

Leseprobe

Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure 1

Grundlagen für das Bachelor-Studium

ISBN (Buch): 978-3-446-44447-8

ISBN (E-Book): 978-3-446-44594-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44447-8>

sowie im Buchhandel.

2.2 Klassen von Funktionen

Oft auftretende Funktionen einer Veränderlichen werden vorgestellt und ihre wesentlichen Eigenschaften genannt. Das Auffinden von Nullstellen einer Funktion entspricht dem Lösen einer Gleichung. Polynome und trigonometrische Funktionen sind im Bauingenieurwesen von besonderer Bedeutung, z. B. in der Balkenstatik und im Vermessungswesen.

2.2.1 Die konstante Funktion

Die konstante Funktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = c, f: \mathbb{R} \rightarrow \{c\},$$

wobei c eine beliebige vorgegebene reelle Zahl ist. Ist $c = 0$, spricht man von der **Nullfunktion**.

Die konstante Funktion (siehe **Bild 2.6**) ist

1. sowohl monoton steigend als auch monoton fallend auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} ,
2. beschränkt (nach oben und unten durch c),
3. nicht umkehrbar.

Beispiel 2.18

Eine oft verwendete Lastannahme für einen z. B. gelenkig gelagerten Balken der Länge l ist eine konstante Belastungsfunktion (Streckenlast) $q(x) = q_0$, $x \in [0, l]$, (siehe **Bild 2.7**).

2.2.2 Die Signumfunktion

Die Signumfunktion (Vorzeichenfunktion) hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}.$$

Die Signumfunktion (siehe **Bild 2.8**) ist

1. monoton steigend auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} ,
2. sowohl monoton steigend als auch monoton fallend auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$,

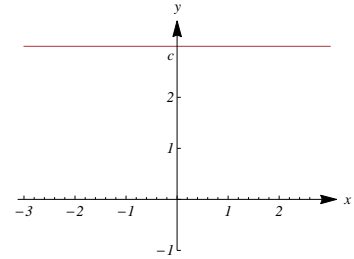


Bild 2.6 $f(x) = c$, $c = 3$

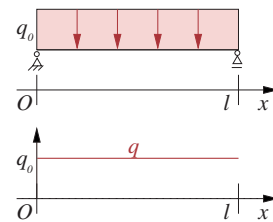


Bild 2.7 Balken mit konstanter Streckenlast $q(x) = q_0$

Belastung als konstante Funktion

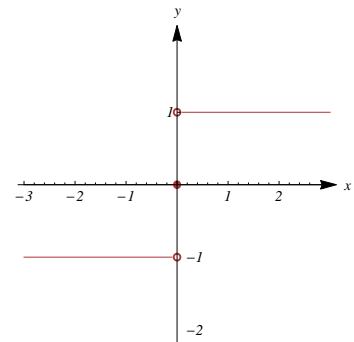


Bild 2.8 $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Modellierung des Massenstromes mit der Signumfunktion

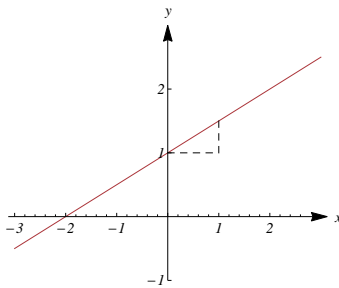


Bild 2.9 $f(x) = mx + n$,
 $m = 0.5, n = 1$



Robert Hooke (*18. Juli 1635 auf der Isle of Wight, †3. März 1703 in London) englischer Physiker, Mathematiker und Erfinder, Professor für Geometrie in Oxford, Mitglied der Royal Society

Fundamentalgesetze der Festkörpermechanik, Wegbereiter der mikroskopischen Forschung, Entdecker der Zellen in Pflanzen, Analyse des Wesens der Verbrennung, Bau eines optischen Telegraphen, Federunruh zur Regelung von Uhren, Architekt von London, Entwurf von Gebäuden

hier: Elastizitätsgesetz

3. beschränkt (nach oben durch 1 und nach unten durch -1),
4. nicht umkehrbar.

