Das Spiel mit den Zahlen

1

In diesem Kapitel ...

- Erfahren, wie die Zahlen erfunden wurden
- Ein paar vertraute Zahlenfolgen betrachten
- Den Zahlenstrahl kennenlernen
- Vier wichtige Zahlenmengen verstehen

Zahlen sind auch deshalb so praktisch, weil sie *konzeptuell* sind, das heißt ganz einfach, sie sind alle bereits vorhanden in Ihrem Kopf. (Diese Tatsache wird Sie vielleicht noch nicht vom Hocker reißen – aber es war ein Versuch!)

Beispielsweise können Sie sich »Drei« mit allen möglichen Dingen vorstellen: drei Katzen, drei Bälle, drei Kannibalen, drei Planeten. Versuchen Sie, sich das Konzept von »Drei« ohne Hilfsmittel vorzustellen – Sie werden feststellen, dass das unmöglich ist. Natürlich können Sie sich die numerische 3 vorstellen, doch die eigentliche *Dreiheit* ist – wie Liebe oder Schönheit oder Ehre – nicht direkt fassbar. Aber nachdem Sie das *Konzept* der Drei (oder Vier oder einer Million) verstanden haben, erhalten Sie damit Zugang zu einem unglaublich leistungsfähigen System, das Ihnen hilft, die gesamte Welt zu verstehen: die Mathematik.

In diesem Kapitel präsentiere ich Ihnen einen kurzen Überblick darüber, wie die Zahlen entstanden sind. Ich stelle Ihnen ein paar gebräuchliche *Zahlenfolgen* vor und zeige Ihnen, wie Sie diese mit einfachen mathematischen *Operationen* verbinden, wie etwa Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division.

Anschließend erkläre ich, wie einige dieser Konzepte anhand eines einfachen und doch leistungsfähigen Werkzeugs verdeutlicht werden können – mit dem *Zahlenstrahl*. Ich demonstriere, wie die Zahlen auf dem Zahlenstrahl angeordnet sind, und zeige Ihnen, wie Sie den Zahlenstrahl als Rechengerät für die einfache Arithmetik nutzen können.

Zum Schluss beschreibe ich, wie die *natürlichen Zahlen* (1, 2, 3, …) die Erfindung ungewöhnlicherer Zahlentypen ausgelöst haben, wie etwa *negative Zahlen*, *Brüche* und *irrationale Zahlen*. Außerdem zeige ich Ihnen, wie diese *Zahlenmengen* ineinander *verschachtelt* sind – das heißt, wie sich eine Zahlenmenge in eine andere einfügt, die sich wiederum in eine andere einfügt.

Die Erfindung der Zahlen

Historiker sind davon überzeugt, dass die ersten Zahlensysteme gleichzeitig mit der Landwirtschaft und dem Handel entstanden sind. In den vorhergehenden prähistorischen Zeiten der Jäger und Sammler war es für die Menschen ausreichend, die ungefähre Größe von ganzen Gruppen zu identifizieren, wie beispielsweise »viele« oder »wenige«.

Als sich jedoch die Landwirtschaft entwickelte und der Handel zwischen einzelnen Gruppen begann, benötigte man genauere Angaben. Die Menschen begannen, mithilfe von Steinen, Lehmbatzen und vergleichbaren Gegenständen festzuhalten, wie viele Ziegen, Schafe, Öl, Getreide oder andere Waren sie besaßen. Diese Gegenstände konnten in Vertretung für die Dinge, die sie jeweils darstellten, eins zu eins getauscht werden.

Irgendwann erkannten die Händler, dass sie Bilder zeichnen konnten, anstatt Gegenstände verwenden zu müssen. Diese Bilder entwickelten sich zu Warenetiketten und mit der Zeit zu komplexeren Systemen. Ob sie es damals schon erkannten oder nicht – ihre Versuche, einen Überblick über ihre Waren zu bewahren, hatten diese Menschen zur Erfindung von etwas völlig Neuem geführt: *Zahlen*.

Im Laufe der Zeitalter entwickelten die Babylonier, die Ägypter, die Griechen, die Römer, die Mayas, die Araber und die Chinesen (um nur ein paar wenige zu nennen) alle ihre eigenen Systeme, Zahlen zu schreiben.

Obwohl römische Zahlen weit verbreitet wurden, als sich das Römische Reich über ganz Europa und in Teilen von Asien und Afrika ausdehnte, stellte sich das fortschrittlichere System, das die Araber erfanden, als praktischer heraus. Unser eigenes Zahlensystem, die hindu-arabischen Zahlen (auch als *Dezimalzahlen* bezeichnet), lehnt sich sehr eng an diese frühen arabischen Zahlen an.

Zahlenfolgen verstehen

Obwohl die Zahlen ursprünglich zum Zählen von Waren erfunden worden sind, wie im vorherigen Abschnitt erwähnt, wurden sie bald für alle möglichen anderen Dinge benutzt. Zahlen waren praktisch, um Distanzen zu messen, Geld zu zählen, eine Armee zusammenzustellen, Steuern zu erheben, Pyramiden zu bauen und für vieles andere mehr.

