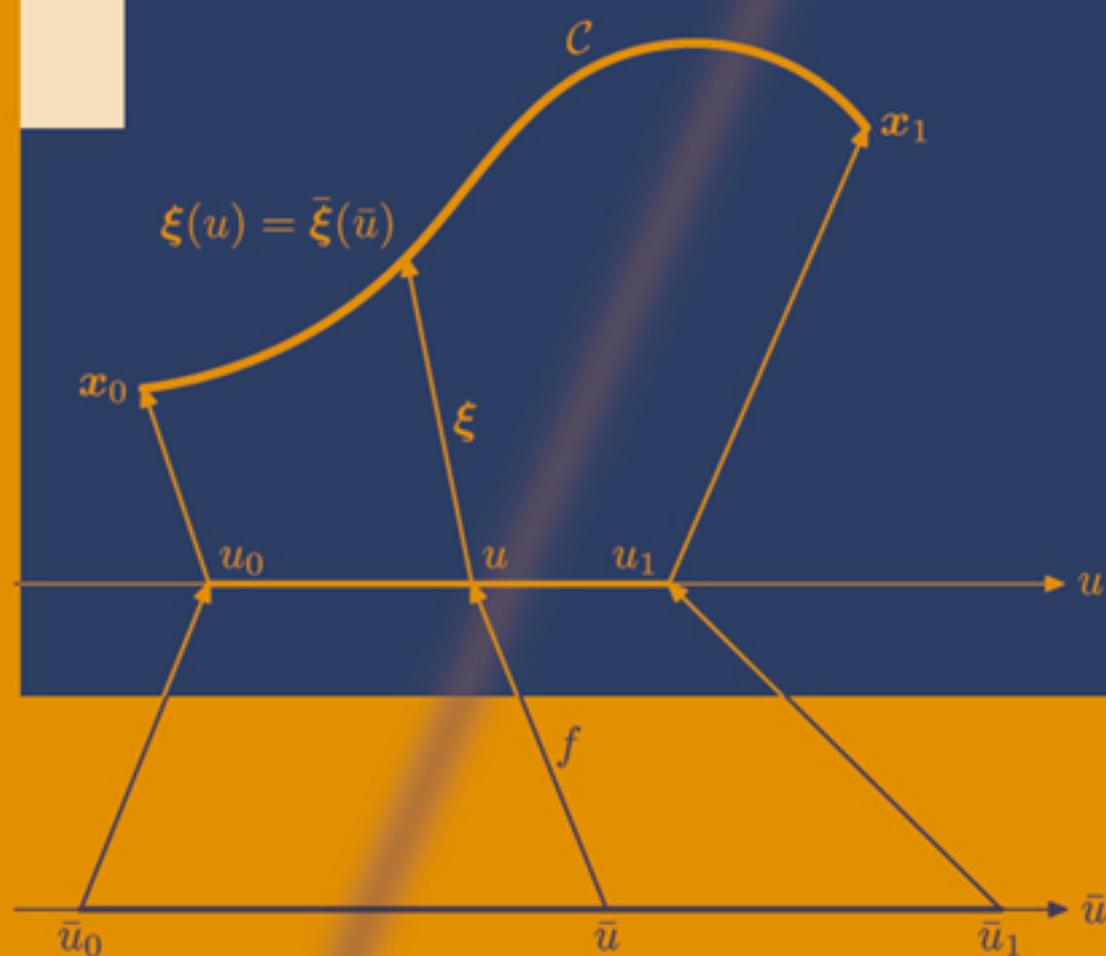


Hertel Mathematikbuch zur Physik



Springer-Lehrbuch

Peter Hertel

Mathematikbuch zur Physik

 Springer

Prof. Dr. Peter Hertel
Universität Osnabrück
Fachbereich Physik
Barbarastraße 7
49069 Osnabrück
peter.hertel@uni-osnabrueck.de

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-540-89043-0

e-ISBN 978-3-540-89044-7

DOI 10.1007/978-3-540-89044-7

Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: WMX Design GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