Beispiel 2.19

Bei der Berechnung von Wasserversorgungsnetzen ist die Modellierung des sogenannten Massenstromes M_{ij} im Wasserrohr zwischen benachbarten Knoten i und j des Netzes von wesentlicher Bedeutung. Sind P_i bzw. P_j die Drücke in den Knoten i bzw. j , die durch den Druck des Wassers sowie die geodätische Höhe der Knoten verursacht werden, so gilt die Gleichung (siehe z. B. [18])

$$M_{ij} = -\operatorname{sgn}(P_j - P_i) \alpha_{ij} \sqrt{|P_j - P_i|},$$

wobei die positive Größe α_{ij} vom Durchmesser des Rohres, seiner Länge und dem Widerstandsbeiwert der Rohrreibung abhängig ist. Ist der Druck P_j im Knoten j größer als der Druck P_i im Knoten i , so folgt $M_{ij} < 0$. Vereinbarungsgemäß bedeutet das einen Massenstrom vom Knoten j zum Knoten i . Ist der Druck P_j im Knoten j kleiner als der Druck P_i im Knoten i , so folgt $M_{ij} > 0$, was vereinbarungsgemäß einen Massenstrom vom Knoten i zum Knoten j bedeutet.

2.2.3 Die lineare Funktion

Die lineare Funktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = mx + n, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei $m \neq 0$ und n vorgegebene reelle Zahlen sind.

Die lineare Funktion (siehe **Bild 2.9**) ist

1. auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R}
für $m > 0$ streng monoton steigend und
für $m < 0$ streng monoton fallend.
2. unbeschränkt auf ihrem Definitionsbereich \mathbb{R} ,
3. umkehrbar auf ihrem Definitionsbereich \mathbb{R} . Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = x/m - n$. Sie ist ebenfalls linear.

Das Ermitteln der Nullstelle x_N der linearen Funktion entspricht dem Lösen der **linearen Gleichung**

$$f(x_N) = mx_N + n = 0. \text{ Ihre Lösung ist } x_N = -n/m.$$

Für $n = 0$ gewinnt die Funktionsgleichung die Gestalt

$$y = f(x) = mx.$$

In diesem Fall heißen y und x zueinander **proportional** mit dem **Proportionalitätsfaktor** m . Man schreibt auch $y \sim x$.

Beispiel 2.20

1. Viele physikalische Zusammenhänge lassen sich (zumindest näherungsweise) durch lineare Funktionen beschreiben. So besagt z. B. das **Gesetz von Hooke**, dass infolge einer axialen Kraft F die Spannung $\sigma = F/A$ im Querschnitt A eines Stabes der Länge l zur relativen Verlängerung $\delta l/l$ des Stabes proportional ist: $F/A \sim \delta l/l$. Die relative Verlängerung $\delta l/l$ wird als Dehnung ε bezeichnet. Mit dem Proportionalitätsfaktor E (Elastizitätsmodul) ergibt sich die lineare Abhängigkeit

$$\sigma = E \varepsilon.$$

2. Das **zweite Axiom von Newton** besagt, dass infolge einer auf einen Körper der Masse m wirkenden Kraft F eine Beschleunigung a des Körpers in Richtung dieser Kraft hervorgerufen wird, wobei die Kraft proportional zur Beschleunigung mit dem Proportionalitätsfaktor m , der Masse des Körpers, ist. Damit besteht der lineare Zusammenhang

$$F = m a.$$

Beispiel 2.21

Ein Auto beginnt seine Fahrt im Ort A zum $l = 30$ km entfernten Ort B und fährt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_1 = 50$ km/h, ein zweites Auto beginnt seine Fahrt zum selben Zeitpunkt im Ort B und fährt mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $v_2 = 70$ km/h auf derselben Straße zum Ort A . Nach welcher Zeit von Beginn der Fahrt an und nach wie viel km vom Ort A begegnen sich die Autos?

