützlich.

Definition: Unter einer Matrix $\boldsymbol{A}$ versteht man die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnete Gesamtheit von $m \cdot n$ Elementen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ist z. B. ein Vierpol durch die Gleichungen

$$\underline{U}_\mathrm{e} = Z_{11}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{12}\underline{I}_\mathrm{a}$$
$$\underline{U}_\mathrm{a} = Z_{21}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{22}\underline{I}_\mathrm{a}$$

gegeben, so lautet die entsprechende Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{U}_\mathrm{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$$

Die Matrix auf der linken Gleichungsseite besteht nur aus einer einzigen Spalte, während auf der rechten Seite das Produkt aus einer quadratischen Matrix von der Ordnung 2, d. h. vom Typ $(2, 2)$, und einer einspaltigen Matrix steht.

Zur Lösung der im Abschnitt 3. behandelten Aufgaben werden lediglich Matrizen der Ordnung 2 und einspaltige Matrizen verwendet, deren Handhabung einfach ist.

1.4.1 Determinante einer Matrix

Während eine Matrix in runde Klammern eingeschlossen wird und nur ein Schema von Koeffizienten darstellt, besitzt deren in gerade Striche gesetzte Determinante $\Delta\boldsymbol{A}$ (oder auch $\det\boldsymbol{A}$) einen berechenbaren Zahlenwert.

Für eine Matrix der Ordnung 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lautet die Determinante

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Anwendungsbeispiel:

Sind zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y gegeben:

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$

so findet man nach der „CRAMERschen Regel“:

$$x = \frac{1}{\Delta \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{\Delta \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Wie lauten die Determinanten folgender Matrizen?

81. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **82.** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

83. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$ **84.** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

85. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$ **86.** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & ab \\ 1/a & b \end{pmatrix}$

87. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a+b & c+a \\ -c-b & b+c \end{pmatrix}$

88. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2, deren 1. Zeile die Elemente $(5, 6)$ und deren Determinante den Wert 12 hat, wenn die Elemente der 2. Zeile im Verhältnis 3 : 4 zueinander stehen?

89. Wenn das erste Element der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ verdoppelt wird, nimmt die Determinante den 3-fachen Betrag an. Wie lauten die Matrix und deren Determinante?

90. Die Determinante einer quadratischen 2-reihigen Matrix hat mit $\Delta \boldsymbol{A} = 5$ denselben Betrag wie die beiden Elemente der 1. Zeile. Wie lautet die Matrix, wenn $a_{22} = 11$ ist?

91. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2, deren Determinante $\Delta \boldsymbol{A} = 1$ ist (Einheitsmatrix)?

92. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht?

93. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen besteht?

In den folgenden Gleichungssystemen sind mithilfe von Determinanten die Unbekannten x und y zu bestimmen.

94. $3x - 2y = 11$
$2x + 3y = 16$

95. $8x + 5y = 63$
$7x - 5y = 27$

96. $5y = 2x + 1$
$8y = 5x - 11$

97. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$
$(x - y) = (a - b)^2$

98. $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{a-b}$
$3x - 2y = 3a - 2b$

99. $\frac{x}{y} = \frac{5}{6}$
$\frac{6x+1}{4y+5} = \frac{13}{11}$

100. $\frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a$
$\frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = 2b$

1.4.2 Addition von Matrizen und Multiplikation mit einem Faktor

Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert (subtrahiert), indem man die einander entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird mit einem Faktor k multipliziert, indem jedes Element mit dem Faktor k multipliziert wird:

$$k\boldsymbol{A} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

Enthalten alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor, so können sie durch den Faktor dividiert und dieser vor die Matrix geschrieben werden.

101. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

102. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

103. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} 3a & 2b \\ -b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2b & 3a \end{pmatrix}$

105. $a \cdot \begin{pmatrix} b & 1/a \\ a & 1/b \end{pmatrix}$

106. $10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 5000 & 4500 \\ 500 & 1200 \end{pmatrix}$

Folgende Ausdrücke sind auf die kürzeste Form zu bringen:

107. $\begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 19 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} a-2b & 2b-a \\ 2a-b & b-2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & a \end{pmatrix}$

109. Um welchen Faktor vergrößert sich die Determinante $\boldsymbol{A}$ einer 2-reihigen quadratischen Matrix, wenn diese mit dem Faktor k multipliziert wird?

110. Welche Matrix $\boldsymbol{B}$ ist zur Matrix

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 2{,}5 \\ 4{,}5 & 3{,}0 \end{pmatrix}$

zu addieren, damit die Einheitsmatrix entsteht?

1.4.3 Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden miteinander multipliziert, indem man die Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Spalten der Matrix $\boldsymbol{B}$ in der folgenden Weise zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation ist nur dann ausführbar, wenn die Zahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ mit der Zahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

Das Produkt zweier Matrizen ist nicht kommutativ, d. h., im Allgemeinen ist $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Man unterscheidet die Multiplikation von links her ($\boldsymbol{AB}$) und von rechts her ($\boldsymbol{BA}$).

Die Determinante $\Delta(\boldsymbol{AB})$ des Produktes ist gleich dem Produkt der Determinanten $\Delta\boldsymbol{A}$ und $\Delta\boldsymbol{B}$, auch dann, wenn $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ist.

