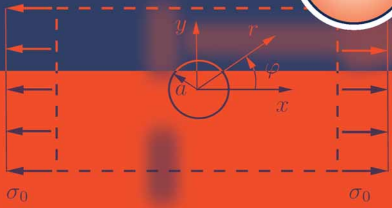
Gross · Hauger · Schröder · Werner

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 4

Hydromechanik,
Elemente der Höheren Mechanik,
Numerische Methoden

NEU



Springer

Springer-Lehrbuch

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderen die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr- und Fachbücher.

Prof. Dr. Werner Hauger
studierte Angewandte Mathematik und Mechanik an der Universität Karlsruhe und promovierte an der Northwestern University in Evanston/Illinois. Er war mehrere Jahre in der Industrie tätig, hatte eine Professur an der Universität der Bundeswehr in Hamburg und wurde 1978 an die TU Darmstadt berufen. Sein Arbeitsgebiet ist die Festkörpermechanik mit den Schwerpunkten Stabilitätstheorie, Plastodynamik und Biomechanik. Er ist Autor von Lehrbüchern und Mitherausgeber internationaler Fachzeitschriften.

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
studierte Bauingenieurwesen, promovierte an der Universität Hannover und habilitierte an der Universität Stuttgart. Nach einer Professur für Mechanik an der TU Darmstadt ist er seit 2001 Professor für Mechanik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die theoretische und die computerorientierte Kontinuumsmechanik sowie die phänomenologische Materialtheorie mit Schwerpunkten auf der Formulierung anisotroper Materialgleichungen und der Weiterentwicklung der Finite-Elemente-Methode.

Prof. Dr. mont. Ewald A. Werner
studierte Werkstoffwissenschaften, promovierte und habilitierte an der Montanuniversität Leoben. Er forschte am Erich Schmid Institut für Festkörperphysik der österreichischen Akademie der Wissenschaften und an der ETH Zürich. Von 1997 bis 2002 war er Professor für Mechanik an der TU München, seit 2002 leitet er dort den Lehrstuhl für Werkstoffkunde und Werkstoffmechanik. Seine Arbeitsgebiete sind die Metallphysik und die Werkstoffmechanik. Er ist Koautor von Lehrbüchern und Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften.

Dietmar Gross · Werner Hauger
Jörg Schröder · Ewald Werner

Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 4

Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden

1. Auflage

Mit 350 Abbildungen

Springer

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross
Prof. Dr. Werner Hauger
Institut für Mechanik
Technische Universität Darmstadt
Hochschulstraße 1
64289 Darmstadt

Prof. Dr. mont. Ewald A. Werner
Lehrstuhl für Werkstoffkunde
und Werkstoffmechanik
TU München
Boltzmannstraße 15
85747 Garching b. München

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder
Institut für Mechanik
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen
Universitätsstraße 15
45117 Essen

ISBN 978-3-540-21488-5 e-ISBN 978-3-540-49843-8

DOI 10.1007/978-3-540-49843-8

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlagen der Autoren
Herstellung: LE-TEX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.com

Vorwort

Mit dem vorliegenden Band stellen wir Studienmaterial zu ausgewählten Gebieten der Technischen Mechanik zur Verfügung. Behandelt werden die Grundlagen der Hydromechanik, der Elastizitätstheorie, der Tragwerkslehre, der Schwingungen von Kontinua, der Stabilitätstheorie, der Plastizität und Viskoelastizität sowie der Numerischen Methoden. Mit dieser Stoffauswahl kann das Werk als Ergänzung zum Lehrbuch Technische Mechanik 4 angesehen werden, an dem zwei der Autoren beteiligt sind. Unabhängig davon kann die Sammlung von Formeln und Aufgaben eine Hilfestellung beim Eindringen in die genannten Gebiete sein.