Für den Zeitpunkt des Beginns der Fahrt der beiden Autos wird $t_S = 0$ und für die Position des Ortes A auf der Straße von A nach B wird $s_A = 0$ vereinbart. Die Position des Ortes B ist $s_B = l$. Die Position des ersten Autos zum Zeitpunkt t ist wegen der gleichförmigen Geschwindigkeit $s_1(t) = v_1 t$ und die des zweiten Autos $s_2(t) = s_B - v_2 t$, da das Auto in B startet und sich in Gegenrichtung zum ersten Auto bewegt. Beide Funktionen sind linear. Die Autos begegnen sich, wenn ihre Positionen s_1 und s_2 übereinstimmen. Daraus folgt für den Zeitpunkt t_b der Begegnung die Gleichung $s_1(t_b) = s_2(t_b)$ bzw.

$$v_1 t_b = l - v_2 t_b$$

Umstellen nach t_b ergibt den Zeitpunkt der Begegnung

$$t_b = l/(v_1 + v_2) = 30/(50 + 70) = 1/4 \text{ [h]}.$$

Die Position der Begegnung auf der Straße ist von Ort A aus

$$s_1(t_b) = v_1 l/(v_1 + v_2) = 50 \cdot 30/(50 + 70) = 12.5 \text{ [km]}.$$

Die Graphen der linearen Funktionen s_1 und s_2 , die Positionen der Orte A und B und der Zeitpunkt der Begegnung t_b ist im Koordinatensystem (O, t, s) in **Bild 2.10** dargestellt. Die Position der Begegnung liest man als s -Koordinate des Schnittpunktes der Graphen s_1 und s_2 ab.

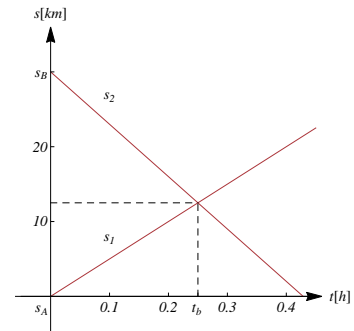
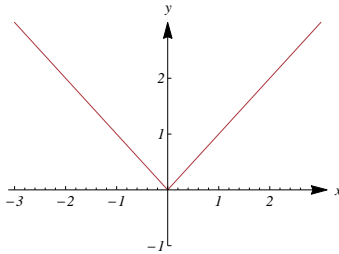
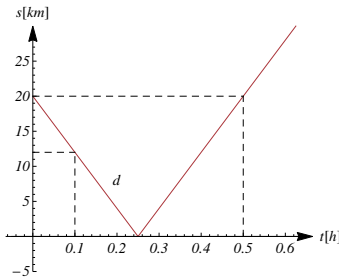
Proportionalitäten in der Physik**Lineare Weg-Zeit-Gesetze**

Bild 2.10 Lineare Bewegungsgesetze s_1 und s_2

2.2.4 Die Betragsfunktion

Die Betragsfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^-.$$

Bild 2.11 $f(x) = |x|$ **Entfernung als Betragsfunktion**Bild 2.12 $d(t) = |20 - 80t|$

Die Betragsfunktion (siehe **Bild 2.11**) ist

1. streng monoton steigend auf dem Intervall $(0, \infty)$ und demzufolge dort umkehrbar,
2. streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ und demzufolge dort umkehrbar,
3. nach unten beschränkt durch 0, da alle Funktionswerte nicht negativ sind, und nach oben unbeschränkt.

Beispiel 2.22

Ein Auto fährt mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v = 80$ km/h über den $l = 20$ km entfernten Ort A zum Ort B . Seine Entfernung d (in km) zum Ort A ist als Funktion der Fahrzeit t (in h) anzugeben. Wie groß ist die Entfernung zu A nach 6 bzw. 30 min ?

Aus dem linearen Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = vt$ für die in der Zeit t erreichte Position s ergibt sich für das Auto eine Fahrzeit von $t^* = l/v = 1/4$ h bis zum Ort A . Bis dahin verkürzt sich seine Entfernung vom Ort A . Sie beträgt demnach $d(t) = l - s(t) = 20 - 80t$ (in km), wenn die Zeit t zwischen 0 h und $1/4$ h liegt. Danach vergrößert sich seine Entfernung vom Ort A wieder. Sie beträgt jetzt $d(t) = s(t) - l = 80t - 20$ (in km). Zusammengefasst ist (in km)

$$d(t) = \begin{cases} 20 - 80t, & 0 \leq t \leq 1/4 \\ 80t - 20, & t > 1/4 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad d(t) = |20 - 80t|, \quad t \geq 0.$$

Nach 6 min ($= 1/10$ h) beträgt die Entfernung noch 12 km bis zum Ort A , nach 30 min ($= 1/2$ h) beträgt sie bereits wieder 20 km. Die Funktion d und ihre Funktionswerte an den Stellen $t = 0.1$ h, $t = 0.5$ h sind in **Bild 2.12** dargestellt.

