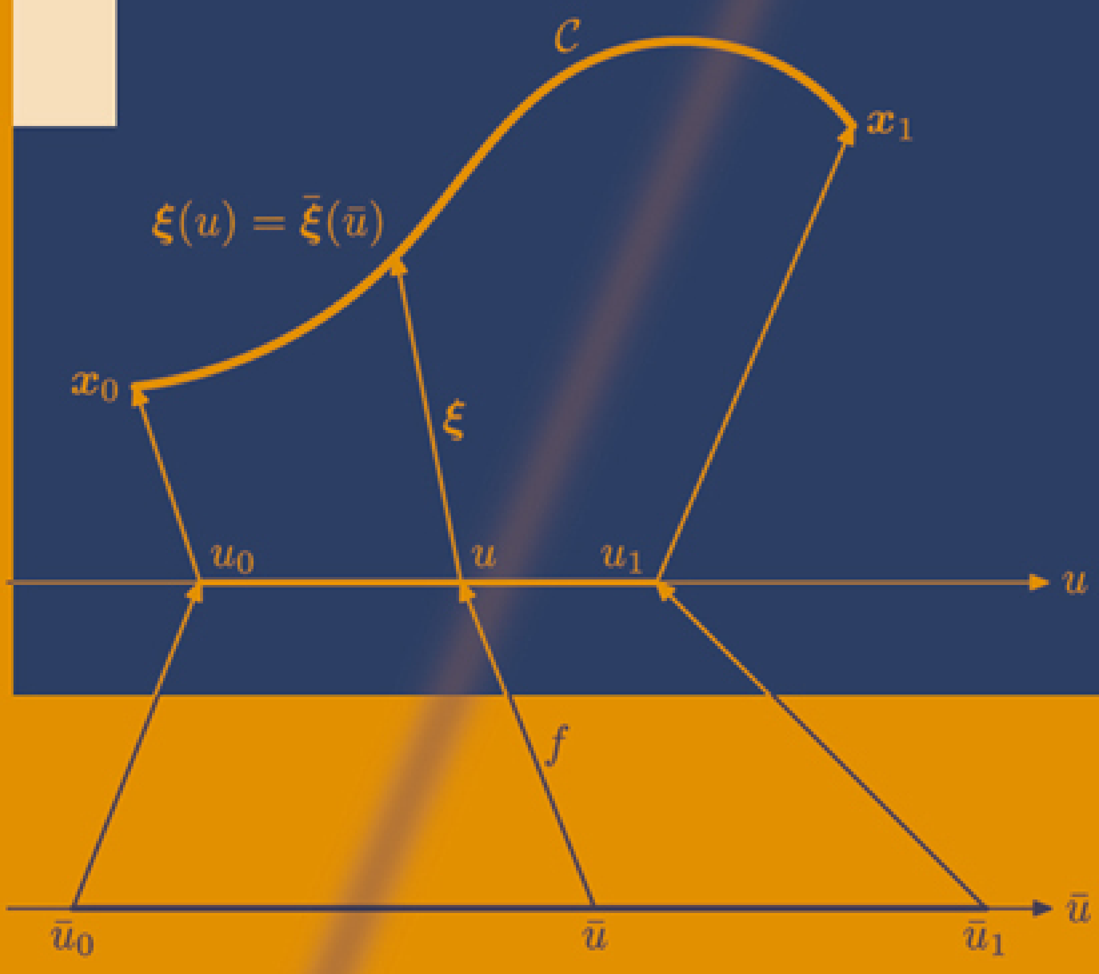
Hertel

Mathematikbuch zur Physik



Springer

Springer-Lehrbuch

Peter Hertel

Mathematikbuch zur Physik

Springer

Prof. Dr. Peter Hertel
Universität Osnabrück
Fachbereich Physik
Barbarastraße 7
49069 Osnabrück
peter.hertel@uni-osnabrueck.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-540-89043-0 e-ISBN 978-3-540-89044-7
DOI 10.1007/978-3-540-89044-7
Springer Dordrecht Heidelberg London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandgestaltung: WMX Design GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

Vorwort

Dieses *Mathematikbuch* soll Studierende der Physik und verwandter Disziplinen durch das Studium begleiten. Es ist vom Lehrbuch über *Theoretische Physik* des Verfassers[1] inspiriert. Alles, was an Mathematik im *Physikbuch* vorkommt und dort entweder vorausgesetzt oder lediglich erwähnt wird, ist hier dargestellt. Umgekehrt enthält das *Mathematikbuch* nur die Gegenstände, die im *Physikbuch* direkt oder indirekt angesprochen werden, nicht weniger, aber auch nicht mehr. Das Buch beschreibt den minimalen Mathematik-Wortschatz, über den Physiker verfügen sollten. Es ist optimal in dem Sinne, dass nichts ausgebreitet wird, was sich zwar in der Nähe der behandelten Gegenstände befindet, aber selten benötigt wird. Wer wie ich 40 Jahre lang Theoretische Physik und die dazugehörige Mathematik unterrichtet hat, der weiß, auf welche Kenntnisse es ankommt.

