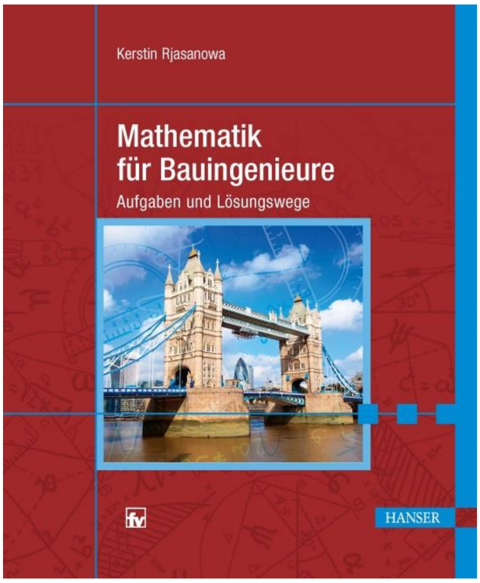
HANSER



Leseprobe

zu

Mathematik für Bauingenieure

Aufgaben und Lösungswege

Mit zahlreichen Bildern und Formelübersichten

von Kerstin Rjasanowa

ISBN (Buch): 978-3-446-45433-0
ISBN (E-Book): 978-3-446-45449-1

Weitere Informationen und Bestellungen unter
http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45433-0
sowie im Buchhandel

Vorwort

„Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt."

Carl Friedrich Gauß (1777–1855),
Deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker

Nachdem die beiden Lehrbücher „Mathematik für Bauingenieure 1. Grundlagen für das Bachelor-Studium" und „Mathematik für Bauingenieure 2. Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium" erschienen sind, soll das vorliegende Buch „Mathematik für Bauingenieure. Aufgaben und Lösungswege" diese Buchreihe vervollständigen. Sie ist auf der Basis meiner langjährigen Vorlesungen, Übungen und Klausuren in Mathematik im Studiengang Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern entstanden. Viele inhaltliche Anregungen zu den Aufgaben verdanke ich der Beschäftigung mit der Anwendung mathematischer Verfahren bei spezifischen und typischen Problemen auf dem Gebiet des Bauingenieurwesens.

Anliegen dieser Aufgabensammlung ist es, dass die mathematischen Inhalte der beiden Lehrbücher, die dort an Beispielen demonstriert und angewendet werden, in den aktiven Wissensschatz des Lesers übergehen. Dazu ist das eigene, selbstständige und wiederholte Üben Voraussetzung. Anhand formaler Aufgaben können die Fertigkeiten im Umgang mit den mathematischen Inhalten geübt und überprüft werden. Eine Vielzahl praktischer Textaufgaben, vorwiegend aus dem Erfahrungsbereich des Bauingenieurwesens, steht zur Verfügung, bei deren Lösung die erworbenen theoretischen Kenntnisse und Fertigkeiten angewendet werden können. Dabei ist stets zuerst ein mathematisches Modell abzuleiten, d. h., die verbale Formulierung ist in eine mathematische Aufgabenstellung zu überführen. Deren Analyse resultiert in Vorschlägen des Einsatzes geeigneter mathematischer Lösungsverfahren. Mitunter gibt es dabei nicht nur ein einziges Standardverfahren. Andererseits lassen sich oft mit einer Methode recht unterschiedliche Anwendungsaufgaben lösen. Am Ende sollte stets das Verifizieren der Ergebnisse vorgenommen werden, z. B. durch eine Probe bei formalen Aufgaben oder durch Überprüfung auf Plausibilität bei Anwendungsaufgaben. Wird das Lösen „formaler" Aufgaben gut beherrscht, bereitet das Realisieren der mathematischen Aufgabenstellung unabhängig vom konkreten physikalischen Hintergrund gemäß dem gewählten Lösungsalgorithmus in der Regel keine Probleme mehr. Je mehr der interessierte Leser das Erstellen eines mathematischen Modells, die Auswahl passender Lösungsmöglichkeiten und deren Umsetzung bis hin zur Bestimmung der jeweils gesuchten Größen trainiert, desto sicherer und kompetenter wird er in der Anwendung mathematischer Fertigkeiten und Erkenntnisse bei der Beantwortung vielfältiger Fragestellungen, besonders in den Ingenieurwissenschaften.

Die Aufgabensammlung ist in elf Aufgabenkapitel und elf dazugehörige Kapitel mit Lösungswegen untergliedert. Die ersten sieben Kapitel, B1 bis B7, orientieren sich an den Inhalten im Buch „Mathematik für Bauingenieure 1" mit den Themen Arithmetik reeller Zahlen, Funktionen einer Veränderlichen, Lineare Algebra, Vektorrechnung und Analytische Geometrie, Zahlenfolgen, Grenzwerte und Stetigkeit, Differenzialrechnung sowie Integralrechnung für Funktionen einer Veränderlichen. Die restlichen vier Kapitel, M1 bis M4, orientieren sich an den Inhalten im Buch „Mathematik für Bauingenieure 2" mit den Themen Funktionen mehrerer Veränderlicher, Differenzialgleichungen, Finanzmathematik sowie Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Am Anfang jedes Aufgabenkapitels befindet sich eine Übersicht in Tabellengestalt über die wichtigsten Formeln als Erinnerung, Grundlage und Hilfestellung beim Lösen. Danach folgen formale Aufgaben und im Anschluss Textaufgaben, die Mehrheit davon mit Bezug zum Bauingenieurwesen. Kurze und klare Formulierungen der Sachverhalte und der Fragestellungen sollen die Ableitung der mathematischen Modelle erleichtern, ebenso erklärende Abbildungen. Mitunter soll der Leser aber auch selbst in der Lage sein, eine Skizze anzufertigen.