Eigenschaften

Beim Rechnen mit Beträgen gelten für $x, y, a \in \mathbb{R}$ die Eigenschaften:

Betrag eines Produktes**Betrag eines Quotienten****Wurzel aus Quadrat****Dreiecksungleichung**

1. Aus $|x| \leq a$ folgt $-a \leq x \leq a$ und umgekehrt.
2. $-|x| \leq x \leq |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. $|x/y| = |x|/|y|$, $y \neq 0$
5. $|x| = \sqrt{x^2}$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $|x - y| \geq |x| - |y|$
8. $|x + y| \geq ||x| - |y||$

Beispiel 2.23

Für welche reellen x ist die Ungleichung $|x - 5| < |x + 1|$ erfüllt?

Die Nullstellen der auf der linken bzw. rechten Seite der Ungleichung vorkommenden Betragsfunktionen sind -1 bzw. 5 . Es werden folgende Fälle unterschieden:

- $x < -1$ (dann ist auch $x < 5$) und somit $|x + 1| = -(x + 1)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Aus der Ungleichung folgt nach Auflösen der Beträge $-(x - 5) < -(x + 1)$, d. h. $5 < -1$. Das ist ein Widerspruch. Für $x < -1$ hat die Ungleichung keine Lösung.
- $-1 \leq x < 5$ und somit $|x + 1| = (x + 1)$, $|x - 5| = -(x - 5)$. Aus der Ungleichung folgt nach Auflösen der Beträge $-(x - 5) < (x + 1)$, d. h. $2 < x$. Zusammen mit der Voraussetzung liefert das die Lösungen $2 < x < 5$.
- $x \geq 5$ (dann ist auch $x \geq -1$) und somit $|x + 1| = (x + 1)$, $|x - 5| = (x - 5)$. Aus der Ungleichung folgt nach Auflösen der Beträge $(x - 5) < (x + 1)$, d. h. $-5 < 1$. Das ist für beliebige $x \in \mathbb{R}$ wahr. Für $x \geq 5$ ist die Ungleichung erfüllt.

Die Ungleichung hat die Lösungen $x \in (2, \infty)$.

Die Funktionen $|x - 5|$ und $|x + 1|$ und die Stellen $x = -1$, $x = 2$ und $x = 5$ sind in **Bild 2.13** dargestellt.

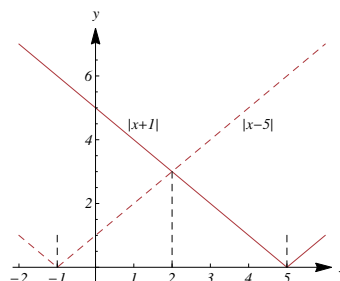
Ungleichungen mit Beträgen

Bild 2.13 Funktionen $|x - 5|$, $|x + 1|$

2.2.5 Die Potenzfunktion

Die Potenzfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = x^k, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$$

Die Potenzfunktion für gerade Exponenten k (siehe **Bild 2.14**) ist

- nicht monoton* auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} ,
- nicht umkehrbar* auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} ,
- streng monoton steigend auf dem Intervall $[0, \infty)$ und demzufolge dort umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist die **Wurzelfunktion** $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$, $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.
- streng monoton fallend auf dem Intervall $(-\infty, 0]$ und demzufolge dort umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = -\sqrt[k]{x}$, $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$.
- nach unten beschränkt durch 0, da alle Funktionswerte nicht negativ sind, und nach oben unbeschränkt.

Die Potenzfunktion für ungerade Exponenten k (siehe **Bild 2.15**) ist

- streng monoton steigend auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} und demzufolge dort umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist die Wurzelfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$, $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- nach unten und nach oben unbeschränkt.