Berechnen Sie die folgenden Produkte und weisen Sie nach, dass das Produkt der Determinanten der Faktoren gleich der Determinante des Produktes ist:

111. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

112. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

113. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

114. $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

115. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

116. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Stellen Sie durch Ausrechnen fest, ob die folgenden Produkte kommutativ sind:

117. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

118. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

119. $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix}$

120. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Folgende Produkte sind in die Form eines Gleichungssystems umzuschreiben:

121. $\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{U}_\mathrm{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$

122. $\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{a} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$

Die in den folgenden Matrizengleichungen enthaltenen Unbekannten x, y bzw. U_1, U_2 usw. sind mithilfe von Determinanten zu berechnen (siehe auch die Anleitung S. 10):

123. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

124. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix}$

125. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1{,}9 \\ 8 & -3{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

126. $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ 1/7 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

127. $\begin{pmatrix} 60\,\mathrm{V} \\ 1{,}2\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 50\,\Omega \\ 0{,}02\,\mathrm{S} & 1{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

128. $\begin{pmatrix} 50\,\mathrm{V} \\ 0{,}3\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 100\,\Omega \\ 0{,}02\,\mathrm{S} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

129. $\begin{pmatrix} 50\,\mathrm{V} \\ 10\,\mathrm{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\,\Omega & 50\,\Omega \\ 4\,\Omega & 80\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

130. $\begin{pmatrix} 1{,}5\,\mathrm{A} \\ 0{,}3\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,\mathrm{mS} & 4\,\mathrm{mS} \\ 1\,\mathrm{mS} & 2\,\mathrm{mS} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

Lösungen

1 Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen

1. $e^{j\,0,5} = \underline{0,878 + j\,0,479}$

2. $\sqrt{2}\,e^{j\,15°} = \underline{1,366 + j\,0,366}$

3. $4\,e^{j\,75°} = \underline{1,035 + j\,3,864}$

4. $0,1\,e^{-j\,2,5°} = \underline{0,100 - j\,0,004}$

5. $\sqrt{9\,e^{j\,90°}} = 3\,e^{j\,45°} = \underline{2,121(1 + j\,)}$

6. $\sqrt{e^{j\,270°}} = e^{j\,135°} = \underline{0,707(-1 + j\,)}$

7. $0,4(-0,71 + j\,0,71) = \underline{0,283(-1 + j\,)}$

8. $\sqrt{\dfrac{5}{j}} = \sqrt{-j\,5} = \underline{1,58(-1 + j\,)}$

9. $\sqrt{\sqrt{2}\,e^{j\,45°}} = 1,19\,e^{j\,22,5°} = \underline{1,10 + j\,0,46}$

10. $\sqrt{\sqrt{2}\,e^{j\,225°}} = 1,19\,e^{j\,112,5°} = \underline{-0,46 + j\,1,10}$

11. $\sqrt{\sqrt{2}\,e^{j\,315°}} = 1,19\,e^{j\,157,5°} = \underline{-1,10 + j\,0,46}$

12. $\sqrt{\sqrt{2}\,e^{j\,135°}} = 1,19\,e^{j\,67,5°} = \underline{0,46 + j\,1,10}$

13. $\sqrt{3,61\,e^{-j\,56,3°}} = 1,90\,e^{j\,28,2°} = \underline{1,67 - j\,0,90}$

14. $j\,\sqrt{5 - j\,4} = j\,\sqrt{6,40\,e^{-j\,38,7°}}$
$= j\,2,53\,e^{-j\,19,4°} = \underline{0,84 + j\,2,39}$

15. $j\,\sqrt{3 + j\,6} = j\,\sqrt{6,71\,e^{j\,63,4°}}$
$= j\,2,59\,e^{j\,31,7°} = \underline{-1,36 + j\,2,20}$

16. $j\,\sqrt{2,65 - j\,1,68} = j\,\sqrt{3,14}\,e^{-j\,16,2°}$
$= \underline{0,49 + j\,1,70}$

17. $j\,\sqrt{5,10\,e^{j\,11,3°}} = j\,2,26\,e^{j\,5,7°}$
$= \underline{-0,22 + j\,2,25}$

18. $\dfrac{1}{j}\sqrt{5,83\,e^{j\,59°}} = \dfrac{1}{j}(2,10 + j\,1,19)$
$= \underline{1,19 - j\,2,10}$

19. $\sqrt{\dfrac{13(5 - j\,)}{26}} = \sqrt{2,5 - j\,0,5} = 1,6\,e^{-j\,5,65°}$
$= \underline{1,59 - j\,0,157}$

20. $\sqrt{\dfrac{(1 + j\,)^2}{2}} = \sqrt{j} = \sqrt{e^{j\,90°}} = e^{j\,45°}$
$= \underline{0,707(1 + j\,)}$

21. $\sqrt{\dfrac{1}{e^{j\,90°}}} = \sqrt{e^{-j\,90°}}$
$= \cos(-45°) + j\,\sin(-45°) = \underline{0,707(1 - j\,)}$

22. $\sqrt{\dfrac{1 - j}{2}} = \sqrt{0,5\sqrt{2}\,e^{-j\,45°}}$
$= 0,841(\cos 22,5° - j\,\sin 22,5°) = \underline{0,78 - j\,0,32}$

23. $\sqrt[3]{e^{j\,90°}} = e^{j\,30°} = \underline{0,866 + j\,0,5}$

24. $1 - 2\sqrt{j} + j = 1 - 2\sqrt{2}(1 + j\,) + j$
$= \underline{-1,828(1 + j\,)}$

25. $\dfrac{2(1 + j\,)}{\sqrt{2}(1 + j\,)} = \sqrt{2}$ oder auch: $\dfrac{\sqrt{2}\,e^{j\,45°}}{e^{j\,45°}} = \underline{\sqrt{2}}$

26. $e^2 \cdot e^{j\,3} = \underline{7,39\,e^{j\,171,9°}}$

27. $\dfrac{1}{e^{1,5}} \cdot e^{j\,0,8} = \underline{0,223\,e^{j\,45,8°}}$

28. $\dfrac{1}{e^{0,75}} \cdot e^{-j\,0,4} = \underline{0,472\,e^{-j\,22,9°}}$

29. $\sqrt{2,316\,e^{-j\,71,0°}} = \underline{1,52\,e^{-j\,35,5°}}$

30. $\sqrt{0,287\,e^{j\,34,4°}} = \underline{0,535\,e^{j\,17,2°}}$

31. $4,95\,e^{j\,(0,9-1)} = \underline{4,95\,e^{-j\,5,7°}}$

32. $\dfrac{1,105\,e^{j\,0,2}}{1,221\,e^{-j\,0,1}} = 0,90\,e^{j\,0,3} = \underline{0,90\,e^{j\,17,2°}}$