Die Rolle der Lösungswege sehe ich als Vorschlag für ein begründetes Vorgehen, um richtige Ergebnisse zu erhalten. Eigenständiges Erarbeiten und Begründen aller Lösungsschritte bis hin zum richtigen Ergebnis sind die Kriterien, ob der Leser tatsächlich eine Aufgabe lösen kann. Darum sollte er sich in jedem Fall zuerst bemühen, selbst einen Lösungsweg und die Ergebnisse zu finden, bevor er zu den Lösungswegen im Buch greift. Damit diese Kompetenz gefördert wird, sind die Lösungswege in kleinerer Schrift gesetzt. Sie sind übersichtlich und dort, wo es möglich ist, für eine bessere Motivation kurz gehalten und in wenigen Zeilen geschrieben. Gleichartige Lösungsalgorithmen sind durch analoge Formulierungen und Gestaltung der Lösungsschritte zu erkennen. Zur leichteren Kontrolle sind die Ergebnisse bei formalen Aufgaben farblich hervorgehoben und bei Textaufgaben im Antwortsatz zusammengefasst. Illustrationen zu den Lösungen sollen die Vorstellungskraft des Lesers schulen und die Überprüfung der Ergebnisse unterstützen.

Für das sehr aufmerksame, aufwändige und gewissenhafte Korrekturlesen des Manuskriptes, an der mein Kollege des Studienganges Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern, Prof. Dr. Johannes Schanzenbach, die Mitarbeiter des Institutes für Angewandte Mathematik der Universität des Saarlandes Prof. Dr. Sergej Rjasanow, M. Sc. Torsten Keßler und B. Sc. Daniel Seibel und der Mitarbeiter an der Technischen Akademie Südwest e. V. Kaiserslautern, Dipl.-Math. Andreas Schraag beteiligt waren, bedanke ich mich sehr. Ein Dankeschön gilt auch vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern für aufmerksames Nachvollziehen und Bestätigen der Lösungswege während der Vorlesungen, Übungen oder bei der Klausurvorbereitung. Bei Dipl.-Ing. Philipp Thorwirth bedanke ich mich für die freundliche Unterstützung dieses Buchprojektes und den fruchtbaren Austausch in der Konzeptionsphase.

Kaiserslautern, im Januar 2018 Kerstin Rjasanowa

Inhaltsverzeichnis

B6 Differenzialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen

Ableitungen

Definitionen

Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$, Stelle $x_0 \in D_f$, $n \in \mathbb{N}$

Begriff	Definition
Differenzenquotient	$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, $x \neq x_0$
Erste Ableitung	$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$
n-te Ableitung	$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x_0))'$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, $\quad f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$
Differenzial	$\mathrm{d}y = f'(x_0)(x - x_0)$
Lineare Näherung	$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Ableitungen einiger elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c,\ c \in \mathbb{R}$	0	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\tan x$	$1/\cos^2 x = 1+\tan^2 x$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x = 1-\tanh^2 x$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$	$\cot x$	$-1/\sin^2 x = -1-\cot^2 x$	$\coth x$	$-1/\sinh^2 x = 1-\coth^2 x$
e^x	e^x	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$, $\lvert x\rvert < 1$	$\operatorname{arcosh} x$	$1/\sqrt{x^2-1}$, $\lvert x\rvert > 1$
$\ln x$	$1/x$	$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\operatorname{artanh} x$	$1/(1-x^2)$, $\lvert x\rvert < 1$
$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\operatorname{arccot} x$	$-1/(1+x^2)$	$\operatorname{arcoth} x$	$-1/(x^2-1)$, $\lvert x\rvert > 1$

Ableitungsregeln

Regel	Funktion	Ableitung
Faktorregel	$c\, g(x)$	$c\, g'(x)$
Summenregel	$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
Produktregel	$g(x)\, h(x)$	$g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$
Quotientenregel	$\dfrac{g(x)}{h(x)}$	$\dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)}$
Kettenregel	$g(h(x))$	$g'(h(x))\, h'(x)$
Umkehrfunktion	$f^{-1}(x)$	$1/f'(f^{-1}(x))$
Logarithmisches Ableiten	$g(x)^{h(x)}$	$g(x)^{h(x)} \left(h'(x) \ln g(x) + h(x) \dfrac{g'(x)}{g(x)} \right)$

Anwendungen

Fehlerrechnung

Sei f eine differenzierbare Funktion. Statt des genauen Wertes x wurde der Messwert x_0 mit dem Messfehler Δx ermittelt, d. h., es gilt $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$. Welcher maximale Fehler ergibt sich näherungsweise bei der Funktionswertbestimmung von $f(x)$, wenn stattdessen $f(x_0)$ berechnet wird?