Aber über ihre vielen Verwendungszwecke hinaus, die externe Welt zu verstehen, haben die Zahlen auch eine eigene interne Ordnung. Zahlen sind also nicht nur eine *Erfindung*, sondern gleichzeitig eine *Entdeckung*: Wir erkennen darin eine Landschaft, die scheinbar unabhängig von allem anderen existiert, mit eigener Struktur, eigenen Geheimnissen und sogar Gefahren.

Ein Weg in diese neue und häufig fremdartige Welt ist die *Zahlenfolge*: eine Anordnung von Zahlen gemäß einer bestimmten Regel. In den folgenden Abschnitten stelle ich Ihnen viele verschiedene Zahlenfolgen vor, die praktisch sind, um den Zahlen einen Sinn zu geben.

Ungerade gerade machen

Zu den ersten Dingen, die Sie über Zahlen erfahren haben, gehört wahrscheinlich, dass alle Zahlen entweder gerade oder ungerade sind. Beispielsweise können Sie eine gerade Anzahl Murmeln *gerade* in zwei gleiche Stapel teilen. Wenn Sie dagegen versuchen, eine ungerade Anzahl von Murmeln auf dieselbe Weise zu teilen, haben Sie immer eine Murmel übrig. Hier die ersten geraden Zahlen:

2 4 6 8 10 12 14 16 …

Sie können diese Folge gerader Zahlen beliebig fortsetzen. Sie beginnen mit der Zahl 2 und addieren dann immer wieder 2, um zur nächsten Zahl zu gelangen.

Und hier die ersten ungeraden Zahlen:

1 3 5 7 9 11 13 15 …

Die Folge ungerader Zahlen ist genauso einfach zu erstellen. Sie beginnen mit der Zahl 1 und addieren dann immer wieder 2, um zur nächsten Zahl zu gelangen.

Die Muster der geraden und ungeraden Zahlen sind die einfachsten Zahlenmuster, die es gibt, deshalb erkennen Kinder häufig den Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen schon bald, nachdem sie gelernt haben zu zählen.

Um 3, 4, 5 und so weiter weiterzählen

Nachdem Sie verstanden haben, wie man um Zahlen größer 1 weiterzählt, können Sie das beliebig fortsetzen. Hier zählen wir um 3 weiter:

3 6 9 12 15 18 21 24 …

Dieses Muster wird erzeugt, indem Sie bei 3 beginnen und dann immer wieder 3 addieren.

Und so zählen Sie um 4 weiter:

4 8 12 16 20 24 28 32 …

Und so um 5:

5 10 15 20 25 30 35 40 …

Um jeweils um eine bestimmte Zahl weiterzuzählen, ist es sinnvoll, die Multiplikationstabelle für diese Zahl zu lernen, insbesondere für die Zahlen, bei denen Sie noch unsicher sind. (Im Allgemeinen haben die meisten Leute Probleme mit der Multiplikation mit 7, aber auch 8 und 9 machen bisweilen Schwierigkeiten.) In Kapitel 3 zeige ich Ihnen ein paar Tricks, wie Sie sich die Multiplikationstabelle ein für alle Mal merken.

Diese Folgentypen sind außerdem praktisch, um Faktoren und Vielfache zu verstehen, worum es in Kapitel 8 geht.

Quadratzahlen verstehen

Wenn Sie sich mit Mathematik beschäftigen, wünschen Sie sich früher oder später visuelle Hilfen, die verdeutlichen, was die Zahlen bedeuten. (Weiter hinten in diesem Buch zeige ich Ihnen, wie ein Bild mehr als tausend Zahlen sagt, nämlich wenn es in Kapitel 16 um Geometrie und in Kapitel 17 um Graphen geht.)

Die praktischsten visuellen Hilfen, die man sich vorstellen kann, sind diese kleinen quadratischen Käsecracker. (Wahrscheinlich haben Sie irgendwo eine Schachtel davon stehen. Andernfalls können Sie auch Salzcracker oder ein anderes quadratisches Nahrungsmittel verwenden.) Schütteln Sie ein paar aus der Packung und ordnen Sie die kleinen Quadrate so an, dass sie größere Quadrate bilden. Abbildung 1.1 zeigt die ersten paar dieser Quadrate.

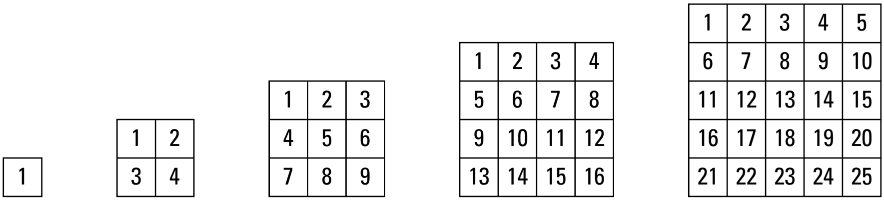


Abbildung 1.1: Quadratzahlen

Voilà! Die Quadratzahlen:

1 4 9 16 25 36 49 64 …

Sie erhalten eine *Quadratzahl*, indem Sie eine Zahl mit sich selbst multiplizieren. Die Kenntnis der Quadratzahlen ist damit eine weitere praktische Methode, sich einen Teil der Multiplikationstabelle zu merken. Obwohl Sie sich sehr wahrscheinlich ohne jede Hilfe $2 \cdot 2 = 4$ merken können, sind Sie sich bei den höheren Zahlen vielleicht schon nicht mehr ganz so sicher, wie beispielsweise $7 \cdot 7 = 49$. Wenn Sie die Quadratzahlen kennen, prägen Sie sich die betreffenden Multiplikationstabellen sehr viel besser ein, wie ich in Kapitel 3 zeige.