Bei der Gestaltung der Aufgaben haben wir uns um möglichste Klarheit und Verständlichkeit bemüht. Auch haben wir versucht, die Themengebiete weitgehend abzudecken. Deutlich warnen wollen wir aber vor einem reinen Nachlesen der Lösungen. Sinnvoll wird diese Sammlung nur dann genutzt, wenn die Leserin oder der Leser zunächst selbständig versucht, zur Lösung einer Aufgabe zu gelangen und erst danach auf den hier angebotenen Lösungsweg blickt.

Selbstverständlich kann diese Sammlung kein Lehrbuch ersetzen. Wem die theoretischen Grundlagen oder die Begründung verschiedener Formeln und Verfahren nicht mehr geläufig sind, den verweisen wir auf das schon genannte Lehrbuch Technische Mechanik 4 sowie auf die darin enthaltenen Literaturempfehlungen.

Dem Springer-Verlag danken wir für die gute Zusammenarbeit und die ansprechende Ausstattung des Buches. Gedankt sei an dieser Stelle auch Vera Ebbing, Sarah Brinkhues, Dominik Brands und Hamid Aslami in Essen sowie Volker Mannl (†), Cornelia Schwarz und Robert Werner in München für die Unterstützung bei der Erstellung des Manuskripts.

Wir wünschen dem Band eine freundliche Aufnahme bei der Leserschaft und sind für kritische Anmerkungen und Anregungen dankbar.

Darmstadt, Essen und München, im Dezember 2007

D. Gross
W. Hauger
J. Schröder
E. Werner

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Hydromechanik

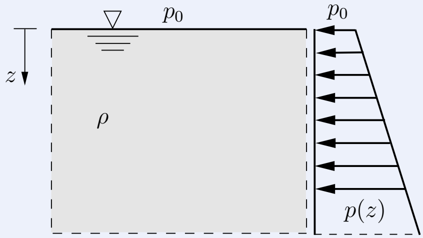
1

Hydrostatik

Voraussetzung: Die Dichte ρ der Flüssigkeit ist konstant.

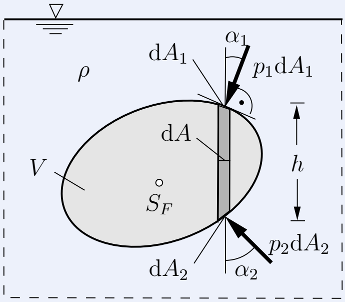
Druck in einer ruhenden Flüssigkeit: Der Druck p ist eine Flächenkraft. Er ist in einer ruhenden Flüssigkeit in allen (gedachten) Schnitten durch einen Punkt gleich groß und wirkt orthogonal zur jeweiligen Schnittfläche: hydrostatischer Spannungszustand. In einer Flüssigkeit unter der Wirkung der Schwerkraft wächst der Druck linear mit der Tiefe:

$$p(z) = p_0 + \rho g z.$$



Auftrieb: Der Auftrieb eines ganz oder teilweise in eine Flüssigkeit eingetauchten Körpers ist gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge:

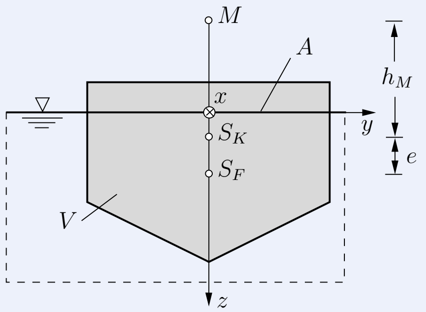
$$F_A = \rho g V.$$



Die Wirkungslinie des Auftriebs geht durch den Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Schwimmender Körper: Ein schwimmender Körper taucht so tief in eine Flüssigkeit ein, bis das Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich seinem eigenen Gewicht ist. Die entsprechende Schwimmlage ist stabil, wenn das Metazentrum M oberhalb des Schwerpunkts S_K des Körpers liegt:

$$h_M = \frac{I_x}{V} - e \begin{cases} > 0 : \text{stabile Gleichgewichtslage,} \\ < 0 : \text{instabile Gleichgewichtslage.} \end{cases}$$