33. $1,105 + (\cos 0,2 + j\,\sin 0,2)$
$= 2,085 + j\,0,199 = \underline{2,094\,e^{j\,5,5°}}$

34. $e^{0,2}(e^{j\,1,5} + e^{-j\,1,5}) = 2\,e^{0,2}\cos 1,5 = \underline{0,173}$

35. $\frac{1}{2} \cdot 2{,}226\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}8} + 0{,}449\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,0{,}8} =$
$\frac{1}{2} \cdot 2{,}226(\cos 0{,}8 + \mathrm{j}\ \sin 0{,}8) +$
$0{,}449(\cos 0{,}8 - \mathrm{j}\ \sin 0{,}8) = (0{,}932 + \mathrm{j}\,0{,}637)$
$= \underline{1{,}13\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,34{,}4^\circ}}$

36. $\frac{1}{2} \cdot 2{,}718(\cos 1 + \mathrm{j}\ \sin 1) -$
$0{,}3679(\cos 1 - \mathrm{j}\ \sin 1) = 0{,}6350 + \mathrm{j}\,1{,}2985$
$= \underline{1{,}45\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,63{,}9^\circ}}$

37. $\frac{1{,}1174 + \mathrm{j}\,1{,}1396}{2{,}0807 + \mathrm{j}\,0{,}6105} = \frac{1{,}596\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,45{,}6^\circ}}{2{,}168\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,16{,}4^\circ}}$
$= \underline{0{,}736\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,29{,}2^\circ}}$

38. $\underline{2{,}77 + \mathrm{j}\,1{,}57}$

39. $\underline{-2{,}30 - \mathrm{j}\,0{,}35}$

40. $\underline{0{,}77 + \mathrm{j}\,0{,}17}$

41. $\ln(5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,58{,}1^\circ}) = \ln 5 + \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,53{,}1^\circ})$
$= \underline{1{,}61 + \mathrm{j}\,0{,}93}$

42. $\ln(0{,}447\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,26{,}6^\circ}) = \underline{-0{,}81 - \mathrm{j}\,0{,}46}$

43. $\underline{0{,}35 + \mathrm{j}\,3{,}93}$

44. $\ln(0{,}0539\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,21{,}8^\circ}) = \underline{-2{,}92 + \mathrm{j}\,0{,}38}$

45. $\ln(50\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2^\circ}) = \underline{3{,}9120 - \mathrm{j}\,0{,}0035}$

46. $\frac{1}{2}\ln(4{,}472\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,63{,}4^\circ}) = \underline{0{,}75 - \mathrm{j}\,0{,}55}$

47. $\ln(3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}) = \underline{1{,}10 + \mathrm{j}\,1{,}57}$

48. $-\ln(3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}) = \underline{-(1{,}10 + \mathrm{j}\,1{,}57)}$

49. $\frac{1}{2}\ln(3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}) = \underline{0{,}55 + \mathrm{j}\,0{,}79}$

50. $\sinh 0 \cdot \cos 1 + \mathrm{j}\ \cosh 0 \cdot \sin 1 = \underline{\mathrm{j}\,0{,}8415}$

51. $\underline{-\mathrm{j}\,0{,}4794}$

52. $\sinh 0{,}5 \cdot \cos 1{,}5 + \mathrm{j}\ \cosh 0{,}5 \cdot \sin 1{,}5$
$= \underline{0{,}0369 + \mathrm{j}\,1{,}1248}$

53. $\underline{0{,}6187 - \mathrm{j}\,0{,}9593}$

54. $\underline{0{,}0730 + \mathrm{j}\,0{,}9507}$

55. $\underline{-0{,}2013}$

56. $\underline{-2{,}0088 - \mathrm{j}\,1{,}6156}$

57. $\underline{1{,}2434 + \mathrm{j}\,2{,}1114}$

58. $\cosh 1 \cdot \cos 1 + \mathrm{j}\ \sinh 1 \cdot \sin 1$
$= \underline{0{,}8337 + \mathrm{j}\,0{,}9889}$

59. $\underline{0{,}6216}$

60. $\underline{-0{,}4933 + \mathrm{j}\,0{,}5789}$

61. $\underline{0{,}9318 - \mathrm{j}\,0{,}6371}$

62. $\underline{-2{,}5092}$

63. $\underline{0{,}7071}$

64. $\frac{\sin 2 \cdot 0}{\cos 2 \cdot 0 + \cos 2\pi} + \mathrm{j}\,\frac{\sin 2\pi}{\cos 2 \cdot 0 + \cos 2\pi} = \underline{0}$

65. $\underline{1{,}0839 + \mathrm{j}\,0{,}2718}$

66. $\underline{0{,}2155 + \mathrm{j}\,0{,}2962}$

67. $\tanh(\cos 60^\circ - \mathrm{j}\ \sin 60^\circ)$
$= \tanh(0{,}5 - \mathrm{j}\,0{,}866) = \underline{0{,}8500 - \mathrm{j}\,0{,}7139}$

68. $\underline{0{,}9994 + \mathrm{j}\,0{,}0074}$

69. $\underline{0{,}6043 + \mathrm{j}\,0{,}1600}$

70. $\tanh\left(-\mathrm{j}\,\frac{1}{3}\right) = 0 - \frac{\mathrm{j}\ \sin(0{,}667)}{\cosh 0 + \cos(0{,}667)}$
$= \underline{-\mathrm{j}\,0{,}346}$