Quadratzahlen sind außerdem ein wichtiger erster Schritt zum Verständnis der Exponenten, wie ich weiter hinten in diesem Kapitel noch anspreche und detailliert in Kapitel 4 erkläre.

Zusammengesetzte Zahlen – ganz einfach

Einige Zahlen können in rechteckigen Mustern angeordnet werden. Die Mathematiker könnten diese Zahlen auch als »Rechteckzahlen« bezeichnen, aber stattdessen sprechen sie von *zusammengesetzten Zahlen*. Beispielsweise ist 12 eine zusammengesetzte Zahl, weil Sie zwölf Gegenstände in Rechtecken zweier unterschiedlicher Formen anordnen können, wie in Abbildung 1.2 gezeigt.

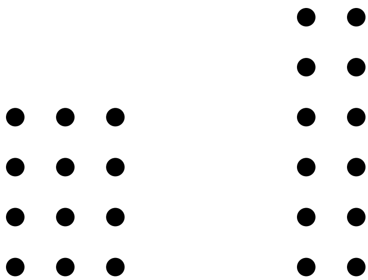


Abbildung 1.2: Die Zahl 12 in zwei unterschiedlichen rechteckigen Mustern

Wie bei den Quadratzahlen teilt Ihnen die Anordnung von Zahlen in visuellen Mustern wie diesen etwas über die Multiplikation mit. In diesem Fall können Sie durch Zählen der Seiten beider Rechtecke Folgendes feststellen:

$3 \cdot 4 = 12$

$2 \cdot 6 = 12$

Auf vergleichbare Weise können auch andere Zahlen wie etwa 8 und 15 in Rechtecken angeordnet werden, wie in Abbildung 1.3 gezeigt.

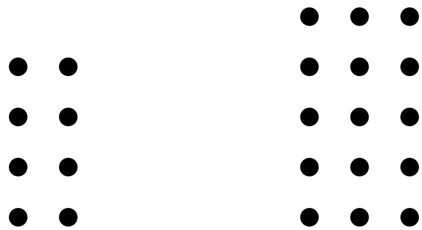


Abbildung 1.3: Zusammengesetzte Zahlen können Rechtecke bilden, hier am Beispiel von 8 und 15 gezeigt.

Wie Sie sehen, können beide Zahlen relativ einfach in Rechtecken mit mindestens zwei Zeilen und zwei Spalten angeordnet werden. Und diese visuellen Muster teilen uns Folgendes mit:

$2 \cdot 4 = 8$

$3 \cdot 5 = 15$

Das Wort *zusammengesetzt* bedeutet, dass diese Zahlen aus kleineren Zahlen zusammengesetzt sind. Beispielsweise ist die Zahl 15 aus 3 und 5 zusammengesetzt – das heißt, wenn Sie diese beiden kleineren Zahlen multiplizieren, erhalten Sie 15. Nachfolgend alle zusammengesetzten Zahlen zwischen 1 und 16:

4 6 8 9 10 12 14 15 16 …

Beachten Sie, dass alle Quadratzahlen (siehe den vorherigen Abschnitt »Quadratzahlen verstehen«) ebenfalls als zusammengesetzte Zahlen betrachtet werden, weil Sie sie in Rechtecken mit mindestens zwei Zeilen und zwei Spalten anordnen können. Darüber hinaus sind auch viele der anderen, nicht quadratischen Zahlen zusammengesetzte Zahlen.

Die Primzahlen verweigern sich dem Rechteck!

Einige Zahlen sind stur. Sie weigern sich beharrlich, in einem Rechteck angeordnet zu werden – und werden als *Primzahlen* bezeichnet. Betrachten Sie beispielsweise, wie in Abbildung 1.4 die Zahl 13 dargestellt ist.

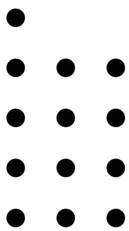


Abbildung 1.4: Die unglückliche 13, eine Primzahl, verdeutlicht, dass manche Zahlen einfach nicht in einem Rechteck angeordnet werden können.

Sie können es versuchen, so oft Sie wollen – aus 13 Gegenständen lässt sich einfach kein Rechteck legen (Vielleicht hat die 13 deshalb einen unguten Ruf!). Hier die Primzahlen kleiner 20:

2 3 5 7 11 13 17 19

Wie Sie sehen, füllt die Liste der Primzahlen die Lücken in der Auflistung der zusammengesetzten Zahlen (siehe vorherigen Abschnitt). Aus diesem Grund ist jede natürliche Zahl entweder eine Primzahl oder eine zusammengesetzte Zahl. In Kapitel 8 finden Sie mehr Informationen über zusammengesetzte Zahlen. Außerdem zeige ich Ihnen dort, wie Sie eine Zahl zerlegen – das heißt, wie Sie eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfaktoren zerlegen.

