



H.-W. Alten
A. Djafari Naini
B. Eick
M. Folkerts
H. Schlosser
K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock
H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

2. Auflage



Springer Spektrum



H.-W. Alten
A. Djafari Naini
B. Eick
M. Folkerts
H. Schlosser
K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock
H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

2. Auflage



Springer Spektrum

Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von

H.-W. Alten, J. Sander, Th. Sonar, A. Djafari-Naini, B. Schmidt-Thieme, E. Wagner,
Kl.-J. Förster, K.-H. Schlotte, H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Center for Lifelong Learning
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer“
sind außerdem erschienen:

6000 Jahre Mathematik

Wußing

Band 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton

ISBN 978-3-540-77189-0 (Hardcover)

ISBN 978-3-642-31348-6 (Softcover)

e-ISBN 978-3-540-77192-0

Band 2. Von Euler bis zur Gegenwart

ISBN 978-3-540-77313-9 (Hardcover)

ISBN 978-3-642-31998-3 (Softcover)

e-ISBN 978-3-540-77314-6 (eBook)

im Schubert (beide Bände)

ISBN 978-3-642-02363-7

5000 Jahre Geometrie

Scriba, Schreiber

ISBN 978-3-642-02361-3

e-ISBN 978-3-642-02362-0

3000 Jahre Analysis

Sonar

ISBN 978-3-642-17203-8

e-ISBN 978-3-642-17204-5

Überblick und Biographien,

Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6

Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),

H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7

Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),

H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

H.-W. Alten • A. Djafari Naini • B. Eick
M. Folkerts • H. Schlosser • K.-H. Schlote
H. Wesemüller-Kock • H. Wußing

4000 Jahre Algebra

Geschichte – Kulturen – Menschen

Zweite, aktualisierte und ergänzte Auflage

Mit 315 Abbildungen, davon 242 in Farbe

Professor Dr. Heinz-Wilhelm Alten
Institut für Mathematik und
Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Dr. Alireza Djafari Naini
ehemals Zentrum für Fernstudium
und Weiterbildung (ZFW)
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Prof. Dr. Bettina Eick
Institut Computational Mathematics
Technische Universität Braunschweig
Pockelstr. 14
38106 Braunschweig

Professor Dr. Menso Folkerts
Deutsches Museum
LMU, Wissenschaftsgeschichte
Museumsinsel 1
80538 München

Professor Dr. Hartmut Schlosser
Institut für Mathematik
und Informatik
Universität Greifswald
Friedrich-Ludwig-Jahn-Str. 15a
17487 Greifswald

Dr.-habil. Karl-Heinz Schlote
Institut für Mathematik und
Angewandte Informatik
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Heiko Wesemüller-Kock
Center for lifelong learning
Universität Hildesheim
Marienburger Platz 22
31141 Hildesheim

Professor Dr. Hans Wußing[†]
Sächsische Akademie
der Wissenschaften zu Leipzig
04107 Leipzig

ISBN 978-3-642-38238-3
DOI 10.1007/978-3-642-38239-0

ISBN 978-3-642-38239-0 (eBook)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte
bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 08-03, 01-99, 01A05

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: deblik, Berlin

Foto Keilschrift: Babylonische Sammlung Yale, Foto W. A. Casselman,
<http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc7289-4.html>

Satz: TeX-Satz durch Sylvia Voß und Thomas Speck, Jakob Schönborn, Nils Westphal

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist ein Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort des Herausgebers

Algebra und Arithmetik sind nächst der Geometrie diejenigen Teilgebiete der Mathematik, mit denen Menschen sich schon in grauer Vorzeit beschäftigt haben. Die Entwicklung der Zahlvorstellung und der Zahlzeichen läßt sich bis in die Altsteinzeit vor 20 000 bis 30 000 Jahren zurück verfolgen. In dieser Periode entwickelten sich bereits erste Formen elementaren Rechnens, also jenes Gebietes, das schon in den frühen Hochkulturen der Menschheit – in Ägypten und Mesopotamien seit etwa 3000 v. Chr. – zu erstaunlicher Blüte geführt, später von den Griechen als Arithmetik bezeichnet wurde und noch heute als Lehre der vier Grundrechenarten die ersten Jahre des Mathematikunterrichts beherrscht.