Vorwort

Dieses *Mathematikbuch* soll Studierende der Physik und verwandter Disziplinen durch das Studium begleiten. Es ist vom Lehrbuch über *Theoretische Physik* des Verfassers¹ inspiriert. Alles, was an Mathematik im *Physikbuch* vorkommt und dort entweder vorausgesetzt oder lediglich erwähnt wird, ist hier dargestellt. Umgekehrt enthält das *Mathematikbuch* nur die Gegenstände, die im *Physikbuch* direkt oder indirekt angesprochen werden, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das Buch beschreibt den minimalen Mathematik-Wortschatz, über den Physiker verfügen sollten. Es ist optimal in dem Sinne, dass nichts ausgebreitet wird, was sich zwar in der Nähe der behandelten Gegenstände befindet, aber selten benötigt wird. Wer wie ich 40 Jahre lang Theoretische Physik und die dazugehörige Mathematik unterrichtet hat, der weiß, auf welche Kenntnisse es ankommt.

Die in diesem *Mathematikbuch* behandelten Gegenstände und Verfahren, auch solche aus der Numerik, decken hinreichend ab, was man wissen und können muss, um mit Erfolg Physik zu studieren. Das Buch ist so gegliedert, dass man diesen oder jenen Abschnitt beim ersten Lesen auslassen kann. Es ist somit sowohl für Bachelor- als auch für Masterstudiengänge mit hohem Mathematikanteil geeignet.

Dementsprechend ist das Buch wesentlich mehr als eine Starthilfe für Studienanfänger. Allerdings ist es nicht als Lehrbuch für das Selbststudium der Mathematik gedacht, dazu ist es viel zu straff gefasst. Vielmehr wird versucht, Studierende der Physik in mathematischer Hinsicht durch das gesamte Studium zu begleiten, von Anfang bis Ende, von einfach bis anspruchsvoll, von Abbildung bis Zufallsvariable². Das *Mathematikbuch* will Zusammenhänge herstellen, Übersicht schaffen, Klammer sein zwischen den verschiedenen Gebieten, also dolmetschen zwischen Physik, Mathematik und Numerik. Übungsaufgaben passen nicht in dieses Konzept.

Die gymnasiale Oberstufe als Ausgangspunkt, das Mathematikstudium, das je nach Universität ganz unterschiedlich angelegt ist, und die mathematische Zusatzausbildung durch die Fachwissenschaft: diese drei Bestandteile sind oft

¹ Hertel, *Theoretische Physik*, Springer Verlag 2007, ISBN 978-3-540-36644-7

² eine Anspielung auf den ersten und den letzten Eintrag im Glossar

nicht oder nur schlecht aufeinander abgestimmt. Diesen Mangel kann das vorliegende Buch zwar nicht beheben, aber es kann das Physikstudium oder das Studium eines verwandten Faches von Anfang an erleichtern, indem es diejenigen Mathematikkenntnisse vermittelt, die wirklich gebraucht werden. Dementsprechend kommen viele Begriffserklärungen, Definitionen und Feststellungen vor, eine Reihe von Beweisideen, aber verhältnismäßig wenig Beweise, dafür umso mehr Beispiele.

Der Aufbau folgt im Wesentlichen dem Verlauf des Physikstudiums.

Die Schule hat die *Grundlagen* vermittelt, und es wird beschrieben, was davon besonders wichtig ist. Das folgende Kapitel widmet sich den *Gewöhnlichen Differentialgleichungen*, wie sie für das Studium der Mechanik gebraucht werden. In der Elektrodynamik stehen *Felder* und *Partielle Differentialgleichungen* im Vordergrund; damit befassen sich das dritte und das vierte Kapitel. Lineare Räume und *Lineare Operatoren*, Schlüsselbegriffe in der Quantentheorie, werden als nächstes abgehandelt. Unter *Verschiedenes* ist zusammengestellt, was sich bisher nicht zwanglos einfügen ließ: Fourier-Zerlegung, Analytische Funktionen, Tensoren, Transformationsgruppen, Optimierung, Variationsrechnung und Legendre-Transformation. Das letzte Kapitel vermittelt *Tiefere Einsichten*: Grundlagen der Topologie, Maßtheorie und Lebesgue-Integral, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Verallgemeinerte Funktionen.