71. $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}$; $\tanh 2a = \frac{2 \cdot 1 \cdot 0}{1 + 1} = 0$;
$\tan 2b = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{0} = \infty$; $2b = 1{,}57$; $b = 0{,}785$;
$(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{\mathrm{j}\,0{,}785}$

72. $(2 + \mathrm{j}\,2) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,45^\circ}$;
$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}/2}{1 + 8} = 0{,}444$; $2a = 0{,}478$;
$a = 0{,}239$; $\tan 2b = -\frac{4}{7}$; $2b = 2{,}62$; $b = 1{,}31$;
$(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}24 + \mathrm{j}\,1{,}31}$

73. $(0{,}253 + \mathrm{j}\,0{,}519) = 0{,}577\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,64^\circ}$;
$\tanh 2a = \frac{2 \cdot 0{,}577 \cdot 0{,}4384}{1 + 0{,}3329} = 0{,}3796$; $2a = 0{,}40$;
$a = 0{,}2$; $\tan 2b = \frac{2 \cdot 0{,}577 \cdot 0{,}8988}{1 - 0{,}3329} = 1{,}555$;
$2b = 1{,}00$; $b = 0{,}5$; $(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}2 + \mathrm{j}\,0{,}5}$

74. $(0{,}923 + \mathrm{j}\,0{,}157) = 0{,}936\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,9{,}7^\circ}$;

$\tanh 2a = \dfrac{2 \cdot 0{,}936 \cdot 0{,}9857}{1 + 0{,}8761} = 0{,}9835$; $2a = 2{,}4$;
$a = 1{,}2$; $\tan 2b = \dfrac{2 \cdot 0{,}936 \cdot 0{,}1685}{1 - 0{,}8761} = 2{,}5459$;
$2b = 1{,}20$; $b = 0{,}60$; $(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{1{,}2 + \mathrm{j}\,0{,}6}$

75. $\tanh 2a = 0{,}03894$; $a = 0{,}02$;
$\tan 2b = 0{,}6577$; $b = 0{,}33$; $(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}02 + \mathrm{j}\,0{,}33}$

76. $\tanh 2a = 0{,}8052$; $a = 0{,}56$; $\tan 2b = 2{,}5095$;
$b = 0{,}60$; $(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}56 + \mathrm{j}\,0{,}60}$

77. $(0{,}7 - \mathrm{j}\,0{,}2) = 0{,}728\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,16^\circ}$; $\tan 2a = 0{,}9148$;
$a = 0{,}778$; $\tan 2b = -0{,}8538$; $b = -0{,}353$;
$(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}777 - \mathrm{j}\,0{,}353}$

78. $\tanh 2a = 0{,}9640$; $a = 1$; $\tan 2b = -2{,}197$;
$b = -0{,}6$; $(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{1 - \mathrm{j}\,0{,}6}$

79. $\tanh 2a = 0{,}3797$; $2a = 0{,}4$; $a = 0{,}2$;
$\tan 2b = 0{,}6845$; $2b = 0{,}6$; $b = 0{,}3$;
$(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}2 + \mathrm{j}\,0{,}3}$

80. $\tanh 2a = 0{,}7619$; $2a = 1$; $a = 0{,}5$;
$\tan 2b = 6{,}1482$; $2b = 1{,}410$; $b = 0{,}7$;
$(a + \mathrm{j}\,b) = \underline{0{,}5 + \mathrm{j}\,0{,}7}$

81. $\Delta \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (3 \cdot 5 - 2 \cdot 4) = \underline{7}$

82. $\Delta \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = (4 \cdot 9 - 7 \cdot 5) = \underline{1}$

83. $\Delta \boldsymbol{A} = (10 \cdot 10 + 9 \cdot 11) = \underline{199}$

84. $\Delta \boldsymbol{A} = (1 \cdot 1 - 0) = \underline{1}$

85. $\Delta \boldsymbol{A} = (ab - ab) = \underline{0}$

86. $\Delta \boldsymbol{A} = (2b - b) = \underline{b}$

87. $\Delta \boldsymbol{A} = (a + b)(b + c) + (c + a)(c + b)$
$= \underline{(b + c)(2a + b + c)}$

88. Mit den Elementen der 2. Zeile $(3x, 4x)$ lautet die Determinante $\Delta \boldsymbol{A} = 5 \cdot 4x - 6 \cdot 3x = 12$, woraus $x = 6$ folgt; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$

89. Aus $2x \cdot 6 - 5 \cdot 12 = 3(6x - 5 \cdot 12)$ folgt
$x = 20$; $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$; $\Delta \boldsymbol{A} = \underline{60}$

90. $\Delta \boldsymbol{A} = 5 \cdot 11 - 5a_{21} = 5$; $a_{21} = 10$;
$\boldsymbol{A} = \underline{\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}}$

91. $\boldsymbol{A} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

92. $\Delta \boldsymbol{A} = a(a + 3) - (a + 1)(a + 2) = \underline{-2}$

93. $\Delta \boldsymbol{A} = a(a + 6) - (a + 2)(a + 4) = \underline{-8}$

94. $\Delta \boldsymbol{A} = [3 \cdot 3 - (-2 \cdot 2)] = 13$;
$x = \dfrac{1}{13}\begin{vmatrix} 11 & -2 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{13}(33 + 32) = \underline{5}$

$y = \dfrac{1}{13}\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = \dfrac{1}{13}(48 - 22) = \underline{2}$

95. $\Delta \boldsymbol{A} = 8 \cdot (-5) - 5 \cdot 7 = -75$;
$x = -\dfrac{1}{75}\begin{vmatrix} 63 & 5 \\ 27 & -5 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{75} \cdot (-450) = \underline{6}$