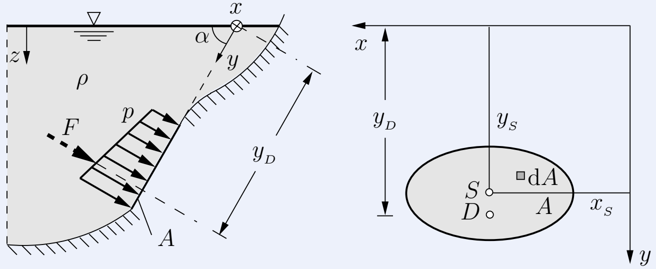
I_x: Flächenträgheitsmoment der von der x, y-Ebene aus dem Körper geschnittenen Fläche A (Schwimmfläche),

V: Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge,

e: Abstand des Körperschwerpunkts S_K vom Schwerpunkt S_F der verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Druck einer Flüssigkeit auf ebene Flächen: Die resultierende Kraft F einer Flüssigkeit auf eine ebene Fläche A ist gleich dem Produkt aus dem Druck p_S im Flächenschwerpunkt S und der Fläche:

$$F = p_S A = \rho g z_S A.$$



Die Wirkungslinie von F geht durch den Druckmittelpunkt D:

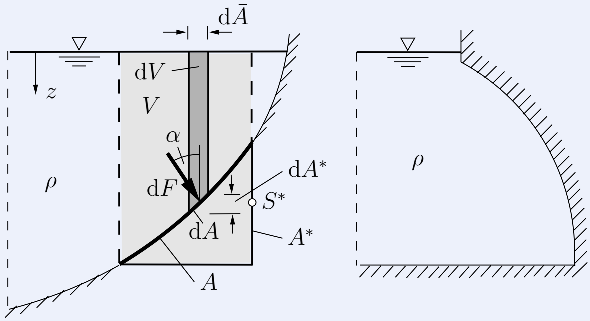
$$x_D = -\, I_{xy}/S_x, \quad y_D = I_x/S_x = y_S + I_{xS}/(y_S A).$$

I_x, I_{xy}: Flächenträgheitsmomente bzgl. des x, y-Koordinatensystems,
S_x: statisches Moment bzgl. der x-Achse,
I_{xS}: Flächenträgheitsmoment bzgl. einer zur x-Achse parallelen Achse durch den Schwerpunkt S der Fläche,
y_S: Abstand des Schwerpunkts S von der x-Achse.

Druck einer Flüssigkeit auf gekrümmte Flächen: Die Vertikalkomponente F_V der resultierenden Kraft einer Flüssigkeit auf eine gekrümmte Fläche ist gleich dem Gewicht der Flüssigkeit, die sich oberhalb der Fläche befindet:

$$F_V = \rho g V.$$

Ihre Wirkungslinie geht durch den Schwerpunkt des Flüssigkeitsvolumens V.



Die Horizontalkomponente F_H ist das Produkt aus der projizierten Fläche A^* und dem Druck p_{S^*} im Schwerpunkt S^* dieser Fläche:

$$F_H = p_{S^*} A^*.$$

Sie stimmt mit der Kraft überein, die von der Flüssigkeit auf die vertikale ebene Fläche A^* ausgeübt wird. Diese Aussagen gelten sinngemäß auch dann, wenn sich eine Flüssigkeit unterhalb einer gekrümmten Fläche befindet.

Hydrodynamik

Kinematik

Das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ beschreibt die Bewegung einer Flüssigkeit: jedem Ort $\boldsymbol{x}$ in der Flüssigkeit wird eine Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ zur Zeit t zugewiesen. Das Geschwindigkeitsfeld ist stationär für $\partial \boldsymbol{v}/\partial t = \boldsymbol{0}$, ansonsten instationär.