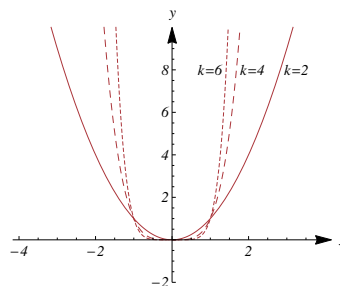


Bild 2.14 $f(x) = x^k$, k gerade

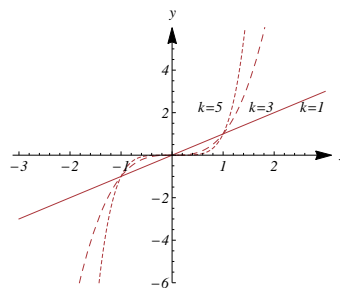


Bild 2.15 $f(x) = x^k$, k ungerade

Kapital als Potenzfunktion des Zinsfaktors

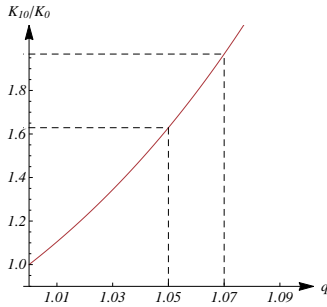


Bild 2.16 $K_n/K_0 = q^n$, $n = 10$
 $q = 1.05$, $q = 1.07$

Beispiel 2.24

Ein zukünftiger Bauherr legt ein Kapital K_0 auf einem Bankkonto über mehrere Jahre an und erhält von der Bank einen jährlichen Zinssatz i dafür. Wie groß ist sein Kapital nach n Jahren?

Das Kapital vergrößert sich bei jährlicher Verzinsung um die Zinsen. Diese berechnen sich als Produkt aus dem Zinssatz und dem vorhandenen Kapital. Damit beträgt das Kapital nach einem Jahr $K_1 = iK_0 + K_0 = (1+i)K_0$, nach zwei Jahren bereits $K_2 = (1+i)K_1 = (1+i)^2K_0$, nach drei Jahren $K_3 = (1+i)K_2 = (1+i)^3K_0$ usw. und nach n Jahren $K_n = (1+i)^nK_0$. Die Größe $q = 1+i$ wird als Zinsfaktor bezeichnet. Damit ist das Verhältnis von dem nach n Jahren vorhandenen Kapital K_n zum eingezahlten Kapital K_0 eine Potenzfunktion des Zinsfaktors q :

$$\frac{K_n}{K_0} = q^n.$$

Bei einem ursprünglichen Kapital von $K_0 = 30\,000$ € hat der zukünftige Bauherr nach 10 Jahren bei einem jährlichen Zinssatz von $i = 5\%$ die stattliche Summe von 48 866.84 € auf seinem Konto, d. h. $1.05^{10} \approx 1.63$ Mal so viel. Bei einem jährlichen Zinssatz von $i = 7\%$ sind es sogar 59 014.54 €, d. h. $1.07^{10} \approx 1.97$ Mal so viel! Die Funktion q^n für $n = 10$ sowie die Funktionswerte an den Stellen $q = 1.05$ und $q = 1.07$ sind in **Bild 2.16** dargestellt.

2.2.6 Die Reziprofunktion

Die Reziprofunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Reziprofunktion (siehe **Bild 2.17**) ist

1. streng monoton fallend auf den Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ und demzufolge dort umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}(x) = 1/x$. Sie ist identisch mit f .
2. nach unten und nach oben unbeschränkt auf ihrem gesamten Definitionsbereich,
3. nach oben beschränkt durch 0 und nach unten unbeschränkt auf dem Intervall $(-\infty, 0)$,
4. nach unten beschränkt durch 0 und nach oben unbeschränkt auf dem Intervall $(0, \infty)$.

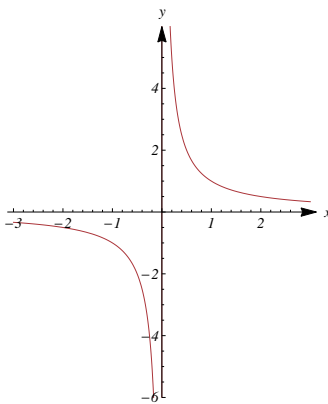


Bild 2.17 $f(x) = 1/x$

Reziprofunktion

Beispiel 2.25

Schwingungsdauer T und Frequenz f eines Pendelschwingers sind zueinander reziprok, d. h. es gilt

$$T = \frac{1}{f} \quad \text{bzw.} \quad f = \frac{1}{T}.$$

2.2.7 Polynome

Ein Polynom P_n vom Grade n hat die Funktionsgleichung

$$y = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad P_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.2)$$

wobei $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ die **Koeffizienten** des Polynoms sind, $a_n \neq 0$.