In das Buch eingewoben ist eine Einführung in die Numerik. Wie man Integrale ausrechnet, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen löst, Modelle an Messdaten anpasst, das Spektrum von Zeitreihen analysiert und die Ergebnisse graphisch darstellt: all das kommt vor und vieles mehr, immer im passenden Kontext. Physiker wollen Probleme lösen, und wenn das analytisch nicht möglich ist, also beinahe niemals, dann muss man rechnen, oder noch besser: eine Maschine mit dem Rechnen betrauen. Das Buch zeigt, wie man das macht. Der Anhang enthält eine Einführung in das Programmpaket MATLAB, das auf die Anforderungen der Naturwissenschaften und der Technik zugeschnitten ist.

Zum Anhang gehört außerdem ein ausführliches *Glossar*. Es erläutert und vernetzt die wichtigsten mathematischen Begriffe und Aussagen und ist damit gleichsam eine Zusammenfassung dieses auf Übersicht und Verständnis angelegten Buches.

Ich habe vor vielen Jahren Mathematik an der Universität Hamburg studiert, bei Emil Artin, Ernst Witt und Lothar Collatz. Diese Professoren, denen ich noch heute dankbar bin, waren nicht nur hervorragende Wissenschaftler, sondern auch gute, um ihre Studenten bemühte Lehrer. Wenn es dem Lehrzweck diente, vermochten sie zu vereinfachen, und sie scheuten sich nicht, die zumeist simplen Grundgedanken bloßzulegen. Ihr Vorbild hat, so hoffe ich, auf dieses Buch abgefärbt.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Mengen und Zahlen	1
1.1.1	Mengen	2
1.1.2	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	3
1.1.3	Reelle Zahlen	4
1.1.4	Komplexe Zahlen	5
1.2	Stetige Funktionen	5
1.2.1	Funktionen	6
1.2.2	Stetigkeit	7
1.2.3	Zusammengesetzte Funktionen	7
1.3	Differenzieren	8
1.3.1	Ableitung	8
1.3.2	Regeln	9
1.3.3	Beispiele	10
1.3.4	Potenzreihen	11
1.4	Elementare Funktionen	12
1.4.1	Exponentialfunktion	13
1.4.2	Logarithmus	14
1.4.3	Sinus und Kosinus	16
1.4.4	Andere Winkelfunktionen	17
1.4.5	Hyperbolischer Sinus, Kosinus und Tangens	19
1.4.6	Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument	20
1.4.7	Mehr zu elementaren Funktionen	20
1.5	Integrieren	21
1.5.1	Integral	21
1.5.2	Wie man Integrale berechnet	22
1.5.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	24

1.5.4	Partielles Integrieren	25
1.5.5	Substitutionsregel	25
1.5.6	Die Quadratur des Kreises	26
2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	29
2.1	Erste Ordnung	29
2.1.1	Richtungsfeld	30
2.1.2	Integration	31
2.1.3	Trennung der Variablen	31
2.1.4	Lineare Differentialgleichungen	32
2.1.5	Kausale Lösungen	33
2.2	Zweite Ordnung	34
2.2.1	Definition und Klassifikation	35
2.2.2	Einfache Beispiele	35
2.2.3	Konstante Koeffizienten	36
2.2.4	Erzwungene harmonische gedämpfte Schwingung	38
2.3	Mehr über gewöhnliche Differentialgleichungen	39
2.3.1	Systeme gekoppelter Differentialgleichungen	40
2.3.2	Anfangswertproblem und Runge-Kutta-Verfahren	40
2.3.3	Methode der finiten Differenzen	43
2.3.4	Eigenwertprobleme	44
3	Felder	47
3.1	Skalar- und Vektorfelder	47
3.1.1	Verschiebung und Drehung	48
3.1.2	Felder	49
3.1.3	Gradient	50
3.1.4	Divergenz	51
3.1.5	Tensoren und Einsteinsche Summenkonvention	51
3.1.6	Vektorprodukt	52
3.1.7	Rotation	54
3.1.8	Zweifache Ableitungen von Feldern	54
3.1.9	Bedeutung von Gradient, Divergenz und Rotation	55
3.2	Wegintegrale	58
3.2.1	Parametrisierung	59
3.2.2	Wegintegral	59
3.2.3	Bogenlänge	61