Bahnlinie: Kurve der Bahn, die ein Flüssigkeitsteilchen im Laufe der Zeit zurücklegt. Die Bahnlinie $\boldsymbol{x}(t)$ ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t), t).$$

Stromlinien: Kurvenschar, deren Tangentenrichtung in jedem Raumpunkt $\boldsymbol{x}$ mit der Richtung des örtlichen Geschwindigkeitsvektors übereinstimmt. Das Stromlinienfeld ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(s), t),$$

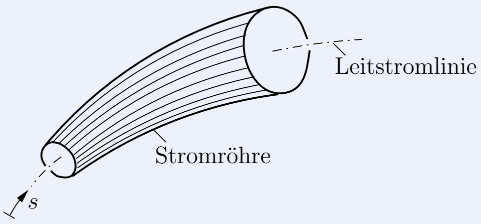
wobei s die Bogenlänge einer Stromlinie ist. Bei stationären Strömungen fallen die Bahn- und die Stromlinien zusammen.

Stromfadentheorie

Bei der stationären Strömung einer idealen Flüssigkeit in einer Stromröhre hängen die Geschwindigkeit und der Druck nur von der Bogenlänge s entlang der Leitstromlinie ab:

$$v = v(s),$$

$$p = p(s).$$

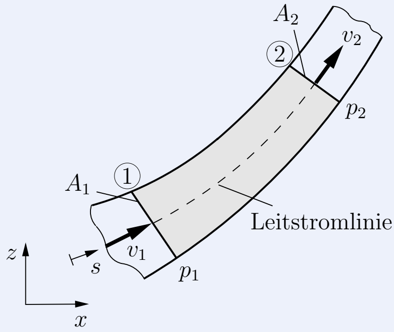


Kontinuitätsgleichung: Das pro Zeiteinheit durch einen beliebigen festen Querschnitt strömende Flüssigkeitsvolumen (Volumenstrom: $Q = A\,v$) ist konstant:

$$Av = \text{const},$$

d.h.

$$A_1 v_1 = A_2 v_2.$$



Bernoullische Gleichung: a) Für reibungsfreie Flüssigkeiten (Strömungen ohne Energieverluste) gilt

$$\rho v^2/2 + p + \rho g z = \text{const},$$

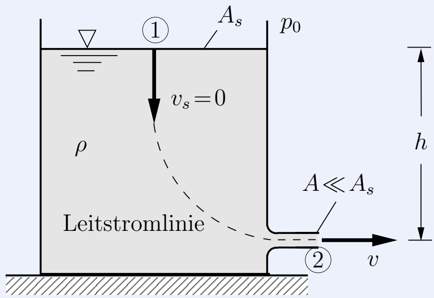
bzw.

$$v^2/(2g) + p/(\rho g) + z = H = \text{const}.$$

Staudruck (dyn. Druck): $\rho v^2/2$,	Geschwindigkeitshöhe: $v^2/(2g)$,
statischer Druck: p,	Druckhöhe: $p/(\rho g)$,
geodätischer Druck: $\rho g z$,	Ortshöhe: z,
Gesamtdruck: $\rho v^2/2 + p$,	hydraulische Höhe: H.

Anwendung: Ausfluss aus einem großen Behälter. Torricellische Ausflussformel:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

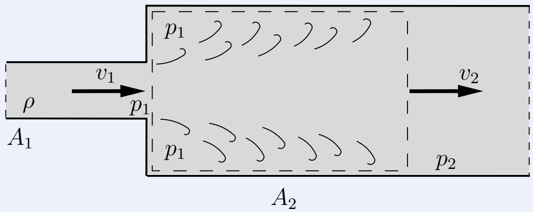


b) Für reibungsbehaftete Flüssigkeiten (Strömungen mit Energieverlusten) gilt die verallgemeinerte Bernoullische Gleichung

$$\rho v_1^2/2 + p_1 + \rho g z_1 = \rho v_2^2/2 + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_v.$$

Druckverlust: Δp_v, Druckverlustzahl: $\zeta = \dfrac{\Delta p_v}{\rho v_1^2/2}$.