Absoluter Fehler	Relativer Fehler
$\lvert f(x) - f(x_0)\rvert \approx \lvert \mathrm{d}y\rvert \leq \lvert f'(x_0)\rvert \lvert \Delta x\rvert$	$\left\lvert \dfrac{f(x) - f(x_0)}{f(x_0)} \right\rvert \approx \dfrac{\lvert \mathrm{d}y\rvert}{\lvert f(x_0)\rvert} \leq \dfrac{\lvert f'(x_0)\Delta x\rvert}{\lvert f(x_0)\rvert}, \quad f(x_0) \neq 0$

Regel von l'Hospital

Voraussetzungen	Regel
1. Die Funktionen f und g sind differenzierbar. **2.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \left(\text{bzw. } \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0\right)$ **3.** $g(x) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 mit Ausnahme von $x = x_0$ (bzw. für $x \to \pm\infty$) **4.** $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \left(\text{bzw. } \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ existiert	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Die Regel von l'Hospital gilt sinngemäß auch für $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$, $x \to x_0$ bzw. $x \to \pm\infty$.

Taylor-Polynom

f - eine in einer Umgebung der Stelle x_0 mindestens $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, $n \in \mathbb{N}$

Definition	Formel
Taylor-Polynom vom Grad n	$P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$
Restglied von Lagrange	$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ zwischen x_0 und x
Approximation	$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad \text{bzw.} \quad \lvert f(x) - P_n(x)\rvert \leq \max\limits_x \lvert R_n(x)\rvert$
Taylor-Reihe	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Kurvendiskussionen

Sei $y = f(x)$ auf dem Intervall (a, b) genügend oft differenzierbar, $\varepsilon > 0$.

Eigenschaft	notwendige Bedingung	hinreichende Bedingungen (zusammen mit notwendiger Bed.)
konstant auf (a, b)	$f'(x) = 0,\ x \in (a, b)$	
streng monoton steigend auf (a, b)	$f'(x) > 0,\ x \in (a, b)$	
streng monoton fallend auf (a, b)	$f'(x) < 0,\ x \in (a, b)$	
lokales Maximum an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) > 0,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, und $f'(x) < 0,\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
lokales Minimum an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$	$f'(x) < 0,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, und $f'(x) > 0,\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
lokales Maximum an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$
lokales Minimum an der Stelle x_0	$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) > 0$
streng konvex auf (a, b)	$f''(x) > 0,\ x \in (a, b)$	
streng konkav auf (a, b)	$f''(x) < 0,\ x \in (a, b)$	
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$	$f''(x) > 0,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, und $f''(x) < 0,\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$	$f''(x) < 0,\ x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, und $f''(x) > 0,\ x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$
Wendepunkt an der Stelle x_0	$f''(x_0) = 0$	$f'''(x_0) \neq 0$

Differenzialgeometrie

Koordinaten	kartesisch	Parameterform	Polarkoordinaten
Kurve	$y = f(x)$	$x = x(t),\ y = y(t)$	$r = r(\varphi)$
Ableitungen	$y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$	$\dot{x} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$	$r' = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$
Anstieg	y'	$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$	$\dfrac{r' \sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$
Tangentenvektor	$\begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} r'\cos\varphi - r\sin\varphi \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi \end{pmatrix}$
Normalenvektor	$\begin{pmatrix} -y' \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -r'\sin\varphi - r\cos\varphi \\ r'\cos\varphi - r\sin\varphi \end{pmatrix}$
Bogendifferenzial $\mathrm{d}s$	$\sqrt{1 + y'^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\ \mathrm{d}t$	$\sqrt{r^2 + r'^2}\ \mathrm{d}\varphi$
Krümmung k Krümmungsradius $\rho = 1/\lvert k\rvert$	$\dfrac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$	$\dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$	$\dfrac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}$

Ableitungen, Anwendungen

6.1 Zu bestimmen ist unter Verwendung des Begriffes der Differenzierbarkeit die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x > 0,\ x_0 = 10$

b) $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R},\ x_0 = 8$

6.2 Zu bestimmen sind die Ableitungen folgender Funktionen, ω und p sind reelle Konstanten:

a) $f(x)=(5x-4)^3$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x^3\sqrt{x}}{1+x^2}$ **d)** $f(x)=5x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{5}{2}}+2x^{-1}$

e) $f(t)=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ **f)** $y(x)=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

g) $y(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\ldots+\dfrac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}$