Für die Summe auf der rechten Seite von (2.2) schreibt man kürzer mithilfe des Summenzeichens

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i. \quad (2.3)$$

Man erhält die Summanden, indem für i der Reihe nach die ganzen Zahlen von 0 bis n , wie im Summenzeichen angegeben, in den Term $a_i x^i$ eingesetzt werden.

Beispiel 2.26

1. Die Funktion $f(x) = 12x^2 - 4x^3$ ist ein Polynom 3. Grades mit den Koeffizienten $a_3 = -4, a_2 = 12, a_1 = 0, a_0 = 0$.
2. Die Funktion $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ ist ein Polynom 7. Grades mit den Koeffizienten $a_i = 1, i = 1, \dots, 7, a_0 = 0$.
3. Die Funktion $f(x) = (x+1)(x+2)$ ist ein Polynom 2. Grades mit den Koeffizienten $a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 2$, denn nach dem Ausmultiplizieren ist $f(x) = x^2 + 3x + 2$.
4. Die Potenzfunktion $y = x^k, k \in \mathbb{N}$ ist ein Polynom k -ten Grades mit den Koeffizienten $a_k = 1, a_i = 0, i = k-1, \dots, 0$.
5. Die lineare Funktion $f(x) = mx + n$ ist ein Polynom 1. Grades mit den Koeffizienten $a_1 = m, a_0 = n$.

Polynome sind Funktionen, die durch endlich viele Additionen und Multiplikationen aus konstanten Funktionen und der Identität $f(x) = x$ zusammengesetzt sind.

Zwei Polynome

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \quad \text{und}$$

$$Q_m(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

sind **gleich**, falls sie vom selben Grad sind (d. h. $m = n$ ist) und $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_0 = b_0$ gilt.

Beispiel 2.28

Aus der Gleichung $3x^2 + 5x + 1 = ax^2 + bx + c, x \in \mathbb{R}$, folgt $a = 3, b = 5, c = 1$.

Polynome und ihre Koeffizienten

Definition 2.27

Koeffizientenvergleich

Nullstellen von Polynomen

Eine zentrale Aufgabe ist die **Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms**, d. h. das Ermitteln derjenigen Argumente x , für die $P_n(x) = 0$ ist.

Nullstellen von Polynomen

Beispiel 2.29

Welche der Zahlen 2, -2 , 10 sind Nullstellen der folgenden Polynome?

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$$

$$Q_3(x) = 4x^3 + 2x^2 + 5x - 4250$$

$$P_4(x) = x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 3x - 78$$

Durch Einsetzen dieser Zahlen in die Funktionsgleichungen findet man, dass 2 Nullstelle von $P_3(x)$ ist, dass 10 Nullstelle von $Q_3(x)$ ist und dass -2 Nullstelle von $P_4(x)$ ist.

Schnittkraftfunktionen

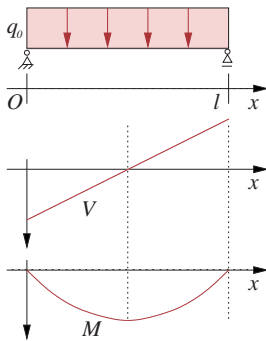


Bild 2.18 Schnittkraftfunktionen

Beispiel 2.30

Die Schnittkräfte V (Querkraft) und M (Biegemoment) am gelenkig gelagerten Balken der Länge l mit der Belastung $q(x) = q_0$ an der Stelle x des Balkens (siehe Bild 2.18) sind Polynome ersten bzw. zweiten Grades:

$$V(x) = 0.5q_0l - q_0x,$$

$$M(x) = -0.5q_0x(x - l).$$

Sie haben folgende Eigenschaften:

1. Die Koeffizienten des Polynoms der Querkraftfunktion sind $a_0 = 0.5q_0l$ und $a_1 = -q_0$.
2. Die Koeffizienten des Polynoms der Biegemomentenfunktion sind $b_0 = 0$, $b_1 = 0.5q_0l$ und $b_2 = -0.5q_0$.
3. Die Nullstelle der Querkraftfunktion V ist $x = l/2$, die Nullstellen der Biegemomentenfunktion M sind $x = 0$ und $x = l$.