3.2.4	Ein Beispiel	61
3.2.5	Wege und Wegstücke	62
3.2.6	Wegintegral eines Gradientenfeldes	62
3.3	Flächenintegrale und der Satz von Stokes	62
3.3.1	Fläche	63
3.3.2	Flächenintegral	64
3.3.3	Der Satz von Stokes	65
3.3.4	Ein Beispiel	66
3.4	Gebietsintegrale und der Satz von Gauß	67
3.4.1	Gebiet	67
3.4.2	Gebietsintegral	68
3.4.3	Wechsel der Parametrisierung	69
3.4.4	Der Gaußsche Satz	69
4	Partielle Differentialgleichungen	71
4.1	Problemarten	71
4.1.1	Notation	72
4.1.2	Randwertprobleme	72
4.1.3	Anfangswertprobleme	73
4.1.4	Eigenwertprobleme	73
4.1.5	Stephan-Probleme	74
4.2	Reduktion auf gewöhnliche Differentialgleichungen	74
4.2.1	Symmetrie	74
4.2.2	Reihenentwicklung	75
4.3	Methode der Finiten Differenzen	77
4.3.1	Differenzen anstelle von Differentialen	78
4.3.2	Schwingungsmoden	78
4.3.3	Äquidistante Stützstellen	79
4.3.4	Der Laplace-Operator	79
4.3.5	Dünn besetzte Matrizen	80
4.3.6	Die Lösung	81
4.4	Methode der Finiten Elemente	82
4.4.1	Schwache Form einer partiellen Differentialgleichung ...	83
4.4.2	Galerkin-Methode	83
4.4.3	Finite Elemente	84
4.5	Crank-Nicolson-Verfahren	87
4.5.1	Zwei Ausbreitungsprobleme	87

4.5.2	Stabilitätsüberlegungen	88
4.5.3	Wärmeleitungsgleichung	90
5	Lineare Operatoren	93
5.1	Lineare Abbildungen	93
5.1.1	Lineare Räume	94
5.1.2	Lineare Abbildungen	95
5.1.3	Ring der linearen Abbildungen	95
5.2	Lineare Operatoren im Hilbert-Raum	96
5.2.1	Hilbert-Raum	96
5.2.2	Lineare Operatoren	99
5.3	Projektoren auf Teilräume	99
5.3.1	Teilräume	100
5.3.2	Projektoren	100
5.3.3	Zerlegung der Eins	101
5.4	Normale Operatoren	102
5.4.1	Spektralzerlegung	102
5.4.2	Selbstadjungierte Operatoren	103
5.4.3	Positive Operatoren	104
5.4.4	Unitäre Operatoren	104
5.4.5	Dichteoperatoren	105
5.4.6	Normale Operatoren im \mathbb{C}^n	106
5.5	Funktionen von Operatoren	107
5.5.1	Potenzreihe eines Operators	107
5.5.2	Funktion eines normalen Operators	108
5.5.3	Ein Beispiel	109
5.5.4	Abelsche Gruppen und Erzeugende	110
5.6	Translationen	110
5.6.1	Periodische Randbedingungen	110
5.6.2	Definitionsbereich des Impulses	111
5.6.3	Spektralzerlegung des Impulses	112
5.7	Fourier-Transformation	113
5.7.1	Fourier-Reihe	113
5.7.2	Fourier-Entwicklung	114
5.7.3	Fourier-Integral	114
5.8	Ort und Impuls	116
5.8.1	Testfunktionen	116

5.8.2	Kanonische Vertauschungsregeln	116
5.8.3	Unschärfebeziehung	117
5.8.4	Quasi-Eigenfunktionen	118
5.9	Leiter-Operatoren	119
5.9.1	Auf- und Absteige-Operatoren	119
5.9.2	Grundzustand und angeregte Zustände	120
5.9.3	Harmonischer Oszillator	121
5.10	Drehgruppe	122
5.10.1	Drehimpuls	122
5.10.2	Eigenräume	122
5.10.3	Bahndrehimpuls	124
5.10.4	Laplace-Operator	125
6	Verschiedenes	127
6.1	Fourier-Zerlegung	128
6.1.1	Fourier-Summe	128
6.1.2	Schnelle Fourier-Transformation	130
6.1.3	Fourier-Reihe	133
6.1.4	Fourier-Zerlegung periodischer Funktionen	134
6.1.5	Fourier-Integrale	135
6.1.6	Faltung	136
6.2	Analytische Funktionen	136
6.2.1	Komplexe Zahlen	137
6.2.2	Komplexe Differenzierbarkeit	139
6.2.3	Potenzreihen	142
6.2.4	Komplexe Wegintegrale	144
6.3	Tensoren	148
6.3.1	Verschiedene Koordinatensysteme	149
6.3.2	Kontra- und kovariant	150
6.3.3	Tensoren	150
6.3.4	Kovariante Ableitung	152
6.4	Transformationsgruppen	153
6.4.1	Gruppen	153
6.4.2	Transformationen	155
6.4.3	Galilei-Gruppe	156
6.4.4	Poincaré-Gruppe	157
6.4.5	Kristall-Symmetrie	160