h) $z(x)=(1-x^3)^5$ **i)** $s(t)=\ln\sin(\omega t)$

j) $z(x)=x^3(x^2-1)^2$ **k)** $y(x)=\sin(2x^2-3x+1)$

l) $u(t)=\sin^2(\omega t)$ **m)** $v(t)=\sqrt{1+\sqrt{2pt}}$

n) $y(x)=\mathrm{e}^{\cos x}\sin x$ **o)** $y(u)=2^{\sin(3u)}$

p) $y(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}+\ln\tan\dfrac{x}{2}$

q) $y(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}-2\arctan x$

r) $y(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

6.3 Die erste Ableitung der Funktionen an der Stelle x_0 ist zu berechnen:

a) $y(x) = \mathrm{e}^{2x},\ x_0 = 2$

b) $y(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{16}{x},\ x_0 = -8$

6.4 Die n-te Ableitung folgender Funktionen ist zu bestimmen, $n \in \mathbb{N}$:

a) $y(x) = a^x$ **b)** $y(x) = \ln x$

6.5 Wie oft ist die Funktion f mit

$$f(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

über ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar?

6.6 Die ersten vier Ableitungen folgender Funktionen sind zu berechnen:

a) $f(x) = 3x^4 + 2x^3 + x^2 - 10$

b) $f(x) = \sin x$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{x^3}$

6.7 Der Anstiegswinkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ des Graphen der Funktion f an der Stelle x_0 ist zu bestimmen. Die Gleichung der Tangente an den Graphen in dem entsprechenden Punkt ist anzugeben:

a) $f(x)=x^3,\ x_0=0$ **b)** $f(x)=\mathrm{e}^{-x},\ x_0=0$

6.8 Die folgenden Grenzwerte sind mit der Regel von l'Hospital zu berechnen:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\cot x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cot x - \dfrac{1}{x}\right)$ **e)** $\lim\limits_{x\to +0}\cot x\sinh x$

f) $\lim\limits_{x\to +0}(\sin x)^x$ **g)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan(2x)}$

h) $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\tan(ax)}{\ln\tan(bx)},\ a,b > 0$

6.9 Mit welcher relativen Genauigkeit muss der Radius einer Kugel gemessen werden, damit der relative Fehler bei der Berechnung des Volumens kleiner als $1\,\%$ ist?

6.10 Bei der Messung des Winkels α eines Zimmers mit trapezförmigem Grundriss ist der Winkel als $(30^\circ \pm 2')$ gemessen worden. Wie groß ist der absolute und der relative Fehler bei der Berechnung des Inhaltes der Wohnfläche, wenn die Länge $a = 5$ m beträgt (siehe **Bild 6.1**)?

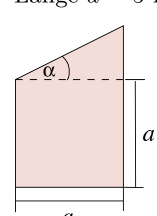


Bild 6.1 Trapezförmiger Grundriss

6.11 Zur Bestimmung der Höhe h eines Bauwerkes wird von der Entferung a zum Fuß des Bauwerkes der Peilwinkel zur Spitze des Bauwerkes $\alpha = (15 \pm 0.5)^\circ$ gemessen (siehe **Bild 6.2**). Mit welcher maximalen relativen Genauigkeit kann die Höhe h ermittelt werden?

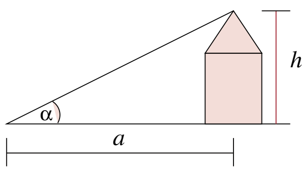


Bild 6.2 Winkelmessung

6.12 Der Funktionswertzuwachs ist durch das Differenzial zur Näherungsberechnung der Zahl $\sqrt[3]{1.02}$ zu ersetzen.

6.13 Der relative Fehler der Zahlen

a) $\pi^2 + 1$ **b)** π^π

soll kleiner als 1 % sein. Wie viel Stellen genau ist π jeweils mindestens zu wählen?

6.14 Gesucht ist für $y = f(x)$ eine vollständige Kurvendiskussion (Definitionsbereich, Wertebereich, Symmetrie, Nullstellen, Polstellen, Verhalten an den Polstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Monotonie, Krümmung, Verhalten für $x \to \pm\infty$, Asymptoten). Der prinzipielle Funktionsverlauf ist zu skizzieren.

a) $y = x^3 - x^2 - 2x$ **b)** $y = 2x - x\ln(x-1)$

c) $y = x\ln^2 x$

d) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 3}$ **e)** $y = \dfrac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}$

6.15 Die Funktion $x(t)$ beschreibt die Position x eines gedämpften Schwingers zum Zeitpunkt $t \ge 0$

$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-2t} + c_2 \mathrm{e}^{-t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

a) Gesucht sind die Konstanten c_1 und c_2, wenn der Schwinger zum Zeitpunkt $t = 0$ (in s) die Auslenkung 2 cm und die Geschwindigkeit 4 cm/s erhalten hat.

b) Zu welchem Zeitpunkt erreicht er seine maximale Auslenkung?

c) Erreicht er die Gleichgewichtslage?

d) Ab welchem Zeitpunkt ist seine Abweichung von der Gleichgewichtslage kleiner als 0.1 cm?