Die in diesem *Mathematikbuch* behandelten Gegenstände und Verfahren, auch solche aus der Numerik, decken hinreichend ab, was man wissen und können muss, um mit Erfolg Physik zu studieren. Das Buch ist so gegliedert, dass man diesen oder jenen Abschnitt beim ersten Lesen auslassen kann. Es ist somit sowohl für Bachelor- als auch für Masterstudiengänge mit hohem Mathematikanteil geeignet.

Dementsprechend ist das Buch wesentlich mehr als eine Starthilfe für Studienanfänger. Allerdings ist es nicht als Lehrbuch für das Selbststudium der Mathematik gedacht, dazu ist es viel zu straff gefasst. Vielmehr wird versucht, Studierende der Physik in mathematischer Hinsicht durch das gesamte Studium zu begleiten, von Anfang bis Ende, von einfach bis anspruchsvoll, von Abbildung bis Zufallsvariable[2]. Das *Mathematikbuch* will Zusammenhänge herstellen, Übersicht schaffen, Klammer sein zwischen den verschiedenen Gebieten, also dolmetschen zwischen Physik, Mathematik und Numerik. Übungsaufgaben passen nicht in dieses Konzept.

Die gymnasiale Oberstufe als Ausgangspunkt, das Mathematikstudium, das je nach Universität ganz unterschiedlich angelegt ist, und die mathematische Zusatzausbildung durch die Fachwissenschaft: diese drei Bestandteile sind oft

[1] Hertel, *Theoretische Physik*, Springer Verlag 2007, ISBN 978-3-540-36644-7

[2] eine Anspielung auf den ersten und den letzten Eintrag im Glossar

nicht oder nur schlecht aufeinander abgestimmt. Diesen Mangel kann das vorliegende Buch zwar nicht beheben, aber es kann das Physikstudium oder das Studium eines verwandten Faches von Anfang an erleichtern, indem es diejenigen Mathematikkenntnisse vermittelt, die wirklich gebraucht werden. Dementsprechend kommen viele Begriffserklärungen, Definitionen und Feststellungen vor, eine Reihe von Beweisideen, aber verhältnismäßig wenig Beweise, dafür umso mehr Beispiele.

Der Aufbau folgt im Wesentlichen dem Verlauf des Physikstudiums.

Die Schule hat die *Grundlagen* vermittelt, und es wird beschrieben, was davon besonders wichtig ist. Das folgende Kapitel widmet sich den *Gewöhnlichen Differentialgleichungen*, wie sie für das Studium der Mechanik gebraucht werden. In der Elektrodynamik stehen *Felder* und *Partielle Differentialgleichungen* im Vordergrund; damit befassen sich das dritte und das vierte Kapitel. Lineare Räume und *Lineare Operatoren*, Schlüsselbegriffe in der Quantentheorie, werden als nächstes abgehandelt. Unter *Verschiedenes* ist zusammengestellt, was sich bisher nicht zwanglos einfügen ließ: Fourier-Zerlegung, Analytische Funktionen, Tensoren, Transformationsgruppen, Optimierung, Variationsrechnung und Legendre-Transformation. Das letzte Kapitel vermittelt *Tiefere Einsichten*: Grundlagen der Topologie, Maßtheorie und Lebesgue-Integral, Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Verallgemeinerte Funktionen.

In das Buch eingewoben ist eine Einführung in die Numerik. Wie man Integrale ausrechnet, gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen löst, Modelle an Messdaten anpasst, das Spektrum von Zeitreihen analysiert und die Ergebnisse graphisch darstellt: all das kommt vor und vieles mehr, immer im passenden Kontext. Physiker wollen Probleme lösen, und wenn das analytisch nicht möglich ist, also beinahe niemals, dann muss man rechnen, oder noch besser: eine Maschine mit dem Rechnen betrauen. Das Buch zeigt, wie man das macht. Der Anhang enthält eine Einführung in das Programmpaket MATLAB, das auf die Anforderungen der Naturwissenschaften und der Technik zugeschnitten ist.

Zum Anhang gehört außerdem ein ausführliches *Glossar*. Es erläutert und vernetzt die wichtigsten mathematischen Begriffe und Aussagen und ist damit gleichsam eine Zusammenfassung dieses auf Übersicht und Verständnis angelegten Buches.

Ich habe vor vielen Jahren Mathematik an der Universität Hamburg studiert, bei Emil Artin, Ernst Witt und Lothar Collatz. Diese Professoren, denen ich noch heute dankbar bin, waren nicht nur hervorragende Wissenschaftler, sondern auch gute, um ihre Studenten bemühte Lehrer. Wenn es dem Lehrzweck diente, vermochten sie zu vereinfachen, und sie scheuten sich nicht, die zumeist simplen Grundgedanken bloßzulegen. Ihr Vorbild hat, so hoffe ich, auf dieses Buch abgefärbt.

Osnabrück, im Herbst 2008 Peter Hertel

Inhaltsverzeichnis

1

Grundlagen

Dieses Kapitel beschreibt Grundkenntnisse in Mathematik, die jede Studentin und jeder Student von der Schule mitbringen sollte. Man kann es auch als Übersicht über die Schulmathematik verstehen, als eine Zusammenfassung. Es hat wenig Sinn, sich mit den folgenden Kapiteln zu beschäftigen, wenn hier erhebliche Lücken zu Tage treten. Solche Lücken müssen geschlossen werden, ehe man mit dem Studium der Mathematik fortfahren kann.

