H.-W. Alten
A. Djafari Naini
B. Eick
M. Folkerts
H. Schlosser
K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock
H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

2. Auflage

Springer Spektrum

H.-W. Alten
A. Djafari Naini
B. Eick
M. Folkerts
H. Schlosser
K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock
H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

2. Auflage

Springer Spektrum

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten, J. Sander, Th. Sonar, A. Djafari-Naini, B. Schmidt-Thieme, E. Wagner,
Kl.-J. Förster, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Center for Lifelong Learning
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer"
sind außerdem erschienen:

6000 Jahre Mathematik
Wußing
Band 1.Von den Anfängen bis Leibniz und Newton
ISBN 978-3-540-77189-0 (Hardcover)
ISBN 978-3-642-31348-6 (Softcover)
e-ISBN 978-3-540-77192-0
Band 2. Von Euler bis zur Gegenwart
ISBN 978-3-540-77313-9 (Hardcover)
ISBN 978-3-642-31998-3 (Softcover)
e-ISBN 978-3-540-77314-6 (eBook)
im Schuber (beide Bände)
ISBN 978-3-642-02363-7

5000 Jahre Geometrie
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-642-02361-3
e-ISBN 978-3-642-02362-0

3000 Jahre Analysis
Sonar
ISBN 978-3-642-17203-8
e-ISBN 978-3-642-17204-5

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

H.-W. Alten • A. Djafari Naini • B. Eick
M. Folkerts • H. Schlosser • K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock • H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

Zweite, aktualisierte und ergänzte Auflage

Mit 315 Abbildungen, davon 242 in Farbe

Springer Spektrum

Professor Dr. Heinz-Wilhelm Alten
Institut für Mathematik und
Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Professor Dr. Hartmut Schlosser
Institut für Mathematik
und Informatik
Universität Greifswald
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a
17487 Greifswald

Dr. Alireza Djafari Naini
ehemals Zentrum für Fernstudium
und Weiterbildung (ZFW)
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Dr.-habil. Karl-Heinz Schlote
Institut für Mathematik und
Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Prof. Dr. Bettina Eick
Institut Computational Mathematics
Technische Universität Braunschweig
Pockelstr. 14
38106 Braunschweig

Heiko Wesemüller-Kock
Center for lifelong learning
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Professor Dr. Menso Folkerts
Deutsches Museum
LMU, Wissenschaftsgeschichte
Museumsinsel 1
80538 München

Professor Dr. Hans Wußing†
Sächsische Akademie
der Wissenschaften zu Leipzig
04107 Leipzig

ISBN 978-3-642-38238-3
ISBN 978-3-642-38239-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-38239-0

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 08-03, 01-99, 01A05

Einbandgestaltung: deblik, Berlin
Foto Keilschrift: Babylonische Sammlung Yale, Foto W. A. Casselman,
http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc7289-4.html
Satz: TeX-Satz durch Sylvia Voß und Thomas Speck, Jakob Schönborn, Nils Westphal

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist ein Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort des Herausgebers

Algebra und Arithmetik sind nächst der Geometrie diejenigen Teilgebiete der Mathematik, mit denen Menschen sich schon in grauer Vorzeit beschäftigt haben. Die Entwicklung der Zahlvorstellung und der Zahlzeichen läßt sich bis in die Altsteinzeit vor 20 000 bis 30 000 Jahren zurück verfolgen. In dieser Periode entwickelten sich bereits erste Formen elementaren Rechnens, also jenes Gebietes, das schon in den frühen Hochkulturen der Menschheit – in Ägypten und Mesopotamien seit etwa 3000 v. Chr. – zu erstaunlicher Blüte geführt, später von den Griechen als Arithmetik bezeichnet wurde und noch heute als Lehre der vier Grundrechenarten die ersten Jahre des Mathematikunterrichts beherrscht.