Mit Algebra haben sich Menschen indes erst seit etwa 4000 Jahren beschäftigt, als Handel, Feldvermessung und andere geometrische Probleme im Vorderen Orient auf lineare und quadratische Gleichungen führten. Deshalb haben wir diesem vornehmlich der Algebra gewidmeten Nachfolger des im Jahre 2000 erschienenen Buches „5000 Jahre Geometrie“ den Titel „4000 Jahre Algebra“ gegeben. Der Name *Algebra* entstammt jedoch erst einer wesentlich späteren Epoche, nämlich dem Werk „al-Kitāb al-muḥtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wa-l-muqābala“ des aus Choresmien stammenden persischen Gelehrten al-Ḥwārizmī, in Europa meist als Mohammed ben Musa bekannt und zitiert. Das in diesem Buchtitel enthaltene „al-ğabr“ bedeutet wörtlich das „Ausüben von Zwang“, in der Gleichungslehre jedoch das „Ergänzen“ einer Gleichung durch Addition gleicher Terme auf beiden Seiten zur Elimination subtraktiver Glieder.

Was es nun mit dieser Algebra auf sich hat, was aus den ersten Bemühungen der Ägypter und Babylonier um das Auflösen von Gleichungen im Laufe der Jahrtausende geworden ist, wie griechische Mathematiker algebraischen Gleichungen mit geometrischen Methoden zu Leibe rückten, wie chinesische und indische Gelehrte Verfahren zur Berechnung der Wurzeln solcher Gleichungen ersannen, wie islamische Wissenschaftler die geometrische Algebra der Griechen durch Übersetzung bewahrten und weiter entwickelten, wie Algebra erst wieder im hohen Mittelalter in Europa betrieben wurde und Rechenmeister der frühen Neuzeit kaufmännisches Rechnen lehrten, wie sich Cardano und Tartaglia im 15. Jahrhundert um die Priorität für die Auflösungsformeln für kubische Gleichungen gestritten haben, wie der nur 27 Jahre alt gewordene Norweger Niels Henrik Abel nach zunächst vergeblichen Versuchen bewies, daß es allgemeine Lösungsformeln für Gleichungen höheren als vierten Grades nicht gibt, wie der im Alter von 20 Jahren im Duell gefallene Franzose Evariste Galois die Grundlagen für die nach ihm benannte Theorie schuf, wie Carl Friedrich Gauß den Fundamentalsatz der Algebra bewies und wie sich – beginnend im 19. Jahrhundert – die Algebra von der Lehre der Gleichungen zur Theorie algebraischer Strukturen im 20. Jahrhundert wandelte und als Computeralgebra in den letzten Jahrzehnten neue Triumphe feierte – all dies und vieles mehr können Sie in diesem Buch erfahren.

Mit diesem Buch legt die Projektgruppe Geschichte der Mathematik der Universität Hildesheim den dritten Band ihrer Reihe „Vom Zählstein zum Computer“ vor. Zur Einführung erschien 1997 der erste Band mit dem Titel „Überblick und Biographien“ im Franzbecker-Verlag Hildesheim. Ihm folgte 1998 ein Begleitfilm zur Geschichte der Mathematik im Altertum; ein entsprechender Film zum Mittelalter wird demnächst erscheinen. Der im Jahr 2000 beim Springer-Verlag herausgebrachte Band „5000 Jahre Geometrie“ trägt – wie der neue Band „4000 Jahre Algebra“ – den Untertitel „Geschichte, Kulturen, Menschen“. Damit will die Projektgruppe ihr besonderes Anliegen ausdrücken, die Geschichte der Mathematik als einen wesentlichen Teil der Kulturgeschichte der Menschheit darzustellen. Die Autoren sind diesem Anliegen auch im vorliegenden Bande vorzüglich gerecht geworden. Wenngleich die Algebra gegenüber der Geometrie weit weniger anschaulich ist, mit ihrem Formalismus manchen zunächst abschrecken mag und sich im letzten Jahrhundert zu höchster Abstraktion entwickelt hat, ist es den Autoren gelungen, die Genese der algebraischen Begriffe und Methoden als kulturgeschichtliches Phänomen zu beschreiben, ihre Entstehung und Ausprägung einzubetten in die politische und wirtschaftliche Situation und die Besonderheiten der Kultur der jeweiligen Periode. Dies erschöpft sich nicht in den jedem Kapitel vorangestellten Tabellen, die einen Überblick über die wichtigsten politischen und kulturellen Ereignisse der jeweiligen Kultur bzw. Epochen vermitteln, sondern wird im ersten Abschnitt jedes Kapitels ausführlicher dargestellt und findet sich in enger Verflechtung im laufenden Text bei der Beschreibung der Verhältnisse und Lebensumstände der schöpferischen Menschen, denen wir die Entwicklung der Algebra verdanken.