6.5	Optimierung	163
6.5.1	Kostenfunktion	163
6.5.2	Methode der kleinsten Fehlerquadrate	164
6.5.3	Endlich statt unendlich viele Dimensionen	166
6.5.4	Nicht-lineare Optimierung	169
6.6	Variationsrechnung	171
6.6.1	Fréchet-Ableitung eines Funktionals	171
6.6.2	Kürzester Weg zwischen zwei Punkten	172
6.6.3	Variation mit Nebenbedingung	173
6.6.4	Mehr Beispiele	174
6.7	Legendre-Transformation	176
6.7.1	Konvexe Mengen und konvexe Funktionen	176
6.7.2	Summe, Supremum und Infimum, Krümmung	177
6.7.3	Legendre-Transformation einer konvexen Funktion	177
6.7.4	Ableitung der Legendre-Transformierten	179
7	Tiefere Einsichten	181
7.1	Grundlagen der Topologie	182
7.1.1	Topologischer Raum	182
7.1.2	Metrischer Raum	183
7.1.3	Linearer Raum mit Norm	184
7.1.4	Linearer Raum mit Skalarprodukt	185
7.1.5	Konvergente Folgen	185
7.1.6	Stetigkeit	186
7.1.7	Banachscher Fixpunktsatz	187
7.2	Maßtheorie und Lebesgue-Integral	189
7.2.1	Maßraum	189
7.2.2	Borel-Mengen	190
7.2.3	Messbare Funktionen	190
7.2.4	Lebesgue-Integral	191
7.2.5	Bemerkungen	192
7.3	Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie	195
7.3.1	Wahrscheinlichkeitsraum	195
7.3.2	Zufallsvariable	196
7.3.3	Gesetz der großen Zahlen	199
7.3.4	Zentraler Grenzwertsatz	199
7.4	Verallgemeinerte Funktionen	200

7.4.1	Testfunktionen	200
7.4.2	Distributionen	201
7.4.3	Ableitung	202
7.4.4	Fourier-Transformation.....	203
7.4.5	Beispiele	204
Matlab	207
A.1	Einführung in MATLAB.....	207
A.1.1	Kommandozeile	208
A.1.2	Matrizen	209
A.1.3	Punktweise Operationen.....	211
A.1.4	Matrixoperationen	212
A.1.5	Programme	213
A.1.6	Funktionen	216
A.1.7	Vermischtes.....	218
A.2	Kommentierte Programme	222
A.2.1	Einfache Graphik.....	222
A.2.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Kepler-Problem ..	224
A.2.3	Gewöhnliche Differentialgleichungen: Randwertproblem	228
A.2.4	Partielle Differentialgleichungen: Laplace-Operator.....	230
Glossar	233
Sachverzeichnis	263

Grundlagen

Dieses Kapitel beschreibt Grundkenntnisse in Mathematik, die jede Studentin und jeder Student von der Schule mitbringen sollte. Man kann es auch als Übersicht über die Schulmathematik verstehen, als eine Zusammenfassung. Es hat wenig Sinn, sich mit den folgenden Kapiteln zu beschäftigen, wenn hier erhebliche Lücken zu Tage treten. Solche Lücken müssen geschlossen werden, ehe man mit dem Studium der Mathematik fortfahren kann.