6.16 Für die Gleichung w der Biegelinie eines linksseitig gelenkig gelagerten und rechtsseitig horizontal eingespannten Balkens der Länge l mit konstanter Biegesteifigkeit EI und der Streckenlast $q(x) = q_0(1 - x/l)$, q_0 =const, gilt

$EIw^{IV}(x) = q(x),\ 0 < x < l$

zusammen mit den Randbedingungen

$w(0) = 0,\ w''(0) = 0$ und $w(l) = 0,\ w'(l) = 0$ (siehe **Bild 6.3**). Gesucht ist die Gleichung w der Biegeline, wenn bekannt ist, dass w ein Polynom fünften Grades ist.

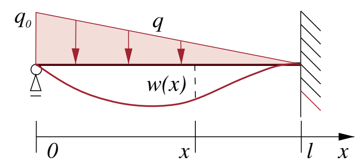


Bild 6.3 Biegelinie

6.17 Ein Auto fährt auf einer Linksabbiegerspur, die in folgender Weise aus zwei Parabelbögen y_1 und y_2 zusammengesetzt ist (siehe **Bild 6.4**). Die Parabelbögen haben ihre Scheitel in den Punkten $(0,0)$ bzw. (L,h). Sie berühren sich tangential an der Stelle $x = l$, d. h., dort stimmen Funktionswerte und Ableitungen der entsprechenden Funktionen überein. Gesucht sind die Gleichungen der Parabeln, wenn $L = 30$ m, $l = 10$ m und $h = 4$ m gegeben ist.

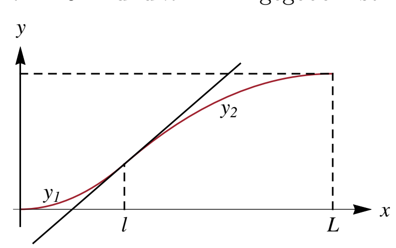


Bild 6.4 Linksabbiegerspur

6.18 Das ohne Knicke verlaufende Spannglied in einem Betonbalken ist aus drei Teilen zusammengesetzt, die die Form von achsparallelen Parabeln p_1, p_2, p_3 haben (siehe **Bild 6.5**). Der Punkt $S_1(x_1, y_1)$ ist Scheitelpunkt der Parabeln p_1 und p_2, der Punkt $S_3(x_3, y_3)$ Scheitelpunkt der Parabel p_3. Der zweite und dritte Teil des Spanngliedes kontaktieren im Punkt $K_2(x_2, y_2)$ mit glattem Verlauf. Der dritte Teil des Spanngliedes hat seinen Endpunkt E auf der x-Achse.

Zu ermitteln sind die Funktionsgleichungen für p_1, p_2, p_3 und darauf basierend die Länge des Spanngliedes, wenn folgende Koordinaten (in [m]) gegeben sind:
$x_1=4$, $x_2=12$, $x_3=18$, $y_1=-0.25$, $y_2=0.15$.

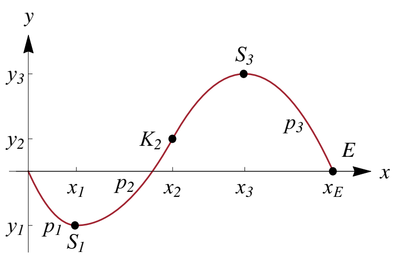


Bild 6.5 Spannglied

Extremwertaufgaben

6.19 Gesucht ist das Rechteck, dessen Flächeninhalt A bei gegebenem Umfang U am größten ist.

6.20 Gesucht ist das einem Kreis mit dem Radius r einbeschriebene Dreieck größten Flächeninhalts.

6.21 Für welche Punkte (x, y) der Parabel $y=x^2$ ist der Abstand d vom Punkt $P(1, 2)$ extremal?

6.22 Wie muss der Radius und der Zentriwinkel eines Kreissektors gewählt werden, damit sein Flächeninhalt bei gegebenem Umfang U maximal wird? Wie groß ist der maximale Flächeninhalt?

6.23 Der Dachboden eines Einfamilienhauses soll ausgebaut werden. Sein Querschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundseite $a = 6.4$ m und der Höhe $h_1 = 5.5$ m (siehe **Bild 6.6**). Wie sind die Länge b und die Höhe h des Zimmers zu wählen, wenn der vorhandene Raum bei rechteckigem Zimmerquerschnitt maximal ausgenutzt werden soll?

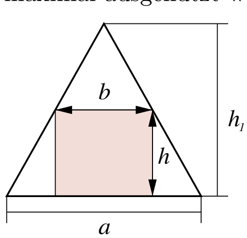


Bild 6.6 Dachboden

6.24 Zwei Punkte A und B einer geradlinig verlaufenden Straße sind $a = 650$ m voneinander entfernt. Ein Ortsteil C hat von der Straße den Abstand $|\overline{BC}|=b=180$ m. Der Ortsteil soll Gasanschluss bekommen, beginnend im Punkt A. Die Baukosten betragen längs der Straße $k_1 = 72$ €/m, im Gelände jedoch $k_2 = 85$ €/m. An welcher Stelle muss beim Bau des Gasanschlusses von der Straße geradlinig abgezweigt werden, damit die Baukosten möglichst gering bleiben?