$y = -\dfrac{1}{75}\begin{vmatrix} 8 & 63 \\ 7 & 27 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{75} \cdot (-225) = \underline{3}$

96. Nach Umformung ist
$2x - 5y = -1$
$5x - 8y = 11$; hieraus $\Delta \boldsymbol{A} = -9$;
$x = -\dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 8 & -11 \end{vmatrix} = \underline{7}$;

$y = -\dfrac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -11 & -5 \end{vmatrix} = \underline{3}$

97. Nach Umformung ist
$bx - ay = 0$
$x - y = (a - b)^2$; hieraus $\Delta \boldsymbol{A} = -b + a$;
$x = \dfrac{1}{a - b}\begin{vmatrix} 0 & -a \\ (a - b)^2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{a(a - b)}$

$y = \dfrac{1}{a - b}\begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & (a - b)^2 \end{vmatrix} = \underline{b(a - b)}$

98. Nach Umformung ist
$-bx + ay = 0$
$3x - 2y = 3a - 2b$; hieraus $\Delta \boldsymbol{A} = 2b - 3a$;
$x = \dfrac{1}{2b - 3a}\begin{vmatrix} 0 & a \\ 3a - 2b & -2 \end{vmatrix} = \underline{a}$

$y = \dfrac{1}{2b - 3a}\begin{vmatrix} -b & 0 \\ 3 & 3a - 2b \end{vmatrix} = \underline{b}$

99. Nach Umformung ist
$6x - 5y = 0$
$66x - 52y = 54$; $\Delta \boldsymbol{A} = 18$; $x = \underline{15}$; $y = \underline{18}$

100. Nach Umformung ist
$x(a-b) + y(a+b) = 2a(a^2 - b^2)$
$x(a+b) - y(a-b) = 2b(a^2 - b^2)$;
$\Delta \boldsymbol{A} = -2b(a^2 + b^2)$; $x = y = \underline{a^2 - b^2}$

101. $\underline{\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}}$

102. $\underline{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}}$

103. $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}}$

104. $\underline{\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}}$

105. $\underline{\begin{pmatrix} ab & 1 \\ a^2 & a/b \end{pmatrix}}$

106. $\underline{\begin{pmatrix} 5 & 4{,}5 \\ 0{,}5 & 1{,}2 \end{pmatrix}}$

107. $\begin{pmatrix} 12 & 24 \\ 24 & 12 \end{pmatrix} = \underline{12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

108. $\begin{pmatrix} a-b & b-a \\ a-b & b-a \end{pmatrix} = \underline{(a-b)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

109. Aus der Definition der Determinante folgt
$\Delta k\boldsymbol{A} = \underline{k^2 \Delta \boldsymbol{A}}$

110. $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 2{,}5 \\ 4{,}5 & 3{,}0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}5 & -2{,}5 \\ -4{,}5 & -2{,}0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

111. $\begin{pmatrix} 2+5 & 4+6 \\ 4+15 & 8+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 19 & 26 \end{pmatrix}$; $\Delta \boldsymbol{A} = 2$;
$\Delta \boldsymbol{B} = -4$; $\Delta \boldsymbol{AB} = \underline{-8}$

112. $\begin{pmatrix} 2+8 & 1+6 \\ 10+24 & 5+18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 34 & 23 \end{pmatrix}$;
$\Delta \boldsymbol{A}$ und $\Delta \boldsymbol{B}$ s. Aufgabe 111

113. $\begin{pmatrix} 5+6 & 5+6 \\ 4+8 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$;
$\Delta \boldsymbol{A} = 16$; $\Delta \boldsymbol{B} = 0$; $\Delta \boldsymbol{AB} = \underline{0}$

114. $\begin{pmatrix} 4{,}5 & 5{,}5 \\ 5{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; $\Delta \boldsymbol{A} = 4$; $\Delta \boldsymbol{B} = -7$;
$\Delta \boldsymbol{AB} = \underline{-28}$

115. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30+3 \\ 24+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 26 \end{pmatrix}$;
Determinante nicht definiert

116. $(30+4 \quad 18+2) = \begin{pmatrix} 34 & 20 \end{pmatrix}$;
Determinante nicht definiert

117. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 6 & -19 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -11 & 11 \end{pmatrix}$;
nicht kommutativ

118. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 13 & 22 \\ 11 & 24 \end{pmatrix}$;
kommutativ

119. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 46 & 44 \\ 33 & 38\,{}^2\!/_3 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 46 & 44 \\ 33 & 38\,{}^2\!/_3 \end{pmatrix}$;
kommutativ

120. $\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 20 \\ 28 & 52 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{BA} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 34 & 54 \end{pmatrix}$;
nicht kommutativ

121. $\underline{U}_\mathrm{e} = Z_{11}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{12}\underline{I}_\mathrm{a}$; $\underline{U}_\mathrm{a} = Z_{21}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{22}\underline{I}_\mathrm{a}$

122. $\underline{U}_\mathrm{e} = A_{11}\underline{U}_\mathrm{a} + A_{12}\underline{I}_\mathrm{a}$; $\underline{I}_\mathrm{e} = A_{21}\underline{U}_\mathrm{e} + A_{22}\underline{I}_\mathrm{a}$

123. $2x - 3y = 1$
$3x - 7y = -6$

$$x = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = \underline{5}; \quad y = \frac{1}{-5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = \underline{3}$$

124. $5x - 7y = -0{,}1$
$7x - 9y = 1{,}7$

$$x = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -0{,}1 & -7 \\ 1{,}7 & -9 \end{vmatrix} = \underline{3{,}2}; \quad y = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 5 & -0{,}1 \\ 7 & 1{,}7 \end{vmatrix} = \underline{2{,}3}$$

125. $4x - 1{,}9y = 1$
$8x - 3{,}9y = 1$

$$x = \frac{1}{-0{,}4}\begin{pmatrix} 1 & -1{,}9 \\ 1 & -3{,}9 \end{pmatrix} = \underline{5}; \quad y = \underline{10}$$