Mit Exponenten schnell multiplizieren

Es gibt ein altes Rätsel, das eine immer noch überraschende Antwort hat. Angenommen, Sie haben einen Job angenommen, bei dem Sie am ersten Tag 1 Cent, am zweiten Tag 2 Cent, am dritten Tag 4 Cent und so weiter als Lohn erhalten, sodass also der Betrag täglich verdoppelt wird:

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 …

Wie Sie sehen, verdienen Sie in den ersten zehn Arbeitstagen nur sehr wenig, gerade einmal 10 Euro (eigentlich 10,23 Euro, aber wer wird so kleinlich sein?). Wie viel verdienen Sie in 30 Tagen? Sie würden möglicherweise sagen: »Nie würde ich einen derart unterbezahlten Job annehmen!« Auf den ersten Blick ist das genau die richtige Antwort, aber sehen Sie sich erst einmal an, was Sie nach den zweiten zehn Tagen verdienen:

… 1.024 2.048 4.096 8.192 16.384 32.768 65.536

131.072 262.144 524.288 …

Nach den zweiten zehn Tagen betragen Ihre Gesamteinkünfte über 10.000 Euro. Und am Ende der dritten Woche liegen Ihre Einkünfte bei etwa 10.000.000 Euro! Wie kann das sein? Durch die Magie der Exponenten (auch als *Potenzen* bezeichnet). Jede neue Zahl in der Folge entsteht, indem die vorhergehende Zahl mit 2 multipliziert wird:

$2^1 = 2 = 2$

$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

Wie Sie sehen, bedeutet die Notation 2^4, dass *die Zahl 2 viermal mit sich selbst multipliziert wird*.

Sie können Exponenten auch für andere Zahlen als 2 verwenden. Hier eine weitere Folge, die Sie vielleicht schon kennen:

1 10 100 1.000 10.000 100.000 1.000.000 …

In dieser Folge ist jede Zahl um das Zehnfache größer als die vorhergehende Zahl. Auch diese Zahlen werden mithilfe von Exponenten erzeugt:

$10^1 = 10 = 10$

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$

Diese Folge ist wichtig für die Definition des *Stellenwerts*, der Grundlage des dezimalen Zahlensystems. Darum geht es in Kapitel 2. Außerdem taucht sie in Kapitel 11 wieder auf, in dem es um Dezimalzahlen geht, ebenso wie bei der Vorstellung der wissenschaftlichen Notation in Kapitel 14. Weitere Informationen über Exponenten finden Sie in Kapitel 5.

Der Zahlenstrahl

Wenn Kinder zu alt werden, um mithilfe ihrer Finger zu zählen (und sie nur noch verwenden, wenn sie versuchen, sich an die Namen der sieben Zwerge zu erinnern), verwenden die Lehrer häufig eine Darstellung der ersten zehn Zahlen in einer Reihe, wie in Abbildung 1.5 gezeigt.

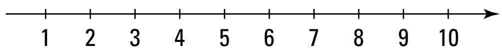


Abbildung 1.5: Grundlegender Zahlenstrahl

Diese Methode, Zahlen anzuordnen, wird auch als *Zahlenstrahl* bezeichnet. Viele sehen den Zahlenstrahl – oft aus buntem Glanzpapier – häufig zum ersten Mal über der Tafel in ihrem Klassenzimmer aufgehängt. Der grundlegende Zahlenstrahl bietet eine visuelle Darstellung der *natürlichen Zahlen*, mit denen wir zählen, also der Zahlen größer 0. Sie können ihn verwenden, um zu zeigen, wie die Zahlen in die eine Richtung größer und in die andere Richtung kleiner werden.

In diesem Abschnitt zeige ich Ihnen, wie Sie anhand des Zahlenstrahls einige grundlegende, aber sehr wichtige Zahlenkonzepte verstehen können.

Auf dem Zahlenstrahl addieren und subtrahieren

Mithilfe des Zahlenstrahls können Sie eine einfache Addition oder Subtraktion demonstrieren. Diese ersten Schritte zur Mathematik werden konkreter, wenn Sie eine visuelle Hilfestellung erhalten. Hier das Wichtigste, das Sie sich merken müssen:

- ✓ Nach *rechts* hin werden die Zahlen *größer*, was der *Addition* entspricht (+).
- ✓ Nach *links* hin werden die Zahlen *kleiner*, was der *Subtraktion* entspricht (–).

2 + 3 beispielsweise bedeutet, dass Sie *bei 2 beginnen und dann 3 Stellen nach rechts weiterrücken*, zur 5, wie in Abbildung 1.6 dargestellt.