6.25 Die Skizze zeigt den Grundriss eines Hauses, das aus drei Räumen und einem Flur der Breite x besteht (siehe **Bild 6.7**). Die Gesamtlänge der Wände soll $b = 90$ m betragen. Wie groß ist die Breite x zu wählen, damit der Inhalt der Grundfläche der drei Räume zusammen möglichst groß wird? Eine maßstabsgetreue Skizze des Grundrisses unter Verwendung der errechneten Werte ist anzufertigen.

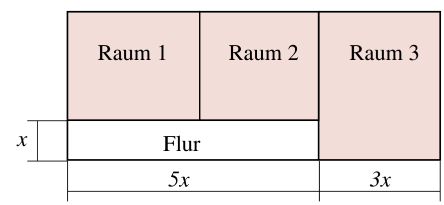


Bild 6.7 Grundriss

6.26 Aus drei Holzbrettern von je 20 cm Breite soll eine Wasserrinne von trapezförmigem Querschnitt mit möglichst großem Fassungsvermögen gebaut werden. Eine genaue Konstruktionsanweisung ist anzugeben.

6.27 Zum Bau eines an den Stirnwänden offenen Schuppens sollen zwei senkrecht aufzustellende Bretterwände mit der Höhe $a = 3.5$ m durch zwei Wellbleche der Breite $b = 4.65$ m ein Satteldach erhalten. Die Bleche sollen 15 cm überstehen. Welchen Abstand müssen die senkrechten Wände voneinander haben, damit das Fassungsvermögen des Schuppens am größten wird?

6.28 Aus einem Baumstamm mit konstantem kreisförmigen Querschnitt des Durchmessers d soll ein Balken maximaler Tragfähigkeit T herausgeschnitten werden ($T = kab^2$, $k =$const.). Wie sind die Seitenlängen a und b des Balkenquerschnittes zu wählen?

6.29 In die Ellipse mit den Halbachsen der Längen a und b ist ein Rechteck mit zu den Achsen parallelen Seiten zu legen, sodass sein Flächeninhalt maximal wird. Gesucht sind die Koordinaten der Ecken dieses Rechteckes sowie der maximale Flächeninhalt.

6.30 Die Kuppel einer Halle soll einen halbkreisförmigen Querschnitt mit dem Radius r erhalten (siehe **Bild 6.8**). In welchen Punkten P_1 und P_2 berührt das trapezförmige Dach $MRSN$ die Kuppel, wenn der Inhalt der Fläche des Querschnitts zwischen Dach und Kuppel minimal werden soll?

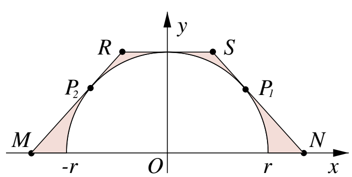


Bild 6.8 Kuppel

6.31 Ein Bauunternehmer hat zwei voneinander unabhängige Fertigungsbetriebe. Der Gewinn G_1 und G_2 (in €) in jedem der Betriebe ist eine Funktion des eingesetzten Kapitals x_1 bzw. x_2:

$$G_1 = 120\sqrt{x_1}, \qquad G_2 = 160\sqrt{x_2}.$$

Das gesamte verfügbare Kapital beläuft sich auf 4 000 000 €. Wie ist es auf die Betriebe aufzuteilen, um einen maximalen Unternehmensgewinn zu erzielen? Wie groß ist der zusätzliche Gewinn, wenn ein zusätzlicher Euro an Kapital eingesetzt wird?

6.32 Zwei Autos fahren auf geraden Straßen, die sich unter einem Winkel von 60° schneiden, mit gleicher Geschwindigkeit $v = 50$ km/h. Zum Zeitpunkt, als das eine Auto die Kreuzung passiert, ist das andere noch $s = 5$ km davon entfernt. Nach welcher Zeit ist die Entfernung der Autos minimal? Wie groß ist die minimale Entfernung? Zu verwenden ist ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Kreuzung und der x-Achse auf einer der beiden Straßen.

6.33 Zwei Korridore mit den Breiten $d_1 = 1.6$ m bzw. $d_2 = 2.4$ m schneiden einander unter einem rechten Winkel. Gesucht ist die größte Länge einer Leiter, die horizontal aus dem einen Korridor in den anderen getragen werden kann.

6.34 Die Seitenwand eines Gebäudes soll durch einen Balken, der über eine $m = 1.35$ m hohe Mauer gelegt werden soll, abgestützt werden. Diese hat von der Wand einen Abstand von $a = 3.50$ m (siehe **Bild 6.9**). Wie lang ist der kürzeste Balken, der dafür benutzt werden kann?