Die Kapitel 1 bis 3 stammen im wesentlichen aus der Feder des Mathematikhistorikers und Mitherausgebers Dr. Alireza Djafari Naini, mitgestaltet und ergänzt durch Beiträge des Verfassers dieses Vorworts. Die Kapitel 4 und 5 sind zum großen Teil das Werk von Prof. Dr. Hans Wußing, langjähriger Leiter des Karl-Sudhoff-Institutes der Universität Leipzig, erweitert und ergänzt durch detailreiche Beiträge von Prof. Dr. Menso Folkerts, Leiter des Instituts für Geschichte der Naturwissenschaften der Ludwig-Maximilians-Universität München.

Die sorgfältige Aufarbeitung und ausführliche Darstellung der Entwicklung der Algebra in der Neuzeit in den Kapiteln 6 – 10 verdanken wir Herrn Dr. Karl-Heinz Schlote, Mathematikhistoriker an der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Den Abschnitt 10.4 über Computeralgebra verfaßte Herr Professor Dr. Hartmut Schlosser, Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald.

Auch die Vorschläge für die zahlreichen Abbildungen stammen von den Autoren, ebenso die Vorlagen für die ohne Quellenangabe eingefügten Figuren und Tabellen, die Vorschläge für Aufgaben und die Auflistung der wesentlichen Inhalte und Ergebnisse der Algebra in der jeweiligen Epoche am Ende eines jeden Kapitels.

Die Aufgaben sind von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und verlangen auch sehr unterschiedliche Vorkenntnisse. Für die Bewältigung der Aufgaben in den Kapiteln 1–5 dürften im allgemeinen die auf der Mittelstufe der Gymnasien erworbenen Kenntnisse ausreichen, während für die Aufgaben zu den Kapiteln 6–10 Begriffe und Methoden vonnöten sind, die erst in der Oberstufe der Gymnasien oder im Grundstudium der Mathematik behandelt werden. Dies liegt in der Natur der Sache, weil gerade die Algebra im Laufe der Jahrhunderte zu einem derart komplexen Gebäude mit höchster Abstraktion gewachsen ist, daß es wohl kaum noch Fachleute gibt, die das riesige Gebiet vollständig beherrschen.

Umso mehr danke ich den Autoren, die es verstanden haben, diese so komplizierte Materie – von Außenstehenden oft als trocken empfunden und hinsichtlich moderner Abstraktionen als intellektuelle Spielerei mit Begriffen bezeichnet – in lebendiger und verständlicher Weise darzustellen.

Die den Kapiteln vorangestellten Bildseiten mit den Porträts herausragender Algebraiker der jeweiligen Periode und die Karten entwarf und gestaltete der Medienwissenschaftler und Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock. Ihm danke ich für seine tatkräftige Unterstützung bei der Entwicklung und Gestaltung dieses Bandes, dem Historiker Hubert Mainzer für seine Vorschläge zu den Karten und zur Geschichte des alten China.

Für einige Abbildungen in diesem Buch ist es uns nicht gelungen, die Rechtsinhaber zu ermitteln bzw. unsere Anfragen blieben unbeantwortet. Betroffene und Personen, die zur Klärung in einzelnen Fällen beitragen können, werden gebeten, sich beim Verlag zu melden.

Für die kritische Durchsicht von Texten danke ich den Kollegen Folkerts, Kahle, Purkert, Scriba und Sesiano, für die Umsetzung der Manuskripte, Abbildungen, Tabellen und Figuren zu druckfertigen Vorlagen auf dem Computer Wolfram Schobert und dem Dipl.-Informatiker Thomas Speck sowie vielen nicht namentlich erwähnten Helfern, ganz besonders aber Kathrin Vornkahl und Sylvia Voß, die den größten Teil dieser komplizierten Arbeit ausführten.

Für die Überprüfung meiner Übersetzung der Textpassagen von Cardano, Tartaglia und Bombelli aus dem Lateinischen bzw. Italienischen danke ich Herrn Dr. Johannes Köhler vom Institut für Philosophie der Universität Hildesheim, für die Unterstützung des Projekts der Leitung der Universität Hildesheim, sowie dem Dekan Prof. Dr. Klaus-Jürgen Förster und dem Leiter des Zentrums für Fernstudium und Weiterbildung, Dr. Erwin Wagner.