126. $x = \underline{21}$; $y = \underline{18}$

127. $x = \underline{15\,\mathrm{V}}$; $y = \underline{0{,}75\,\mathrm{A}}$

128. $4 \cdot U_2 + 100\,\Omega \cdot I_2 = 50\,\mathrm{V}$
$0{,}02\,\mathrm{S} \cdot U_2 + 1 \cdot I_2 = 0{,}3\,\mathrm{A}$

$$U_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 50\,\mathrm{V} & 100\,\Omega \\ 0{,}3\,\mathrm{A} & 1 \end{vmatrix} = \underline{10\,\mathrm{V}}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 50\,\mathrm{V} \\ 0{,}02\,\mathrm{S} & 0{,}3\,\mathrm{A} \end{vmatrix} = \underline{0{,}1\,\mathrm{A}}$$

129. $40\,\Omega \cdot I_1 + 50\,\Omega \cdot I_2 = 50\,\text{V}$
$4\,\Omega \cdot I_1 + 80\,\Omega \cdot I_2 = 10\,\text{V}$

$$I_1 = \frac{1}{3000\,\Omega^2} \begin{vmatrix} 50\,\text{V} & 50\,\Omega \\ 10\,\text{V} & 80\,\Omega \end{vmatrix} = \underline{1{,}167\,\text{A}}$$

$I_2 = \underline{0{,}067\,\text{A}}$

130. $6\,\text{mS} \cdot U_1 + 4\,\text{mS} \cdot U_2 = 1{,}5\,\text{A}$
$1\,\text{mS} \cdot U_1 + 2\,\text{mS} \cdot U_2 = 0{,}3\,\text{A}$

$$U_1 = \frac{1}{8\,\text{mS}^2} \begin{vmatrix} 1{,}5\,\text{A} & 4\,\text{mS} \\ 0{,}3\,\text{A} & 2\,\text{mS} \end{vmatrix} = \underline{225\,\text{V}}$$

$$U_2 = \frac{1}{8\,\text{mS}^2} \begin{vmatrix} 6\,\text{mS} & 1{,}5\,\text{A} \\ 1\,\text{mS} & 0{,}3\,\text{A} \end{vmatrix} = \underline{37{,}5\,\text{V}}$$

2 Leitungen

131. a) $\tan\varepsilon = \dfrac{0{,}2}{0{,}471}$; $\varepsilon = 23{,}0°$;

$\tan\delta = \dfrac{0{,}5 \cdot 10^{-6}}{1{,}57 \cdot 10^{-6}} = 0{,}3185$; $\delta = 17{,}7°$;

$\varphi = -2{,}7°$;

$Z' = \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}471^2}\,\Omega/\text{km} = 0{,}512\,\Omega/\text{km}$;

$Y' = \sqrt{0{,}5^2 \cdot 10^{-12} + 1{,}57^2 \cdot 10^{-12}}\,\text{S/km}$
$= 1{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{S/km}$;

$Z_\text{L} = \sqrt{\dfrac{Z'}{Y'}} \cdot \text{e}^{\text{j}\varphi} = \underline{557\,\text{e}^{-\text{j}\,2{,}7}\,\Omega}$;

$\sin\dfrac{\delta+\varepsilon}{2} = 0{,}3478$; $\cos\dfrac{\delta+\varepsilon}{2} = 0{,}9375$;

$\alpha = \sqrt{0{,}512 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}3478\,\text{Np/km}$
$= \underline{0{,}32 \cdot 10^{-3}\,\text{Np/km}}$;

$\beta = \sqrt{0{,}512 \cdot 1{,}65 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}9375\,\text{rad/km}$
$= \underline{0{,}86 \cdot 10^{-3}\,\text{rad/km}}$;

mit komplexen Größen: $\underline{Z}' = 0{,}512\,\text{e}^{\text{j}\,67°}\,\Omega/\text{km}$;
$\underline{Y}' = 1{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,72{,}3°}\,\text{S/km}$;

$\underline{\gamma} = \sqrt{0{,}512\,\text{e}^{\text{j}\,67°} 1{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,72{,}3°}}\,1/\text{km}$
$= 0{,}919 \cdot 10^{-3}\,\text{e}^{\text{j}\,69{,}7°}\,1/\text{km}$;

$\underline{\gamma} = \underline{(0{,}32 + \text{j}\,0{,}86) \cdot 10^{-3}\,1/\text{km}}$;

$$Z_\text{L} = \sqrt{\frac{0{,}512\,\text{e}^{\text{j}\,67°}}{1{,}65 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,72{,}3°}}}\,\Omega = \underline{557\,\text{e}^{-\text{j}\,2{,}7°}\,\Omega}$$

b) $\underline{Z}' = 11{,}18\,\text{e}^{\text{j}\,63{,}4°}\,\Omega/\text{km}$;
$\underline{Y}' = 30{,}01 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,88{,}5°}\,\text{S/km}$;
$\underline{\underline{Z}_\text{L} = 610\,\text{e}^{-\text{j}\,12{,}6°}\,\Omega}$
$\varepsilon = 26{,}6°$; $\delta = 1{,}5°$; $\varphi = -12{,}6°$;
$\underline{\gamma} = \underline{18{,}32 \cdot 10^{-3}\,\text{e}^{\text{j}\,76°}\,1/\text{km}}$
$\beta = \underline{17{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{rad/km}}$; $\alpha = \underline{4{,}43 \cdot 10^{-3}\,\text{Np/km}}$

c) $\underline{Z}' = 60{,}1\,\text{e}^{\text{j}\,3{,}3°}\,\Omega/\text{km}$;
$\underline{Y}' = 150 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,89{,}6°}\,\text{S/km}$; $\tan\varepsilon = 17{,}1$;