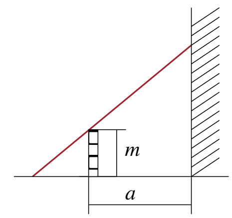


Bild 6.9 Wand, Mauer und Balken

6.35 Um eine elliptische Rabatte mit den Längen der Halbachsen $a = 40$ m und $b = 20$ m sollen gerade Gehwege so gebaut werden, dass sie die Rabatte berühren und der Inhalt der Fläche zwischen Wegen und Rabatte möglichst klein wird (siehe **Bild 6.10**). Wie sind die Wege zu legen?

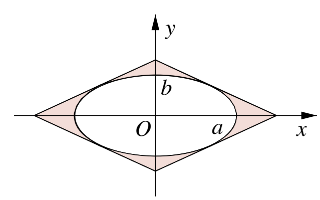


Bild 6.10 Rabatte

6.36 Beim Bau eines Tunnels soll zunächst ein Querschnitt von der Form einer halben Ellipse mit den Längen der Halbachsen $a = 12$ m und $b = 8$ m ausgehoben werden, der später bis auf den skizzierten rechteckigen Querschnitt wieder vermauert wird (siehe **Bild 6.11**).

a) Wie sind die Längen h und l zu wählen, damit der zu vermauernde Teil minimal wird?

b) Wie viel Prozent des Querschnitts müssen in dem Fall wieder zugemauert werden?

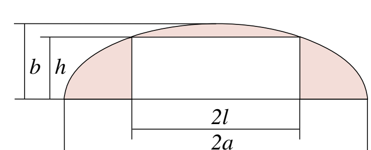


Bild 6.11 Tunnelquerschnitt

6.37 An der Decke einer Werkhalle soll ein Lüftungskanal angebracht werden. Der Querschnitt hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem gleichschenklig-rechtwinkligem Dreieck (siehe **Bild 6.12**). Welche Maße a, b und h müssen Dreieck und Rechteck erhalten, wenn der Inhalt der Fläche des Querschnitts mit $A = 1\ \text{m}^2$ vorgegeben ist und zur Herstellung des Lüftungskanals möglichst wenig Blech (in m^2) verbraucht werden soll? Aus bautechnischen Gründen darf die Höhe des Kanals 1.5 m nicht überschreiten. Wie groß ist dann der Blechverbrauch (in m^2) pro 1 m Kanallänge?

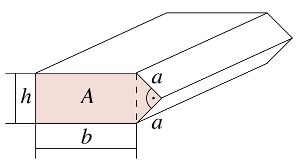


Bild 6.12 Lüftungskanal

6.38 Herr Ö. Konom will die Fahrt von Kaiserslautern nach Hamburg (ca. 600 km) mit einem Mietauto zurücklegen. Der Benzinverbrauch b des Mietautos (in l/(100 km)) hängt von seiner als konstant vorausgesetzten Geschwindigkeit v (in km/h) folgendermaßen ab:

$$b(v) = \frac{v}{10} - 5 + \frac{360}{v}.$$

a) Welche Geschwindigkeit sollte er wählen, um den Benzinverbrauch zu minimieren?

b) Der Preis für das Mietauto beträgt 40 € Grundgebühr zuzüglich 16.20 € pro Stunde. Das Benzin kostet 1.50 € pro Liter. Welche Geschwindigkeit sollte Herr Ö. Konom wählen, um die Kosten für die Fahrt, d. h. Mietauto und Benzin, zu minimieren?

6.39 Der Querschnitt eines Tunnels hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Querschnitts beträgt U. Für welchen Radius des Halbkreises wird der Inhalt der Fläche des Querschnitts am größten? Wie groß ist der maximal mögliche Inhalt der Fläche? Wie groß sind dann die Seiten des Rechtecks?

6.40 Das maximale Biegemoment und die Stelle, an der es angenommen wird, ist für einen beidseitig gelenkig gelagerten Balken der Länge l mit der angegebenen linearen Streckenlast q zu ermitteln (siehe **Bild 6.13**).

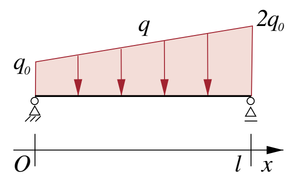


Bild 6.13 Balken

6.41 Die Durchhangsparabel $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ einer Hochspannungsfernleitung soll durch folgende Messungen bestimmt werden: Spannweite l, Höhenunterschied h der Mastspitzen S_1 und S_2, außerdem wird von A, die Parabel in P berührend, nach B gezielt, wobei die Abstände $|\overline{S_1A}| = a$ und $|\overline{S_2B}| = b$ gemessen werden (siehe **Bild 6.14**). Zu ermitteln ist

a) die Gleichung der Parabel,

b) der maximale Durchhang f (Pfeilhöhe).