Herzlichen Dank sage ich Frau Möller-Meyer und der Universitätsgesellschaft Hildesheim für ihre finanzielle Unterstützung zur Herausgabe farbiger Abbildungen. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band viele anregen, sich intensiver mit der Geschichte der Mathematik und der in 4000 Jahren entwickelten Algebra zu beschäftigen und dazu führen, daß dieses zu enormer Größe und Bedeutung gewachsene Gebiet nicht nur als Stolperstein in der Schule angesehen, sondern als wichtiger Be-

standteil unserer Kultur und Zivilisation gewürdigt und als unentbehrliche Grundlage für die Lösung der Probleme in unserer von moderner Technik geprägten Welt begriffen und gefördert wird.

Hildesheim, im Januar 2003

Im Namen der Herausgeber
Heinz-Wilhelm Alten

Vorwort zur zweiten Auflage

Mit der neuen Auflage präsentieren wir dem Leser das 2003 erschienene Werk in erheblich umfangreicherer Fassung: Die Texte, Tabellen und Verzeichnisse wurden durch neue Ergebnisse und Erkenntnisse der Forschung aktualisiert, durch weitere Beiträge und einen neuen Abschnitt zur jungen Computeralgebra ergänzt. Viele neue farbige Abbildungen mit erläuternden Unterschriften beleben die Texte.

Mit Hans Wußing ist einer unserer langjährig tätigen Autoren im April 2011 verstorben. Wir danken ihm für zwei Jahrzehnte währende tatkräftige Unterstützung und für zahlreiche Anregungen bei den Bänden dieser Reihe. Wir haben nicht nur einen Autor, sondern auch einen Freund verloren.

Die von ihm und Menso Folkerts stammenden Kap. 4 und 5 hat Herr Prof. Dr. Folkerts in dankenswerter Weise kritisch durchgesehen und durch neue Beiträge ergänzt. Für die akribische Überarbeitung des gesamten Werkes, Ergänzungen der Texte und Literaturangaben danke ich vor allem Herrn Dr. Karl-Heinz Schlote. Für den Exkurs „Der Turmbau zu Babel“ und die historischen Einführungen in den Vorbemerkungen zu Kap. 5 und 9 sowie für die Recherchen und Unterschriften zu den neuen Abbildungen, die farbige Gestaltung der Bildseiten vor den Kapiteln und vieler Fotos sage ich dem Mitherausgeber Heiko Wesemüller-Kock besonderen Dank. Für Literaturhinweise zum Abschnitt 10, Computeralgebra danke ich Herrn Prof. Dr. Hartmut Schlosser, für die Darstellung der neuen und weiteren Entwicklungen dieses modernen Gebietes gilt mein herzlicher Dank Frau Prof. Dr. Bettina Eick, TU Braunschweig.

Anne Gottwald danke ich für die Besorgung der nötigen Lizenzen, Frau Dr. Heidi Kühn, Leipzig, für kritische Durchsicht der gesamten neuen Auflage, unseren Hildesheimer Studenten Jakob Schönborn und Nils Westphal für die technische Bearbeitung der Ergänzungen und Änderungen zu druckfertigen Vorlagen, dem Springer Verlag für die hervorragende Ausstattung dieses Buches. Möge auch dieser Band möglichst viele Leser erreichen und anregen, sich mit der Entstehung und weiteren Entwicklung der Algebra als einem der wichtigen und unentbehrlichen Gebiete der oft als schwer verständlich angesehenen Mathematik zu beschäftigen.