Im Abschnitt über *Mengen und Zahlen* wiederholen wir skizzenhaft die Grundbegriffe der Mengenlehre und behandeln die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Wir deuten an, was komplexe Zahlen sind, die für gewöhnlich nicht zum Schulstoff gehören; dieser Gegenstand wird später breiter abgehandelt. Mithilfe konvergenter Folgen erklären wir, was *stetige Funktionen* sind und wodurch sich *differenzierbare Funktionen* auszeichnen. Dabei wiederholen wir die wichtigsten Rechenregeln. Ein längerer Abschnitt ist den *elementaren Funktionen* gewidmet, der Exponentialfunktion, dem Logarithmus, Kosinus und Sinus sowie verwandten Funktionen. Der Abschnitt über *Integrieren* behandelt, wie man die Fläche unter einem Graphen ermittelt, als Grenzwert, und wie man eine große Anzahl von Integralen analytisch berechnen kann. Nebenbei führen wir auch vor, wie man ein Integral numerisch auswertet.

1.1 Mengen und Zahlen

Die elementare Mengenlehre stellt Begriffe und Bezeichnungen bereit, mit denen man sich mathematisch präzise ausdrücken kann. Zahlen sind erst einmal natürliche Zahlen, Antworten auf die Frage *wie viel?* Um gewisse Gleichungen lösen zu können und um Grenzwerte konvergenter Folgen dabei zu haben, erweitert man zu den Mengen der ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Wir skizzieren, warum man komplexe Zahlen einführen muss und stellen fest, dass man damit bei der umfangreichsten Zahlenmenge angekommen ist.

1.1.1 Mengen

Gleichartige Elemente a , b und so weiter kann man zu einer Menge A zusammenfassen. Man beschreibt Mengen oft durch die Auflistung der Elemente, $A = \{a, b, \dots\}$. Die Reihenfolge ist ohne Bedeutung, und kein Element darf mehrfach vorkommen. Man schreibt $a \in A$, wenn das Element a in der Menge A enthalten ist. Dass a nicht zur Menge A gehört, drückt man durch $a \notin A$ aus.

Häufig werden Mengen durch Eigenschaften definiert, so wie zum Beispiel durch $A = \{b \in B \mid b > 1\}$. A ist die Menge aller Elemente b aus B , für die zusätzlich $b > 1$ gilt. Dabei muss natürlich für B erklärt sein, was $>$ und 1 bedeuten.

Die Menge A selber darf kein Element der Menge A sein. Solche Konstruktionen sind nicht erlaubt, sie führen zu Widersprüchen¹. Die Partei aller Parteilosen bringt das auf den Punkt.

Wenn eine Menge überhaupt kein Element enthält, spricht man von der leeren Menge und schreibt \emptyset dafür. Es gibt nur eine leere Menge. Keine Äpfel ist dasselbe wie keine Birnen.

Die Vereinigungsmenge $C = A \cup B$ zweier Mengen A und B besteht aus den Elementen, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind. Aus $c \in C$ folgt, dass entweder $c \in A$ oder $c \in B$ gilt, oder beides.

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7, 8\}$ berechnet man $A \cup B = \{1, 3, 7, 8\}$.

Der Mengendurchschnitt $C = A \cap B$ besteht aus den Elementen c , die sowohl in A als auch in B enthalten sind, also in beiden.

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7, 8\}$ gilt $A \cap B = \{3, 7\}$.

Man sagt, dass B eine Teilmenge von A sei, $B \subseteq A$, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist. Man kann $B \subseteq A$ auch so ausdrücken: A ist eine Obermenge von B .

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7\}$ gilt $B \subseteq A$.

Mit $A \setminus B$ (sprich A ohne B) bezeichnet man diejenige Menge von Elementen, die in A , aber nicht in B enthalten sind:

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}. \quad (1.1)$$

Mit $A = \{1, 3, 7, 8\}$ und $B = \{1, 7, 9\}$ gilt $A \setminus B = \{3, 8\}$.

Zwei Mengen A und B sind disjunkt, wenn sie kein Element gemeinsam haben, wenn also $A \cap B = \emptyset$ gilt.

¹ Die Menge aller Mengen, die sich nicht selber enthalten ist ein bekanntes Beispiel für ein Paradoxon. Nennen wir sie M . Wenn $M \in M$ gilt, dann ist M eine Menge, die sich selber enthält. Also gehört M nicht zu M . Dann ist M eine Menge, die sich nicht selber enthält, und damit müsste sie zu M gehören. . .