Mit Algebra haben sich Menschen indes erst seit etwa 4000 Jahren beschäftigt, als Handel, Feldvermessung und andere geometrische Probleme im Vorderen Orient auf lineare und quadratische Gleichungen führten. Deshalb haben wir diesem vornehmlich der Algebra gewidmeten Nachfolger des im Jahre 2000 erschienenen Buches „5000 Jahre Geometrie“ den Titel „4000 Jahre Algebra“ gegeben. Der Name *Algebra* entstammt jedoch erst einer wesentlich späteren Epoche, nämlich dem Werk „al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-l-muqābala“ des aus Choresmien stammenden persischen Gelehrten al-Ḫwārizmī, in Europa meist als Mohammed ben Musa bekannt und zitiert. Das in diesem Buchtitel enthaltene „al-ǧabr“ bedeutet wörtlich das „Ausüben von Zwang“, in der Gleichungslehre jedoch das „Ergänzen“ einer Gleichung durch Addition gleicher Terme auf beiden Seiten zur Elimination subtraktiver Glieder.

Was es nun mit dieser Algebra auf sich hat, was aus den ersten Bemühungen der Ägypter und Babylonier um das Auflösen von Gleichungen im Laufe der Jahrtausende geworden ist, wie griechische Mathematiker algebraischen Gleichungen mit geometrischen Methoden zu Leibe rückten, wie chinesische und indische Gelehrte Verfahren zur Berechnung der Wurzeln solcher Gleichungen ersannen, wie islamische Wissenschaftler die geometrische Algebra der Griechen durch Übersetzung bewahrten und weiter entwickelten, wie Algebra erst wieder im hohen Mittelalter in Europa betrieben wurde und Rechenmeister der frühen Neuzeit kaufmännisches Rechnen lehrten, wie sich Cardano und Tartaglia im 15. Jahrhundert um die Priorität für die Auflösungsformeln für kubische Gleichungen gestritten haben, wie der nur 27 Jahre alt gewordene Norweger Niels Henrik Abel nach zunächst vergeblichen Versuchen bewies, daß es allgemeine Lösungsformeln für Gleichungen höheren als vierten Grades nicht gibt, wie der im Alter von 20 Jahren im Duell gefallene Franzose Evariste Galois die Grundlagen für die nach ihm benannte Theorie schuf, wie Carl Friedrich Gauß den Fundamentalsatz der Algebra bewies und wie sich – beginnend im 19. Jahrhundert – die Algebra von der Lehre der Gleichungen zur Theorie algebraischer Strukturen im 20. Jahrhundert wandelte und als Computeralgebra in den letzten Jahrzehnten neue Triumphe feierte – all dies und vieles mehr können Sie in diesem Buch erfahren.

Mit diesem Buch legt die Projektgruppe Geschichte der Mathematik der Universität Hildesheim den dritten Band ihrer Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ vor. Zur Einführung erschien 1997 der erste Band mit dem Titel „Überblick und Biographien“ im Franzbecker-Verlag Hildesheim. Ihm folgte 1998 ein Begleitfilm zur Geschichte der Mathematik im Altertum; ein entsprechender Film zum Mittelalter wird demnächst erscheinen. Der im Jahr 2000 beim Springer-Verlag herausgebrachte Band „5000 Jahre Geometrie“ trägt – wie der neue Band „4000 Jahre Algebra“– den Untertitel „Geschichte, Kulturen, Menschen“. Damit will die Projektgruppe ihr besonderes Anliegen ausdrücken, die Geschichte der Mathematik als einen wesentlichen Teil der Kulturgeschichte der Menschheit darzustellen. Die Autoren sind diesem Anliegen auch im vorliegenden Bande vorzüglich gerecht geworden. Wenngleich die Algebra gegenüber der Geometrie weit weniger anschaulich ist, mit ihrem Formalismus manchen zunächst abschrecken mag und sich im letzten Jahrhundert zu höchster Abstraktion entwickelt hat, ist es den Autoren gelungen, die Genese der algebraischen Begriffe und Methoden als kulturgeschichtliches Phänomen zu beschreiben, ihre Entstehung und Ausprägung einzubetten in die politische und wirtschaftliche Situation und die Besonderheiten der Kultur der jeweiligen Periode. Dies erschöpft sich nicht in den jedem Kapitel vorangestellten Tabellen, die einen Überblick über die wichtigsten politischen und kulturellen Ereignisse der jeweiligen Kultur bzw. Epochen vermitteln, sondern wird im ersten Abschnitt jedes Kapitels ausführlicher dargestellt und findet sich in enger Verflechtung im laufenden Text bei der Beschreibung der Verhältnisse und Lebensumstände der schöpferischen Menschen, denen wir die Entwicklung der Algebra verdanken.