Hildesheim, im Juli 2013

Im Namen der Herausgeber
Heinz-Wilhelm Alten

Inhaltsverzeichnis

1	Anfänge von Arithmetik und Algebra	1
1.1	Zählen, Zahlen und Rechnen am Beginn	2
1.2	Arithmetik und Algebra im alten Ägypten	6
1.2.0	Abriss der kulturgeschichtlichen Entwicklung im Niltal	8
1.2.1	Altägyptische Zahlzeichen	12
1.2.2	Arithmetik im alten Ägypten	13
1.2.3	Primitive Algebra	16
1.3	Mesopotamische (Babylonische) Algebra	21
1.3.0	Entwicklung früher Hochkulturen in Mesopotamien . .	22
1.3.1	Zahlzeichen in Keilschrift	28
1.3.2	Die Methode des einfachen falschen Ansatzes	30
1.3.3	Lineare Gleichungssysteme	32
1.3.4	Nichtlineare Systeme und quadratische Gleichungen .	35
1.3.5	Kubische Gleichungen: Der Beginn eines 3500 Jahre alten Problems	39
1.3.6	Näherungswerte von $\sqrt{2}$	40
1.4	Aufgaben zu Kapitel 1	45
2	Die geometrische Algebra der Griechen	47
2.0	Einführung	50
2.1	Beginn des abstrakten Denkens	52
2.1.1	Ionische Periode (ca. 600–450 v. Chr.)	53
2.1.2	Athenische Periode (450–300 v. Chr.)	55
2.1.3	Hellenistische Periode (ca. 300 v. Chr.–ca. 150 n. Chr.)	59
2.1.4	Spätantike (ca. 150– ca. 500 n. Chr.)	63
2.2	Das besondere Merkmal der griechischen Algebra	65
2.3	Lineare und quadratische Gleichungen	67
2.3.1	Die „Elemente“ des Euklid	67
2.3.2	Die Methode der Flächenanlegung	71
2.3.3	Lineare Gleichungen	73
2.3.4	Rein quadratische Gleichungen	74
2.3.5	Ein Diorismos	75
2.3.6	Lösung quadratischer Gleichungen nach Euklid	78
2.4	Kubische und biquadratische Gleichungen	80
2.4.1	Kubische Gleichungen in „Kugel und Zylinder“ von Archimedes	80
2.4.2	Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks durch „Einschiebung“ von Archimedes	85
2.4.3	Dreiteilung des Winkels nach Archimedes	89
2.4.4	Archimedes und die biquadratischen Gleichungen . . .	90
2.4.5	Das Delische Problem – die Würfelverdopplung	91
2.5	Die Quadratur des Kreises mittels der Quadratrix	96

2.6	„Formale Algebra“	100
2.6.1	Formale Algebra vor Diophant	100
2.6.2	Synkopierte Algebra	101
2.6.3	„Arithmetika“ von Diophant	103
2.7	Aufgaben zu Kapitel 2	109
3	Algebra im Orient	111
3.1	Algebra in China	112
3.1.0	Geschichtlicher Abriss	113
3.1.1	Zahlzeichen	123
3.1.2	Quadrat- und Kubikwurzeln	125
3.1.3	Der doppelte falsche Ansatz (Überschuss und Fehlbetrag)	127
3.1.4	Lineare Gleichungssysteme	128
3.1.5	Algebra im 13. Jahrhundert	130
3.2	Algebra in Indien	135
3.2.0	Geschichtlicher Abriss	137
3.2.1	Zahlzeichen und das dezimale Stellenwertsystem	141
3.2.2	Algebraische Ausdrucksweise	144
3.2.3	Näherungsverfahren für Wurzeln	145
3.2.4	Lineare Gleichungen	146
3.2.5	Quadratische Gleichungen	148
3.3	Algebra in den Ländern des Islam	153
3.3.0	Geschichtlicher Abriss	155
3.3.1	Die Verbreitung der indischen Ziffern in den islamischen Ländern	169
3.3.2	Algebraische Ausdrucksweise	171
3.3.3	Lineare und unbestimmte Gleichungen	174
3.3.4	Quadratische Gleichungen	175
3.3.5	Arithmetisierung der Algebra	182
3.3.6	Die (geometrische) Theorie von ʿUmar Ḥayyām für die Gleichungen dritten Grades	184
3.3.7	Eine Abhandlung von Ḥayyām über Algebra	190
3.3.8	Gleichungen vierten Grades	193
3.3.9	Numerische Auflösung algebraischer Gleichungen	194
3.4	Aufgaben zu Kapitel 3	203
4	Algebra im Europa des Mittelalters und der Renaissance	207
4.0	Einführung	209
4.1	Übersetzungen aus dem Arabischen	216
4.2	Leonardo von Pisa	217
4.3	Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris	222
4.4	Die Entwicklung in Italien	226
4.4.1	Luca Pacioli	231
4.5	Entwicklungen in Westeuropa	233