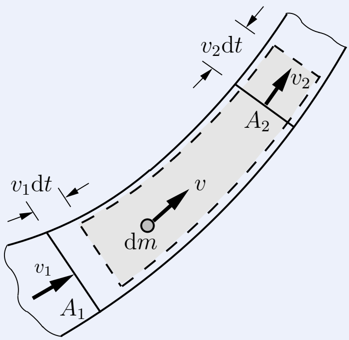
Beispiel: Carnotscher Stoßverlust



$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2.$$

Impulssatz: Die resultierende Kraft auf eine abgeschlossene Flüssigkeitsmenge ist gleich der Differenz des pro Zeiteinheit aus dem entsprechenden Kontrollvolumen ausfließenden Impulses und des einfließenden Impulses:

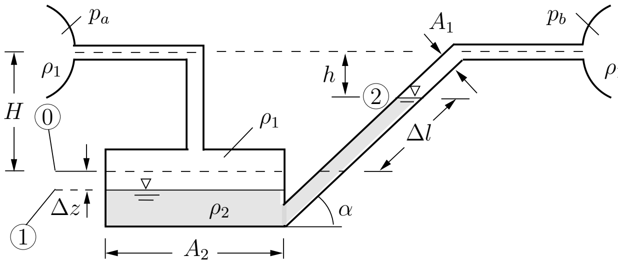
$$\boldsymbol{F} = \dot{m}\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1).$$



Massenstrom:	$\dot{m} = \rho A v = \rho\, Q$,
ausfließender Impulsstrom:	$\dot{m}\boldsymbol{v}_2$,
einfließender Impulsstrom:	$\dot{m}\boldsymbol{v}_1$.

A1.1 **Aufgabe 1.1** Zwei Behälter, die jeweils mit einem Gas der Dichte ρ_1 gefüllt sind, werden durch ein Manometer verbunden. Die Dichte der Manometerflüssigkeit ist ρ_2. Wenn die Drücke in den Behältern übereinstimmen ($p_a = p_b$), befinden sich die Trennflächen zwischen den Gasen und der Flüssigkeit in der Höhe ⓪. Bei Überdruck $\Delta p = p_a - p_b > 0$ im linken Behälter senkt sich die Flüssigkeit im Manometergefäß um die Höhe Δz, im Rohr steigt sie um die Strecke Δl.

Man bestimme den Überdruck Δp als Funktion von Δl.



Lösung Wir sehen die Dichten in den Gasen als konstant an. Dann können wir die Gase wie Flüssigkeiten behandeln. Die Drücke in den Trennflächen im Gefäß (Höhe ①), bzw. im Steigrohr (Höhe ②) sind somit nach der hydrostatischen Druckgleichung durch

$$p_1 = p_a + \rho_1\, g\,(H + \Delta z) \quad \text{bzw.} \quad p_2 = p_b + \rho_1\, g\, h$$

gegeben. Der Druck im Rohr in der Höhe ① stimmt mit dem Druck in der Trennfläche im Gefäß überein:

$$p_1 = p_2 + \rho_2\, g\,(\Delta l \sin\alpha + \Delta z)$$

$$\rightarrow \quad p_a + \rho_1\, g\,(H + \Delta z) = p_b + \rho_1\, g\, h + \rho_2\, g\,(\Delta l \sin\alpha + \Delta z).$$

Für das Volumen V der aus dem Gefäß in das Rohr verdrängten Flüssigkeit gilt

$$V = A_2 \Delta z = \frac{A_1}{\sin\alpha} \Delta l \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \Delta z = \frac{A_1}{A_2} \Delta l .$$

Mit $H - h = \Delta l \sin\alpha$ folgt

$$\underline{\underline{\Delta p = p_a - p_b = \Delta l\, g\,(\rho_2 - \rho_1)(A_1/A_2 + \sin\alpha).}}$$

Die Bestimmung eines kleinen Druckunterschieds Δp wird umso genauer, je größer Δl ist. Daher sollten z. B. bei gegebenen Dichten der Winkel α und das Flächenverhältnis A_1/A_2 möglichst klein sein.