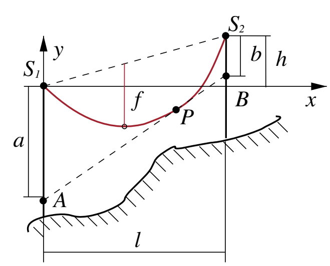


Bild 6.14 Durchhangsparabel

6.42 Ein Konsolträger der Länge l mit veränderlichem rechteckigen Querschnitt der konstanten Breite b und linear von der Position $x \in [0, l]$ abhängiger Höhe h wird an seinem Ende $x = l$ mit der Kraft der Größe F belastet. Seine größere Höhe an der Einspannstelle $x = 0$ ist gleich $h_2 > 0$ und seine kleinere ist am Ende $x = l$ gleich $h_1 > 0$ (siehe **Bild 6.15**). Die Biegespannung in einem beliebigen Querschnitt ist $\sigma = 6M/(bh^2)$, wobei $M = F(l - x)$ das Biegemoment im Querschnitt ist. Gesucht ist die Position des „gefährdeten“ Querschnitts, in dem die Biegespannung am größten ist, und die zugehörige maximale Biegespannung.

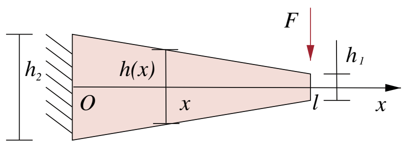


Bild 6.15 Längsschnitt des Konsolträgers

Taylor-Polynome

6.43 Die Funktion f ist in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 0$ durch ein Taylor-Polynom P_3 dritten Grades zu approximieren:

a) $f(x) = \sin x$ **b)** $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \ln(x + 1)$

6.44 Für die Funktion f ist das Taylor-Polynom P_3 dritten Grades an der Stelle $x_0 = 0$ sowie das Restglied R_3 nach Lagrange anzugeben. Der Funktionswert an der Stelle x ist mithilfe des Näherungspolynoms P_3 zu bestimmen. Der Fehler ist mithilfe des Restgliedes R_3 abzuschätzen.

a) $f(x) = \sqrt{1-x},\ x = 0.1$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x},\ x = 1$

6.45 Gesucht ist der Funktionswert von

$$f(x) = 3x^4 + x^3 + 207x^2 + 63$$

an der Stelle $x = 1.01$ ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners.

6.46 Die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$ ist mithilfe eines Taylor-Polynoms zu approximieren, das Glieder bis einschließlich der zweiten Potenz in x enthält. Für $x = 0.5$ ist der Fehler abzuschätzen.

6.47 Das Taylor-Polynom vierten Grades P_4 für die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ sowie das Restglied R_4 ist zu bestimmen. Welcher Fehler tritt höchstens auf, wenn die Funktion f im Intervall $[-30°, 30°]$ durch das berechnete Taylor-Polynom P_4 ersetzt wird?

6.48 Der Wert $\sin 1$ ist mithilfe eines Taylor-Polynoms für die Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ zu berechnen. Wie viel Glieder der Taylorentwicklung müssen berücksichtigt werden, um eine Genauigkeit von drei Dezimalstellen zu erzielen?

Kurve, Tangente, Normale, Krümmung

6.49 Gegeben ist der Punkt $X(3, 4)$ auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt $O(0, 0)$. Gesucht sind: der Abstand des Punktes X vom Mittelpunkt O des Kreises, der Polarwinkel σ des Punktes X, die Gleichung der Tangente im Punkt X an den Kreis, der Tangentenwinkel α, die Krümmung und der Krümmungsradius im Punkt X, der Krümmungsmittelpunkt M, die Koordinaten des Schnittpunktes S des Kreises mit der positiven x-Achse, die Bogenlänge $s = |\,\overset{\frown}{SX}|$.

6.50 Gegeben ist die Ellipse mit der Parameterdarstellung $x_1(t) = a\cos t,\ x_2(t) = b\sin t,\ t \in [0, 2\pi)$ und den Halbachsen $a = 6,\ b = 4$ sowie der Parameter $t = \pi/6$. Gesucht sind: die kartesischen Koordinaten des Punktes X auf der Ellipse mit diesem Parameter, der Abstand des Punktes X vom Mittelpunkt O der Ellipse, der Polarwinkel σ des Punktes X, die Gleichung der Tangente im Punkt X an den Kreis, der Tangentenwinkel α, die Krümmung und der Krümmungsradius im Punkt X, der Krümmungsmittelpunkt M, die Koordinaten des Schnittpunktes S der Ellipse mit der positiven x-Achse, die Bogenlänge $s = |\,\overset{\frown}{SX}|$.

6.51 Gegeben ist die Klothoide mit dem Anfangspunkt im Koordinatenursprung O in natürlicher Parametrisierung mit dem Parameter $a = 175$ sowie der Punkt X auf der Klothoide mit der Bogenlänge $|\,\overset{\frown}{OX}| = 130$. Gesucht sind: die kartesischen Koordinaten des Punktes X, der Polarwinkel σ des Punktes X, die Gleichung der Tangente im Punkt X an die Klothoide, der Tangentenwinkel α, die Krümmung und der Krümmungsradius im Punkt X, der Krümmungsmittelpunkt M, die Koordinaten des Schnittpunktes S der Klothoide mit der x-Achse, die Bogenlänge $s = |\,\overset{\frown}{SX}|$.

Sachwortverzeichnis