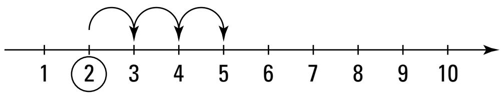


Abbildung 1.6: Bewegung auf dem Zahlenstrahl von links nach rechts

Betrachten wir ein weiteres Beispiel. 6 – 4 bedeutet, dass Sie bei 6 beginnen und dann um vier Stellen nach links zur 2 gehen. Das bedeutet: 6 – 4 = 2, wie in Abbildung 1.7 gezeigt.

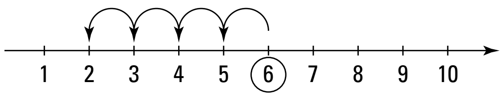


Abbildung 1.7: Bewegung auf dem Zahlenstrahl von rechts nach links

Diese einfachen Vor- und Zurück-Regeln können Sie wiederholt anwenden, um eine längere Aneinanderreihung von Additionen und Subtraktionen zu lösen. Beispielsweise bedeutet 3 + 1 – 2 + 4 – 3 – 2 auf dem Zahlenstrahl, bei 3 zu beginnen, 1 nach rechts, 2 nach links, 4 nach rechts, 3 nach links und 2 nach links zu gehen. In diesem Fall ergibt der Zahlenstrahl 3 + 1 – 2 + 4 – 3 – 2 = 1.

Weitere Informationen über Addition und Subtraktion finden Sie in Kapitel 3.

Das Nichts verstehen lernen: 0

Eine wichtige Ergänzung des Zahlenstrahls ist die Zahl 0, die für *nichts* steht. *Nothing, niente, nada*. Treten Sie einen Schritt zurück und beobachten Sie das bizarre Konzept des Nichts. Erstens existiert das *Nichts* per Definition nicht – das haben uns mehrere Philosophen klargemacht. Dennoch stellen wir es üblicherweise mit der Ziffer 0 dar, wie Abbildung 1.8 zeigt.

Eigentlich haben die Mathematiker eine genauere Bezeichnung für das *Nichts* als die Null. Das ist die *leere Menge*, eine mathematische Variante einer leeren Schachtel. Ich vermittle Ihnen in Kapitel 20 weitere grundlegende Informationen zur Mengenlehre.

Nichts ist natürlich für Kinder schwer zu begreifen, aber sie scheinen damit umgehen zu

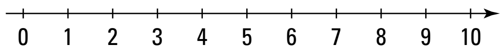


Abbildung 1.8: Der Zahlenstrahl, beginnend bei 0 und weiter mit 1, 2, 3 bis 10

können. Sie verstehen schnell, dass wenn man drei Spielzeugautos hat und jemand alle drei wegnimmt, null Spielzeugautos übrig bleiben. Das bedeutet 3 – 3 = 0. Auf dem Zahlenstrahl gehen wir für 3 – 3 von 3 aus und dann um 3 nach links, wie in Abbildung 1.9 gezeigt.

In Kapitel 2 beschreibe ich die Bedeutung von 0 als *Platzhalter* in Zahlen und erkläre, wie einer Zahl *führende Nullen* hinzugefügt werden können, ohne ihren Wert zu verändern.

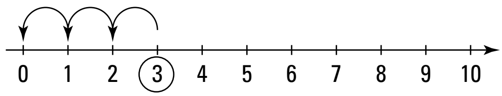


Abbildung 1.9: Von 3 aus um 3 nach links

Unendlichkeit: Die unendliche Geschichte

Der Pfeil an dem Ende des Zahlenstrahls zeigt an einen Ort, der auch als *Unendlichkeit* bezeichnet wird, wobei es sich aber letztlich nicht um einen Ort handelt, sondern eher um das Konzept der *Ewigkeit*, weil die Zahlen unendlich weiterlaufen. Aber was ist mit einer Million, Milliarde, Trillion, Quadrillion – gehen die Zahlen noch höher? Die Antwort lautet Ja, weil man zu jeder beliebigen Zahl, die man angeben kann, immer noch 1 hinzuaddieren kann.

Die Unendlichkeit wird durch das Symbol der liegenden Acht, ∞, dargestellt. Denken Sie jedoch daran, dass ∞ keine echte Zahl ist, sondern für die Vorstellung steht, dass Zahlen unendlich groß (oder klein) werden können.

Weil ∞ keine Zahl ist, können Sie technisch gesehen nicht 1 hinzuaddieren, genauso wenig, wie Sie 1 zur Kaffeekanne Ihrer Tante Resi addieren können. Aber selbst wenn es möglich wäre, wäre ∞ + 1 immer noch ∞.

Und nun in die andere Richtung: Negative Zahlen

Wenn Sie die Subtraktion lernen, hören Sie häufig, dass man nicht mehr subtrahieren kann, als man hat. Wenn Sie beispielsweise vier Buntstifte haben, können Sie einen, zwei, drei oder sogar alle vier wegnehmen, aber Sie können nicht mehr Buntstifte wegnehmen.