Die Kapitel 1 bis 3 stammen im wesentlichen aus der Feder des Mathematikhistorikers und Mitherausgebers Dr. Alireza Djafari Naini, mitgestaltet und ergänzt durch Beiträge des Verfassers dieses Vorworts. Die Kapitel 4 und 5 sind zum großen Teil das Werk von Prof. Dr. Hans Wußing, langjähriger Leiter des Karl-Sudhoff-Institutes der Universität Leipzig, erweitert und ergänzt durch detailreiche Beiträge von Prof. Dr. Menso Folkerts, Leiter des Instituts für Geschichte der Naturwissenschaften der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Die sorgfältige Aufarbeitung und ausführliche Darstellung der Entwicklung der Algebra in der Neuzeit in den Kapiteln 6 – 10 verdanken wir Herrn Dr. Karl-Heinz Schlote, Mathematikhistoriker an der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Den Abschnitt 10.4 über Computeralgebra verfaßte Herr Professor Dr. Hartmut Schlosser, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald.

Auch die Vorschläge für die zahlreichen Abbildungen stammen von den Autoren, ebenso die Vorlagen für die ohne Quellenangabe eingefügten Figuren und Tabellen, die Vorschläge für Aufgaben und die Auflistung der wesentlichen Inhalte und Ergebnisse der Algebra in der jeweiligen Epoche am Ende eines jeden Kapitels.

Die Aufgaben sind von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und verlangen auch sehr unterschiedliche Vorkenntnisse. Für die Bewältigung der Aufgaben in den Kapiteln 1–5 dürften im allgemeinen die auf der Mittelstufe der Gymnasien erworbenen Kenntnisse ausreichen, während für die Aufgaben zu den Kapiteln 6–10 Begriffe und Methoden vonnöten sind, die erst in der Oberstufe der Gymnasien oder im Grundstudium der Mathematik behandelt werden. Dies liegt in der Natur der Sache, weil gerade die Algebra im Laufe der Jahrhunderte zu einem derart komplexen Gebäude mit höchster Abstraktion gewachsen ist, daß es wohl kaum noch Fachleute gibt, die das riesige Gebiet vollständig beherrschen.

Umso mehr danke ich den Autoren, die es verstanden haben, diese so komplizierte Materie – von Außenstehenden oft als trocken empfunden und hinsichtlich moderner Abstraktionen als intellektuelle Spielerei mit Begriffen bezeichnet – in lebendiger und verständlicher Weise darzustellen.

Die den Kapiteln vorangestellten Bildseiten mit den Porträts herausragender Algebraiker der jeweiligen Periode und die Karten entwarf und gestaltete der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock. Ihm danke ich für seine tatkräftige Unterstützung bei der Entwicklung und Gestaltung dieses Bandes, dem Historiker Hubert Mainzer für seine Vorschläge zu den Karten und zur Geschichte des alten China.

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Für die kritische Durchsicht von Texten danke ich den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Scriba und Sesiano, für die Umsetzung der Manuskripte, Abbildungen, Tabellen und Figuren zu druckfertigen Vorlagen auf dem Computer Wolfram Schobert und dem Dipl.-Informatiker Thomas Speck sowie vielen nicht namentlich erwähnten Helfern, ganz besonders aber Kathrin Vornkahl und Sylvia Voß, die den größten Teil dieser komplizierten Arbeit ausführten.

Für die Überprüfung meiner Übersetzung der Textpassagen von Cardano, Tartaglia und Bombelli aus dem Lateinischen bzw. Italienischen danke ich Herrn Dr. Johannes Köhler vom Institut für Philosophie der Universität Hildesheim, für die Unterstützung des Projekts der Leitung der Universität Hildesheim, sowie dem Dekan Prof. Dr. Klaus-Jürgen Förster und dem Leiter des Zentrums für Fernstudium und Weiterbildung, Dr. Erwin Wagner.