4.5.1	Nicolas Chuquet	233
4.5.2	Robert Recorde	234
4.5.3	Simon Stevin	236
4.5.4	Pedro Nunes	238
4.6	Frühe Algebra im deutschsprachigen Raum - die Deutsche Coß	241
4.6.1	Die sog. Deutsche Coß	243
4.6.2	Adam Ries, Abraham Ries u. Jacob Ries als Cossisten	248
4.6.3	Christoph Rudolff und Michael Stifel	254
4.7	Zur Entwicklung des Zahlbegriffes	257
4.8	Aufgaben	261
5	Algebra wird zur selbständigen Disziplin (16.-18. Jh.)	265
5.0	Historische Einführung	267
5.1	Gleichungen dritten und vierten Grades	270
5.1.1	Lösungen für Gleichungen dritten Grades	270
5.1.2	Niccolò Tartaglia	272
5.1.3	Girolamo Cardano	275
5.1.4	Auflösung von Gleichungen vierten Grades	279
5.1.5	Rafaelo Bombelli	280
5.2	Viète und Descartes	284
5.2.1	François Viète (Franciscus Vieta)	284
5.2.2	René Descartes (Cartesius)	292
5.2.3	Die algebraischen Methoden von Descartes	294
5.3	Newton und Euler	301
5.3.1	Isaac Newton	301
5.3.2	Zur Vorgeschichte des Fundamentalsatzes der Algebra	303
5.3.3	Leonhard Euler und der Fundamentalsatz der Algebra	305
5.3.4	Euler und sein Algebralehrbuch	309
5.4	Aufgaben	315
6	Algebra in der 2. Hälfte des 18. und am Beginn des 19. Jahrhunderts	319
6.0	Historische Einführung	321
6.1	Die Begründung des Rechnens in gewöhnlichen Zahlbereichen	324
6.2	Die Begründung der komplexen Zahlen	329
6.3	Algebra als Methode	334
6.4	Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung n -ten Grades in Radikalen	340
6.4.1	Die Ergebnisse von Lagrange	342
6.4.2	Die Lösungsansätze von Vandermonde und Waring . .	345
6.4.3	Ruffini und erste Ergebnisse über Permutationsgruppen	347
6.4.4	Gauß und die Auflösung der Kreisteilungsgleichung . .	349
6.4.5	Abels Beweis für die Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung 5. Grades	352

6.5	Zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra durch Gauß	355
6.6	Die Herausforderung der Algebra durch neue Objektbereiche	360
6.6.1	Determinanten	360
6.6.2	Einfluss der „Disquisitiones arithmeticae“ von Gauß	366
6.7	Aufgaben zu Kapitel 6	371
7	Die Herausbildung erster Strukturbegriffe	373
7.0	Vorbemerkungen	375
7.1	Die Auflösbarkeit algebraischer Gleichungen – Galois-Theorie	377
7.1.1	Der Beitrag von Niels Henrik Abel	377
7.1.2	Die Lösung des Problems durch Évariste Galois	381
7.2	Von Permutationen zu Permutationsgruppen	389
7.3	Auf dem Weg zur abstrakten Algebra	394
7.3.1	George Peacock	397
7.3.2	Augustus de Morgan	399
7.3.3	Duncan Farquharson Gregory	402
7.3.4	George Boole und die Algebra der Logik	404
7.4	Erste Definitionen abstrakter algebraischer Systeme	408
7.4.1	William Rowan Hamilton und die Quaternionen	408
7.4.2	Arthur Cayley – Oktonionen und die erste Definition des abstrakten Gruppenbegriffs	417
7.5	Zahlentheoretische Einflüsse auf die Entwicklung der Algebra	422
7.5.1	Gaußsche ganze Zahlen und Reziprozitätsgesetze	422
7.5.2	Kummers Schöpfung der idealen Zahlen	428
7.6	Die Fortschritte in der linearen Algebra	432
7.6.1	Die Entwicklung des Matrizenkalküls	436
7.6.2	Die Entwicklung der Theorie der Vektorräume	442
7.6.3	Die Arbeiten von Hermann Günther Graßmann	446
7.7	Aufgaben zu Kapitel 7	457
8	Die Entwicklungen der Algebra von 1850 bis 1880	463
8.0	Vorbemerkungen	465
8.1	Weitere Fortschritte im Verständnis der Galois-Theorie	470
8.1.1	Die Rezeption der Galois-Theorie in Deutschland	471
8.1.2	Die Darstellung der Galois-Theorie durch Joseph Alfred Serret und Camille Jordan	474
8.2	Die große Zeit der Invariantentheorie	483
8.2.1	Die britische Schule der Invariantentheorie	484
8.2.2	Die Weiterentwicklung und die Formulierung des Grundproblems der Invariantentheorie	487
8.3	Die Theorie der Transformationsgruppen	491
8.3.1	Kleins Erlanger Programm und die Theorie der endlichen Transformationsgruppen	491
8.3.2	Die Liesche Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen	498