Aber sehr bald werden Sie verstehen, was jeder Kreditkarteninhaber nur zu gut kennt: Man kann sehr wohl mehr wegnehmen, als man hat – das Ergebnis ist eine *negative Zahl*. Wenn Sie beispielsweise 4 Euro haben und Ihrem Freund 7 Euro schulden, dann sind Sie mit 3 Euro in den Miesen. Das bedeutet 4 – 7 = –3. Das Minuszeichen vor der 3 heißt, dass die Anzahl der Euro, die Ihnen zur Verfügung stehen, weniger als 0 ist. Abbildung 1.10 zeigt, wie negative ganze Zahlen auf dem Zahlenstrahl dargestellt werden.

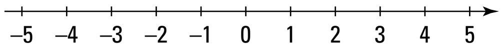


Abbildung 1.10: Negative ganze Zahlen auf dem Zahlenstrahl

Das Addieren und Subtrahieren auf dem Zahlenstrahl verhält sich für negative Zahlen genau wie für positive Zahlen. Abbildung 1.11 zeigt, wie beispielsweise 4 – 7 auf dem Zahlenstrahl subtrahiert wird.

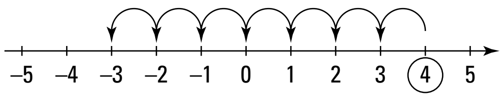


Abbildung 1.11: 4 – 7 auf dem Zahlenstrahl subtrahieren.

Weitere Informationen über den Umgang mit negativen Zahlen finden Sie in Kapitel 4.

Wenn Sie 0 und die negativen natürlichen Zahlen auf dem Zahlenstrahl mit unterbringen, wird die Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der *ganzen Zahlen* erweitert. Ich beschreibe die ganzen Zahlen weiter hinten in diesem Kapitel noch genauer.

Die Möglichkeiten vervielfachen sich – Multiplikation

Angenommen, Sie beginnen bei 0 und kreisen jede zweite andere Zahl auf dem Zahlenstrahl ein, wie in Abbildung 1.12 gezeigt. Wie Sie sehen, sind jetzt alle geraden Zahlen umkreist. Mit anderen Worten, Sie haben alle *Vielfachen von 2* umkreist. (Weitere Informationen über Vielfache finden Sie in Kapitel 8.) Nun können Sie diesen Zahlenstrahl nutzen, um eine beliebige Zahl mit 2 zu multiplizieren. Nehmen wir beispielsweise an, dass Sie 5 · 2 berechnen wollen. Sie beginnen bei 0 und springen um fünf eingekreiste Stellen nach rechts.

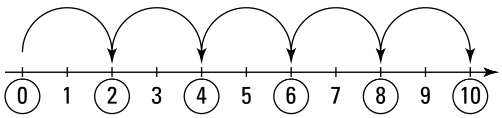


Abbildung 1.12: 5 · 2 mithilfe des Zahlenstrahls berechnen.

Dieser Zahlenstrahl zeigt Ihnen, dass 5 · 2 = 10 ist.

Auf vergleichbare Weise können Sie für die Multiplikation von –3 · 2 bei 0 beginnen und drei eingekreiste Stellen nach links springen (das heißt in die negative Richtung). Abbildung 1.13 zeigt, dass –3 · 2 = –6 ist. Darüber hinaus können Sie daran erkennen, warum die Multiplikation einer negativen Zahl mit einer positiven Zahl immer ein negatives Ergebnis erzeugt. (Weitere Informationen über die Multiplikation negativer Zahlen finden Sie in Kapitel 4.)

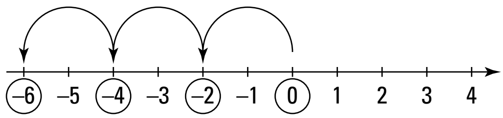


Abbildung 1.13: –3 · 2 = –6, wie auf dem Zahlenstrahl gezeigt

Die Multiplikation auf dem Zahlenstrahl funktioniert immer, egal mit welcher Zahl Sie multiplizieren. In Abbildung 1.14 springen Sie beispielsweise um jeweils fünf weiter.

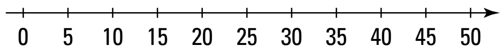


Abbildung 1.14: Der Zahlenstrahl mit Fünfersprüngen

Hier sind nur noch die Zahlen angegeben, bei denen es sich um *Vielfache von 5* handelt, sodass ich diesen Zahlenstrahl nutzen kann, um eine beliebige Zahl mit 5 zu multiplizieren. Abbildung 1.15 zeigt, wie beispielsweise 2 · 5 berechnet wird.

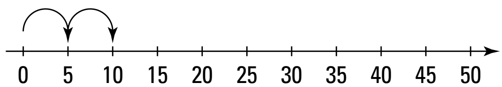


Abbildung 1.15: 2 · 5 auf dem Zahlenstrahl berechnen.

2 · 5 = 10. Dasselbe Ergebnis erhalten Sie für die Multiplikation 5 · 2. Dieses Ergebnis ist ein Beispiel für die *Kommutativität der Multiplikation* – Sie können die Reihenfolge innerhalb einer Multiplikationsaufgabe vertauschen und erhalten nach wie vor dasselbe Ergebnis. (Um die Eigenschaft der Kommutativität geht es in Kapitel 4 noch genauer.)