Nullstellen quadratischer Polynome

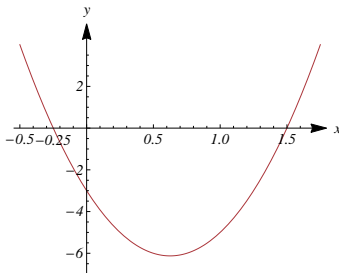


Bild 2.19 $P_2(x) = 8x^2 - 10x - 3$

Beispiel 2.31

Das Ermitteln der Nullstellen von Polynomen zweiten Grades (quadratische Polynome) $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ entspricht dem Lösen der entsprechenden quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Ihre **Diskriminante** ist die Zahl $D = b^2 - 4ac$. Die quadratische Gleichung hat

$$\begin{array}{lll} \text{für } D > 0 & \text{genau zwei reelle Lösungen} & x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \\ \text{für } D = 0 & \text{genau eine reelle Lösung} & x = -b/2a, \\ \text{für } D < 0 & \text{keine reelle Lösung.} & \end{array}$$

In Bild 2.19 ist das Polynom $p_2(x) = 8x^2 - 10x - 3$ mit der Diskriminante $D = 10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 4$ und den beiden reellen Nullstellen $x_1 = -1/4$ und $x_2 = 3/2$ dargestellt.

Offenbar sind $x = x_1$ und $x = x_2$ Lösungen der quadratischen Gleichung

$$0 = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q.$$

Koeffizientenvergleich ergibt den so genannten **Wurzelsatz von Vieta**

$$p = -(x_1 + x_2) \quad \text{und} \quad q = x_1 x_2,$$

d. h. die entgegengesetzte Summe der zwei Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist der Koeffizient p und ihr Produkt ist der Koeffizient q .

Besitzt ein Polynom P_n vom Grad $n \geq 1$ eine reelle Nullstelle x_1 , so gibt es ein Polynom P_{n-1} vom Grad $n - 1$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x).$$

Ein Polynom P_n vom Grad $n \geq 1$ besitzt *höchstens* n reelle Nullstellen. Bezeichnet man diese mit x_1, \dots, x_r , $r \leq n$, so lässt sich die zugehörige Funktionsgleichung bis auf die Reihenfolge der **Linearfaktoren** $(x - x_1), (x - x_2), \dots, (x - x_r)$ eindeutig schreiben in der Form

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_r)P_{n-r}(x),$$

wobei P_{n-r} ein Polynom vom Grade $n - r$ ist, das keine reellen Nullstellen besitzt. Die Nullstellen x_1, \dots, x_r müssen nicht alle voneinander verschieden sein.

Beispiel 2.34

- Das Polynom $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ (siehe **Bild 2.20**) hat die Nullstelle $x = 2$, wie man z. B. durch Probieren feststellt. Nach **Satz 2.32** kann der Linearfaktor $x - 2$ abgespalten werden, d. h. das Polynom P_3 ist durch $x - 2$ teilbar. Durch Polynomdivision findet man

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = (x - 2)(x^2 - 2).$$

Das Restpolynom $x^2 - 2$ ist vom Grade zwei und hat die beiden reellen Nullstellen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$. Daher erhält man die vollständige Zerlegung in Linearfaktoren

$$P_3(x) = (x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

- Das Polynom $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2$ (siehe **Bild 2.21**) ist biquadratisch, denn mit der Substitution $z = x^2$ ergibt sich $\tilde{P}_2(z) = z^2 + z - 2$. Die entsprechende quadratische Gleichung $\tilde{P}_2(z) = 0$ hat die Lösungen $z = 1$ und $z = -2$, und man erhält nach der Rücksubstitution

$$P_4(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2).$$

Das quadratische Polynom $x^2 - 1$ hat die Nullstellen 1 und -1 , das quadratische Polynom $x^2 + 2$ hat keine reellen Nullstellen. Daher ergibt sich als Zerlegung

$$P_4(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 2).$$

- Das Polynom $P_n(x) = x^n - 1$ hat offenbar die Nullstelle $x = 1$. Daher ist es durch den Linearfaktor $x - 1$ teilbar, und man erhält die Zerlegung

$$P_n(x) = x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

- Das Polynom $P_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + 1$ hat die Nullstelle $x = -1$, und es ist

$$P_{2n+1}(x) = x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \dots - x + 1).$$