8.4	Die ersten Strukturuntersuchungen bei hyperkomplexen Systemen	503
8.4.1	Hankels „Theorie der complexen Zahlensysteme“	504
8.4.2	Die Klassifikation der Algebren bei Benjamin Peirce	505
8.5	Aufgaben zu Kapitel 8	512
9	Algebra an der Wende zum 20. Jahrhundert	513
9.0	Historische Einführung	516
9.1	Mengenlehre und Algebra der Logik	520
9.1.1	Schröders Algebra der Logik und Freges Logizismus	523
9.1.2	Die axiomatische Methode	529
9.2	Die Herausbildung des abstrakten Gruppenbegriffs	533
9.3	Dedekind und Kronecker: Algebraische Zahlen, Ideale und Divisoren, Körper	548
9.4	Die axiomatische Fixierung des Körperbegriffs	559
9.5	Die Profilierung weiterer Teilgebiete der Algebra	572
9.5.1	Hyperkomplexe Systeme (Algebren)	572
9.5.2	Darstellungen von Gruppen und Algebren	583
9.5.3	Die algebraische Geometrie	588
9.6	Aufgaben zu Kapitel 9	594
10	Die Algebra im 20. Jahrhundert	599
10.0	Historische Einführung	603
10.1	Die Etablierung der modernen abstrakten Algebra	608
10.1.1	Aufbau einer allgemeinen Ring- und Idealtheorie	609
10.1.2	„Moderne Algebra“	614
10.2	Von der Algebra zur Mathematik der Strukturen	621
10.2.1	Die Entstehung der Verbandstheorie	623
10.2.2	Bourbaki und Strukturkonzepte	629
10.3	Die Wechselwirkung der abstrakten Algebra	634
10.3.1	Die algebraische Geometrie	634
10.3.2	Anwendungen der Algebra in der Physik	639
10.3.3	Die algebraische Durchdringung der Topologie	642
10.3.4	Algebraische Methoden in anderen Bereichen	645
10.4	Computeralgebra	649
10.4.1	Vorbemerkungen	649
10.4.2	Charakterisierung der Computeralgebra	651
10.4.3	Die Entwicklung von Algorithmen	654
10.4.4	Die Entwicklung von Computeralgebrasystemen	662
10.4.5	Anwendungen der Computeralgebra, mathematische Bildung, Präsentation in der Gesellschaft	663
10.5	Computeralgebra im Jahre 2013	665
10.5.1	Algorithmen	666
10.5.1.1	Algorithmische Gruppentheorie	666
10.5.1.2	Algorithmische algebraische Zahlentheorie	668

10.5.2	Software Systeme	669
10.5.3	Anwendungen	669
10.5.3.1	Der Zauberwürfel	669
10.5.3.2	Die Nullstellen eines Polynoms	671
10.5.3.3	Kristallographische Gruppen	671
10.5.3.4	Robotik	674
10.5.3.5	Kryptographie	675
10.6	Aufgaben zu Kapitel 10	678
Literaturverzeichnis		679
Abbildungsverzeichnis		715
Personenregister mit Lebensdaten		723
Index		735

Hinweise für den Leser

In den Kapiteln 1 – 5 sind die Lebensdaten der Gelehrten auch im laufenden Text enthalten, in den Kapiteln 6 – 10 wegen der großen Anzahl nur vereinzelt. Im Personenregister sind alle Lebensdaten (soweit bekannt) aufgeführt.

Runde Klammern (...) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.

Eckige Klammern [...] enthalten

- im laufenden Text Hinweise auf Literatur
- unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Abb. 7.4.1 die erste Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.

Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt, aber wie die Abbildungen nach Kapiteln nummeriert, z. B. bedeutet Aufgabe 7.4.2 die zweite Aufgabe zu Teil 4 von Kapitel 7.

Die Transskriptionen chinesischer bzw. indischer Namen und Begriffe erfolgten entsprechend [Martzloff 1997] bzw. [Tropfke 1980]. Die Schreibweise von Namen und Werken islamischer Gelehrter entspricht der wissenschaftlichen Transskription aus dem Arabischen.