Auseinanderdividiert

Sie können den Zahlenstrahl auch für die Division verwenden. Angenommen, Sie wollen 6 durch eine andere Zahl dividieren. Zuerst zeichnen Sie einen Zahlenstrahl und tragen die Zahlen von 0 bis 6 ein, wie in Abbildung 1.16 gezeigt.

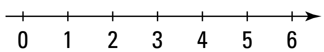


Abbildung 1.16: Zahlenstrahl von 0 bis 6

Um jetzt die Lösung für 6 ÷ 2 zu bestimmen, unterteilen Sie diesen Zahlenstrahl einfach in zwei gleich große Teile, wie in Abbildung 1.17 gezeigt. Diese Unterteilung (oder *Division*) erfolgt am Punkt 3, das heißt 6 ÷ 2 = 3.

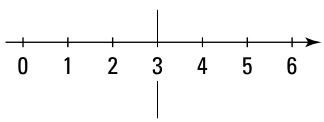


Abbildung 1.17: Die Lösung für 6 ÷ 2 erhalten Sie durch Unterteilen des Zahlenstrahls.

Um auf ähnliche Weise 6 ÷ 3 zu berechnen, unterteilen Sie denselben Zahlenstrahl in drei gleiche Teile, wie Abbildung 1.18 zeigt. Nun haben Sie zwei Unterteilungen, deshalb verwenden Sie diejenige, die am nächsten bei 0 liegt. Dieser Zahlenstrahl zeigt Ihnen, dass 6 ÷ 3 = 2 ist.

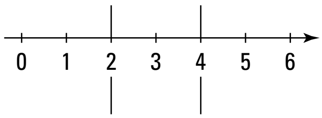


Abbildung 1.18: Berechnung von 6 ÷ 3 mithilfe des Zahlenstrahls

Angenommen, Sie wollen den Zahlenstrahl benutzen, um eine kleine Zahl durch eine größere Zahl zu dividieren, beispielsweise 3 ÷ 4. Nach der Methode, die ich Ihnen gezeigt habe, zeichnen Sie zuerst einen Zahlenstrahl von 0 bis 3. Anschließend unterteilen Sie ihn in vier gleiche Teile. Unglücklicherweise finden diese Unterteilungen nicht an Stellen statt, die mit ganzen Zahlen markiert sind. Das ist nicht etwa ein Fehler. Man muss dem Zahlenstrahl einfach ein paar neue Zahlen hinzufügen, wie in Abbildung 1.19 gezeigt.

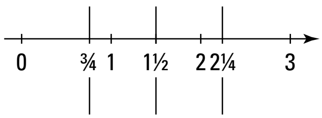


Abbildung 1.19: Brüche auf dem Zahlenstrahl

Willkommen in der Welt der *Brüche*! Wenn der Zahlenstrahl korrekt beschriftet ist, erkennen Sie, dass die am nächsten bei 0 liegende Unterteilung gleich ¾ ist. Anhand dieser Abbildung erkennen Sie also, dass 3 ÷ 4 = ¾ ist.

Die Ähnlichkeit des Ausdrucks 3 ÷ 4 und ¾ kommt nicht von ungefähr. Die Division und die Brüche sind eng miteinander verwandt. Wenn Sie dividieren, unterteilen Sie Dinge in gleiche Teile, und das Ergebnis dieses Prozesses sind oft Brüche. (Ich erkläre den Zusammenhang zwischen Division und Brüchen in den Kapiteln 9 und 10 genauer.)

Die Zwischenstellen: Brüche

Brüche helfen Ihnen, viele der Stellen auf dem Zahlenstrahl zu füllen, die zwischen den ganzen Zahlen liegen. Abbildung 1.20 zeigt eine Nahaufnahme eines Zahlenstrahls von 0 bis 1.

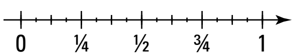
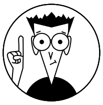


Abbildung 1.20: Zahlenstrahl mit einigen Brüchen zwischen 0 und 1

Dieser Zahlenstrahl erinnert Sie vielleicht an ein Lineal oder an ein Maßband, mit vielen winzigen eingetragenen Brüchen. Und letztlich sind Lineale und Maßbänder tragbare Zahlenstrahle, die es Schreinern, Ingenieuren und Heimwerkern ermöglichen, die Länge von Gegenständen ganz genau zu messen.

Das Hinzufügen von Brüchen zu dem Zahlenstrahl erweitert die Menge der ganzen Zahlen auf die Menge der *rationalen Zahlen*. Ich gehe in Kapitel 25 genauer auf das Konzept der rationalen Zahlen ein.



Egal wie klein etwas in der realen Welt wird, man findet immer einen winzigen Bruchteil, um sich an dieses Etwas so genau wie möglich anzunähern. Zwischen zwei Brüchen auf dem Zahlenstrahl gibt es immer einen weiteren Bruch. Mathematiker sprechen von der *Bruchdichte* auf dem reellen Zahlenstrahl. Diese Art Dichte ist ein Thema in einem sehr fortgeschrittenen Bereich der Mathematik, der sogenannten *reellen Analysis*.