$\varepsilon = 86{,}7°$; $\delta = 0{,}4°$; $\underline{Z}_\text{L} = \underline{633\,\text{e}^{-\text{j}\,43{,}2°}\,\Omega}$;
$\underline{\gamma} = \underline{0{,}095\,\text{e}^{\text{j}\,46{,}4°}\,1/\text{km}}$; $\alpha = \underline{66 \cdot 10^{-3}\,\text{Np/km}}$;
$\beta = \underline{69 \cdot 10^{-3}\,\text{rad/km}}$

132. $\underline{Z}' = (8 + \text{j}\,10)\,\Omega/\text{km}$;
$\underline{Y}' = (1 + \text{j}\,25)\,\mu\text{S/km}$;

$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'}$
$= \sqrt{(8+\text{j}\,10)(1+\text{j}\,25) \cdot 10^{-6}}\,1/\text{km}$
$= \sqrt{320{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{e}^{\text{j}\,139{,}1°}}\,1/\text{km}$
$= \underline{17{,}90 \cdot 10^{-3}\,\text{e}^{\text{j}\,69{,}6°}\,1/\text{km}}$ oder
$\underline{(6{,}2 + \text{j}\,16{,}8) \cdot 10^{-3}\,1/\text{km}}$

133. a) Umrechnung in die Normalform:

$\underline{g} = 1{,}299 + \text{j}\,0{,}75$;

$\alpha = \dfrac{a}{l} = \dfrac{1{,}299}{50\,\text{km}} = \underline{26\,\text{mNp/km}}$;

$\beta = \dfrac{b}{l} = \dfrac{0{,}75}{50\,\text{km}} = \underline{15\,\text{mrad/km}}$

b) $\underline{g} = 2{,}41 - \text{j}\,0{,}65$; $\alpha = \underline{48\,\text{mNp/km}}$;
$\beta = \underline{-13{,}0\,\text{mrad/km}}$

c) $\alpha = \underline{50\,\text{mNp/km}}$; $\beta = \underline{24\,\text{mrad/km}}$

134. a) $\underline{g} = \underline{\gamma}l = 1(\alpha + \text{j}\,\beta)$
$= 40\,\text{km}\,(0{,}045 + \text{j}\,0{,}056)\,1/\text{km}$
$= \underline{2{,}87\,\text{e}^{\text{j}\,51{,}2°}\,1/\text{km}}$

b) $\underline{g} = 7{,}2 + \text{j}\,8{,}4 = \underline{11{,}1\,\text{e}^{\text{j}\,49{,}4°}}$

c) $\underline{g} = 9 + \text{j}\,30 = \underline{31{,}3\,\text{e}^{\text{j}\,73{,}3°}}$

135. Aus $|\,\underline{g}\,| = \sqrt{a^2 + b^2}$ wird
$a = \sqrt{|\,\underline{g}\,|^2 - b^2} = \underline{20}$

136. $\underline{Z}' = R' + \text{j}\,\omega L' = (18 + \text{j}\,8)\,\Omega/\text{km}$
$= 19{,}70\,\text{e}^{\text{j}\,24{,}0°}\,\Omega/\text{km}$;

$$\underline{Y}' = G' + \mathrm{j}\,\omega C' = (2 + \mathrm{j}\,20)\,\mu\mathrm{S/km}$$
$$= 20{,}10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,84{,}3^\circ}\ \mathrm{S/km};$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'}$$
$$= \sqrt{19{,}70\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,23{,}9^\circ} \cdot 20{,}10 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,84{,}3^\circ}}\ 1/\mathrm{km}$$
$$= \underline{19{,}90 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,54{,}1^\circ}\ 1/\mathrm{km}}$$

$$\underline{\gamma} = \underline{(11{,}67 + \mathrm{j}\,16{,}12) \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{km}};$$
$$\alpha = \underline{11{,}67 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{km}};\ \beta = \underline{16{,}12 \cdot 10^{-3}\ 1/\mathrm{km}};$$
$$\underline{Z}_\mathrm{L} = \underline{980\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,30{,}2^\circ}\ \Omega}$$

137. $\tan\delta = \dfrac{3}{25} = 0{,}1200;\ \delta = 6{,}8^\circ;$
$\tan\varepsilon = \dfrac{12}{11} = 1{,}091;\ \varepsilon = 47{,}5^\circ;$
$\varphi = \dfrac{\delta - \varepsilon}{2} = \underline{-20{,}4^\circ}$

138. Aus $\varphi = \dfrac{\delta - \varepsilon}{2}$ wird $\delta = 2\varphi + \varepsilon = 5^\circ;$
$\tan\delta = 0{,}0875;\ G' = \tan\delta \cdot \omega C' = \underline{14\,\mu\mathrm{S/km}}$

139. $\underline{\gamma} = \sqrt{(30 + \mathrm{j}\,3{,}5)\,\mathrm{j}\,175 \cdot 10^{-6}}\ 1/\mathrm{km}$
$$= \sqrt{(-612{,}5 + \mathrm{j}\,5250) \cdot 10^{-6}}\ 1/\mathrm{km}$$
$$= \sqrt{5{,}285 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,96{,}7^\circ}}\ 1/\mathrm{km}$$
$$= 0{,}0727\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,48{,}4^\circ}\ 1/\mathrm{km};$$
$$\underline{\gamma} = 0{,}0727(\cos 48{,}4^\circ + \mathrm{j}\ \sin 48{,}4^\circ)\ 1/\mathrm{km}$$
$$= (0{,}0483 + \mathrm{j}\,0{,}0544)\ 1/\mathrm{km};$$
$$a = \alpha l = 0{,}0483 \cdot 40 = \underline{1{,}93\,\mathrm{Np}};$$
$$b = \beta l = 0{,}0544 \cdot 40 = \underline{2{,}18\,\mathrm{rad}}$$