Herzlichen Dank sage ich Frau Möller-Meyer und der Universitätsgesellschaft Hildesheim für ihre finanzielle Unterstützung zur Herausgabe farbiger Abbildungen. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band viele anregen, sich intensiver mit der Geschichte der Mathematik und der in 4000 Jahren entwickelten Algebra zu beschäftigen und dazu führen, daß dieses zu enormer Größe und Bedeutung gewachsene Gebiet nicht nur als Stolperstein in der Schule angesehen, sondern als wichtiger Bestandteil unserer Kultur und Zivilisation gewürdigt und als unentbehrliche Grundlage für die Lösung der Probleme in unserer von moderner Technik geprägten Welt begriffen und gefördert wird.

Im Namen der Herausgeber
Hildesheim, im Jaunar 2003 Heinz-Wilhelm Alten

Vorwort zur zweiten Auflage

Mit der neuen Auflage präsentieren wir dem Leser das 2003 erschienene Werk in erheblich umfangreicherer Fassung: Die Texte, Tabellen und Verzeichnisse wurden durch neue Ergebnisse und Erkenntnisse der Forschung aktualisiert, durch weitere Beiträge und einen neuen Abschnitt zur jungen Computeralgebra ergänzt. Viele neue farbige Abbildungen mit erläuternden Unterschriften beleben die Texte.

Mit Hans Wußing ist einer unserer langjährig tätigen Autoren im April 2011 verstorben. Wir danken ihm für zwei Jahrzehnte währende tatkräftige Unterstützung und für zahlreiche Anregungen bei den Bänden dieser Reihe. Wir haben nicht nur einen Autor, sondern auch einen Freund verloren.

Die von ihm und Menso Folkerts stammenden Kap. 4 und 5 hat Herr Prof. Dr. Folkerts in dankenswerter Wiese kritisch durchgesehen und durch neue Beiträge ergänzt. Für die akribische Überarbeitung des gesamten Werkes, Ergänzungen der Texte und Literaturangaben danke ich vor allem Herrn Dr. Karl-Heinz Schlote. Für den Exkurs „Der Turmbau zu Babel“ und die historischen Einführungen in den Vorbemerkungen zu Kap. 5 und 9 sowie für die Recherchen und Unterschriften zu den neuen Abbildungen, die farbige Gestaltung der Bildseiten vor den Kapiteln und vieler Fotos sage ich dem Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock besonderen Dank. Für Literaturhinweise zum Abschnitt 10, Computeralgebra danke ich Herrn Prof. Dr. Hartmut Schlosser, für die Darstellung der neuen und weiteren Entwicklungen dieses modernen Gebietes gilt mein herzlicher Dank Frau Prof. Dr. Bettina Eick, TU Braunschweig.

Anne Gottwald danke ich für die Besorgung der nötigen Lizenzen, Frau Dr. Heidi Kühn, Leipzig, für kritische Durchsicht der gesamten neuen Auflage, unseren Hildesheimer Studenten Jakob Schönborn und Nils Westphal für die technische Bearbeitung der Ergänzungen und Änderungen zu druckfertigen Vorlagen, dem Springer Verlag für die hervorragende Ausstattung dieses Buches. Möge auch dieser Band möglichst viele Leser erreichen und anregen, sich mit der Entstehung und weiteren Entwicklung der Algebra als einem der wichtigen und unentbehrlichen Gebiete der oft als schwer verständlich angesehenen Mathematik zu beschäftigen.

Im Namen der Herausgeber
Hildesheim, im Juli 2013 Heinz-Wilhelm Alten

Inhaltsverzeichnis

Hinweise für den Leser

In den Kapiteln 1 – 5 sind die Lebensdaten der Gelehrten auch im laufenden Text enthalten, in den Kapiteln 6 – 10 wegen der großen Anzahl nur vereinzelt. Im Personenregister sind alle Lebensdaten (soweit bekannt) aufgeführt.

Runde Klammern (...) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.
Eckige Klammern [...] enthalten

– im laufenden Text Hinweise auf Literatur
– unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 7.4.1 die erste Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.

Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt, aber wie die Abbildungen nach Kapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Aufgabe 7.4.2 die zweite Aufgabe zu Teil 4 von Kapitel 7.

Die Transskriptionen chinesischer bzw. indischer Namen und Begriffe erfolgten entsprechend [Martzloff 1997] bzw. [Tropfke 1980]. Die Schreibweise von Namen und Werken islamischer Gelehrter entspricht der wissenschaftlichen Transskription aus dem Arabischen.