Vier wichtige Zahlenmengen

Im vorherigen Abschnitt haben Sie gesehen, wie der Zahlenstrahl in positive Richtung wächst und mit vielen Zahlen gefüllt werden kann. In diesem Abschnitt zeige ich Ihnen in einem schnellen Überblick, wie sich diese Zahlen als Menge verschachtelter Systeme ineinander einfügen.

Wenn ich von einer *Zahlenmenge* spreche, dann meine ich eine Gruppe von Zahlen. Sie können den Zahlenstrahl verwenden, um mit vier wichtigen Zahlenmengen zu arbeiten:

- ✓ **Natürliche Zahlen:** die Menge der Zahlen, die mit 1, 2, 3, 4 … beginnt und bis unendlich geht
- ✓ **Ganze Zahlen:** die Menge der natürlichen Zahlen, Null und negative natürliche Zahlen
- ✓ **Rationale Zahlen:** die Menge der ganzen Zahlen und der Brüche
- ✓ **Reelle Zahlen:** die Menge der rationalen und der irrationalen Zahlen

Die Mengen der natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, rationalen Zahlen und reellen Zahlen sind ineinander verschachtelt. Diese Verschachtelung einer Menge in eine andere kann man sich vorstellen wie eine Stadt (beispielsweise Weinheim), die in ein Bundesland (Baden-Württemberg) verschachtelt ist, das sich in einem Land (Deutschland) befindet, das sich auf einem Kontinent befindet (Europa). Die Menge der natürlichen Zahlen befindet sich innerhalb der Menge der ganzen Zahlen, die sich innerhalb der Menge der rationalen Zahlen befindet, die sich innerhalb der Menge der reellen Zahlen befindet.

Zählen mit den natürlichen Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die Menge der Zahlen, mit der Sie anfangen zu zählen: bei 1. Weil diese Zahlen scheinbar ganz natürlich aus der Welt entstanden sind, werden sie auch als die *natürlichen Zahlen* bezeichnet:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 …

Die natürlichen Zahlen sind unendlich, das heißt, sie laufen ewig weiter.

Wenn Sie zwei natürliche Zahlen addieren, erhalten Sie immer eine weitere natürliche Zahl. Wenn Sie zwei natürliche Zahlen multiplizieren, erhalten Sie als Ergebnis ebenfalls immer eine natürliche Zahl. Man sagt auch, die Menge der natürlichen Zahlen ist für Addition und Multiplikation *abgeschlossen*.

Einführung der ganzen Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen entsteht, wenn Sie versuchen, eine größere Zahl von einer kleineren Zahl zu subtrahieren. Beispiel: $4 - 6 = -2$. Die Menge der ganzen Zahlen beinhaltet Folgendes:

- ✓ die natürlichen Zahlen
- ✓ Null
- ✓ die negativen natürlichen Zahlen

Hier ein Auszug aus der Liste der ganzen Zahlen:

$$\ldots -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \ldots$$

Wie die natürlichen Zahlen sind auch die ganzen Zahlen für Addition und Multiplikation abgeschlossen. Wenn Sie eine ganze Zahl von einer anderen ganzen Zahl subtrahieren, ist auch das Ergebnis immer eine ganze Zahl. Die ganzen Zahlen sind also auch für die Subtraktion abgeschlossen.

Wir bleiben rational

Hier die Menge der *rationalen Zahlen*:

- ✓ ganze Zahlen
  - natürliche Zahlen
  - Null
  - negative natürliche Zahlen
- ✓ Brüche

Wie die ganzen Zahlen sind rationale Zahlen für Addition, Subtraktion und Multiplikation abgeschlossen. Wenn Sie eine rationale Zahl durch eine andere rationale Zahl dividieren, ist auch das Ergebnis immer eine rationale Zahl. Man sagt auch, die rationalen Zahlen sind für die Division *abgeschlossen*.

Werden wir reell

Selbst wenn man alle rationalen Zahlen eingetragen hat, bleiben immer noch Punkte auf dem Zahlenstrahl, die nicht beschriftet sind. Diese Punkte sind die irrationalen Zahlen.

Eine *irrationale Zahl* ist eine Zahl, die weder eine ganze Zahl noch ein Bruch ist. Eine irrationale Zahl kann nur als *nicht periodische Dezimalzahl* angenähert werden. Mit anderen Worten, egal wie viele Dezimalstellen Sie angeben, es gibt immer noch weitere. Darüber hinaus wiederholen sich die Ziffern innerhalb dieser Dezimalzahl nicht und weisen auch kein Muster auf. (Weitere Informationen über periodische Dezimalzahlen finden Sie in Kapitel 11.)

Die bekannteste irrationale Zahl ist π (weitere Informationen über π erhalten Sie in Kapitel 16, in dem es um die Geometrie von Kreisen geht):

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510\ldots$

Zusammen bilden die rationalen und die irrationalen Zahlen die *reellen Zahlen*, die jeden Punkt auf dem Zahlenstrahl enthalten. In diesem Buch schreibe ich nicht viel über irrationale Zahlen, aber ich will Sie nur darauf aufmerksam machen, dass es sie gibt, falls Sie sie später einmal brauchen.