140. Aus $\varphi = \dfrac{\delta - \varepsilon}{2}$ wird $\delta = 2\varphi + \varepsilon = 20^\circ;$
$$G' = \omega C' \tan\delta = \underline{10{,}92\,\mu\mathrm{S/km}};$$
$$R' = \omega L' \tan\varepsilon = \underline{20{,}78\,\Omega/\mathrm{km}};$$
$$\underline{Z}' = (R' + \mathrm{j}\,\omega L') = 24\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}\ \Omega/\mathrm{km};$$
$$\underline{Y}' = (G' + \mathrm{j}\,\omega C') = 31{,}9\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,70^\circ}\ \mu\mathrm{S/km};$$
$$\underline{\gamma} = \sqrt{24\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ} \cdot 31{,}9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,70^\circ}}\ 1/\mathrm{km}$$
$$= \underline{27{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,50^\circ}\ 1/\mathrm{km}};$$
$$\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{24 \cdot 10^6\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}}{31{,}9\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,70^\circ}}}\ \Omega = \underline{867\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,20^\circ}\ \Omega}$$

141. Der Ausbreitungskoeffizient ist $|\,\underline{\gamma}\,| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0{,}0402$; aus $\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'}$ und
$\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\dfrac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}}$ folgt $Y' = \dfrac{|\,\underline{\gamma}\,|}{|\,\underline{Z}_\mathrm{L}\,|} = \underline{1{,}34 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{S/km}}$
sowie $Z' = Z_\mathrm{L}^2 Y' = \underline{12{,}1\,\Omega/\mathrm{km}}$

142. a) $\underline{Z}' = R' + \mathrm{j}\,\omega L'$
$$= (50 + \mathrm{j}\,0{,}1884)\,\Omega/\mathrm{km} = 50\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2^\circ}\ \Omega/\mathrm{km};$$
$$\underline{Y}' = G' + \mathrm{j}\,\omega C' = \mathrm{j}\,12{,}56 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{S/km}$$
$$= 12{,}56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}\ \mathrm{S/km};$$
$$\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{50\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2^\circ}}{12{,}56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}}}\ \Omega$$
$$= \sqrt{4{,}0 \cdot 10^6\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,89{,}8^\circ}}\ \Omega$$
$$= \underline{1995\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,44{,}9^\circ}\ \Omega};$$
$$\underline{\gamma} = \sqrt{50\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2^\circ} \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}}\ 1/\mathrm{km}$$
$$= \underline{25{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,45{,}1^\circ}\ 1/\mathrm{km}}$$

b) $\underline{Z}_\mathrm{L} = \underline{1118\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,44{,}7^\circ}\ \Omega}$;
$\underline{\gamma} = \underline{44{,}7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,45{,}4^\circ}\ 1/\mathrm{km}}$

c) $\underline{Z}_\mathrm{L} = \underline{500\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,43{,}3^\circ}\ \Omega}$;
$\underline{\gamma} = \underline{100 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,46{,}7^\circ}\ 1/\mathrm{km}}$

d) $\underline{Z}_\mathrm{L} = \underline{228\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,36{,}7^\circ}\ \Omega}$;
$\underline{\gamma} = \underline{228 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,53{,}4^\circ}\ 1/\mathrm{km}}$

143. Aus $\underline{\gamma} = \sqrt{(R' + \mathrm{j}\,\omega L')(G' + \mathrm{j}\,\omega C')}$ $= \alpha + \mathrm{j}\,\beta$ erhält man
$$\sqrt{G' + \mathrm{j}\,\omega C'} = \frac{\alpha + \mathrm{j}\,\beta}{\sqrt{R' + \mathrm{j}\,\omega L'}};$$
dies in $Z_\mathrm{L} = \sqrt{\dfrac{R' + \mathrm{j}\,\omega L'}{G' + \mathrm{j}\,\omega C'}}$ eingesetzt, ergibt
$$\underline{Z}_\mathrm{L} = Z_\mathrm{L}(\cos\varphi + \mathrm{j}\ \sin\varphi)$$
$$= \frac{\sqrt{R' + \mathrm{j}\,\omega L'}\sqrt{R' + \mathrm{j}\,\omega L'}}{\alpha + \mathrm{j}\,\beta}\ \text{oder}$$
$Z_\mathrm{L} = (\cos\varphi + \mathrm{j}\ \sin\varphi))(\alpha + \mathrm{j}\,\beta) = R' + \mathrm{j}\,\omega L'$ bzw. $Z_\mathrm{L}(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi + \mathrm{j}\,\alpha\sin\varphi + \mathrm{j}\,\beta\cos\varphi) = R' + \mathrm{j}\,\omega L'$;
die Trennung dieser Gleichung in reelle und imaginäre Teile liefert $R' = Z_\mathrm{L}(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)$ bzw. $\omega L' = Z_\mathrm{L}(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)$.
Für G' und C' verfährt man analog.

144. $\underline{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\,\beta =$
$0{,}03(\cos 50^\circ + \mathrm{j}\ \sin 50^\circ)\ 1/\mathrm{km}$; hieraus folgt $\alpha = 0{,}0193\ \mathrm{Np/km}$ und $\beta = 0{,}0230\ \mathrm{rad/km}$;
$$R' = 900\,\Omega/\mathrm{km}$$
$$\times[0{,}0193\cos 20^\circ - 0{,}0230\sin(-20^\circ)]$$
$$= (16{,}32 + 7{,}08)\,\Omega/\mathrm{km};$$
$$R' = \underline{23{,}4\,\Omega/\mathrm{km}};$$
$$\omega L' = (19{,}45 - 5{,}94)\,\Omega/\mathrm{km} = 13{,}51\,\Omega/\mathrm{km};$$