Im Abschnitt über *Mengen und Zahlen* wiederholen wir skizzenhaft die Grundbegriffe der Mengenlehre und behandeln die natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Wir deuten an, was komplexe Zahlen sind, die für gewöhnlich nicht zum Schulstoff gehören; dieser Gegenstand wird später breiter abgehandelt. Mithilfe konvergenter Folgen erklären wir, was *stetige Funktionen* sind und wodurch sich *differenzierbare Funktionen* auszeichnen. Dabei wiederholen wir die wichtigsten Rechenregeln. Ein längerer Abschnitt ist den *elementaren Funktionen* gewidmet, der Exponentialfunktion, dem Logarithmus, Kosinus und Sinus sowie verwandten Funktionen. Der Abschnitt über *Integrieren* behandelt, wie man die Fläche unter einem Graphen ermittelt, als Grenzwert, und wie man eine große Anzahl von Integralen analytisch berechnen kann. Nebenbei führen wir auch vor, wie man ein Integral numerisch auswertet.

1.1 Mengen und Zahlen

Die elementare Mengenlehre stellt Begriffe und Bezeichnungen bereit, mit denen man sich mathematisch präzise ausdrücken kann. Zahlen sind erst einmal natürliche Zahlen, Antworten auf die Frage *wie viel*? Um gewisse Gleichungen lösen zu können und um Grenzwerte konvergenter Folgen dabei zu haben, erweitert man zu den Mengen der ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Wir skizzieren, warum man komplexe Zahlen einführen muss und stellen fest, dass man damit bei der umfangreichsten Zahlenmenge angekommen ist.

P. Hertel, *Mathematikbuch zur Physik*,
DOI 10.1007/978-3-540-89044-7, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

1.1.1 Mengen

Gleichartige Elemente a, b und so weiter kann man zu einer Menge A zusammenfassen. Man beschreibt Mengen oft durch die Auflistung der Elemente, $A = \{a, b, \dots\}$. Die Reihenfolge ist ohne Bedeutung, und kein Element darf mehrfach vorkommen. Man schreibt $a \in A$, wenn das Element a in der Menge A enthalten ist. Dass a nicht zur Menge A gehört, drückt man durch $a \notin A$ aus.

Häufig werden Mengen durch Eigenschaften definiert, so wie zum Beispiel durch $A = \{b \in B \,\big|\, b > 1\}$. A ist die Menge aller Elemente b aus B, für die zusätzlich $b > 1$ gilt. Dabei muss natürlich für B erklärt sein, was $>$ und 1 bedeuten.

Die Menge A selber darf kein Element der Menge A sein. Solche Konstruktionen sind nicht erlaubt, sie führen zu Widersprüchen[1]. Die Partei aller Parteilosen bringt das auf den Punkt.

Wenn eine Menge überhaupt kein Element enthält, spricht man von der leeren Menge und schreibt $\emptyset$ dafür. Es gibt nur eine leere Menge. Keine Äpfel ist dasselbe wie keine Birnen.

Die Vereinigungsmenge $C = A \cup B$ zweier Mengen A und B besteht aus den Elementen, die entweder in A oder in B oder in beiden enthalten sind. Aus $c \in C$ folgt, dass entweder $c \in A$ oder $c \in B$ gilt, oder beides.

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7, 8\}$ berechnet man $A \cup B = \{1, 3, 7, 8\}$.

Der Mengendurchschnitt $C = A \cap B$ besteht aus den Elementen c, die sowohl in A als auch in B enthalten sind, also in beiden.

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7, 8\}$ gilt $A \cap B = \{3, 7\}$.

Man sagt, dass B eine Teilmenge von A sei, $B \subseteq A$, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist. Man kann $B \subseteq A$ auch so ausdrücken: A ist eine Obermenge von B.

Mit $A = \{1, 3, 7\}$ und $B = \{3, 7\}$ gilt $B \subseteq A$.

Mit $A \backslash B$ (sprich A ohne B) bezeichnet man diejenige Menge von Elementen, die in A, aber nicht in B enthalten sind:

$$A \backslash B = \{a \in A \,\big|\, a \notin B\}\,. \tag{1.1}$$

Mit $A = \{1, 3, 7, 8\}$ und $B = \{1, 7, 9\}$ gilt $A \setminus B = \{3, 8\}$.

Zwei Mengen A und B sind disjunkt, wenn sie kein Element gemeinsam haben, wenn also $A \cap B = \emptyset$ gilt.

---

[1] *Die Menge aller Mengen, die sich nicht selber enthalten* ist ein bekanntes Beispiel für ein Paradoxon. Nennen wir sie M. Wenn $M \in M$ gilt, dann ist M eine Menge, die sich selber enthält. Also gehört M nicht zu M. Dann ist M eine Menge, die sich nicht selber enthält, und damit müsste sie zu M gehören. . .