- Das Polynom $P_{2n}(x) = x^{2n} - 1$ hat die Nullstelle $x = -1$, und es ist

$$P_{2n}(x) = x^{2n} - 1 = (x + 1)(x^{2n-1} - x^{2n-2} + x^{2n-3} - \dots + x - 1).$$

Satz 2.32

Satz 2.33

Abspalten von Linearfaktoren

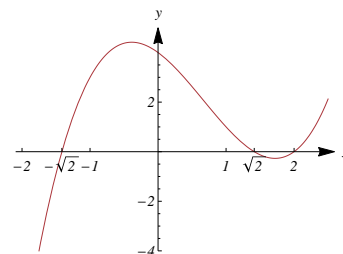


Bild 2.20 $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$

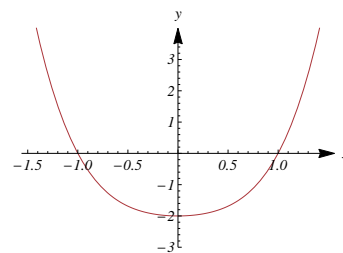


Bild 2.21 $P_4(x) = x^4 + x^2 - 2$

Summe, Differenz, Produkt und Verkettung von Polynomen sind wieder Polynome.

Verkettung von Polynomen

Beispiel 2.35

Aus den Polynomen $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$ und $P_1(x) = x - 1$ erhält man durch Verkettung jeweils ein Polynom 3. Grades:

$$\begin{aligned} P_3(P_1(x)) &= (x - 1)^3 - 2(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 4 = x^3 - 5x^2 + 5x + 3, \\ P_1(P_3(x)) &= (x^3 - 2x^2 - 2x + 4) - 1 = x^3 - 2x^2 - 2x + 3. \end{aligned}$$

Die Verkettung von Polynomen ist i. Allg. nicht kommutativ, wie der Koeffizientenvergleich zeigt.

Horner-Schema

William George Horner (* 1786 in Bristol, † 1837 in Bath)
 englischer Mathematiker, Schuldirektor in Bath
 Arbeiten auf dem Gebiet der Algebra
hier: Horner-Schema zur Lösung algebraischer Gleichungen

Zur Berechnung von Funktionswerten von Polynomen wird oft das Horner-Schema benutzt. Durch sukzessives Ausklammern erhält man aus dem Polynom

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= ((\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_2)x + a_1)x + a_0. \end{aligned}$$

Soll der Funktionswert von $P_n(x)$ an der Stelle x^* berechnet werden, so berechnet man die Terme in den Klammern von innen nach außen. Mit der Bezeichnung $b_{n-1} = a_n$ ergibt sich so der Reihe nach

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= b_{n-1} x^* + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= b_1 x^* + a_1 \quad \text{und schließlich} \\ P_n(x^*) &= b_0 x^* + a_0. \end{aligned}$$

Diese Berechnungen können im so genannten **Horner-Schema** übersichtlich durchgeführt werden:

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_2	a_1	a_0		
x^*	\downarrow	$x^* b_{n-1}$	$x^* b_{n-2}$	$x^* b_2$	$x^* b_1$	$x^* b_0$		
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}		b_1	b_0	$P_n(x^*)$		(2.4)

Berechnung von Funktionswerten

Beispiel 2.36

Die Funktionswerte des Polynoms $P_4(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 52x - 48$ sind an den Stellen $x = 7$, $x = 3$ und $x = 2$ zu berechnen. Mit dem Horner-Schema ist

1	-3	-12	52	-48	1	-3	-12	52	-48	1	-3	-12	52	-48
7	7	28	112	1148	3	3	0	-36	48	2	2	-2	-28	48
1	4	16	164	1100	1	0	-12	16	0	1	-1	-14	24	0

$P_4(7) = 1100$

$P_4(3) = 0$

$P_4(2) = 0$

Aus dem Horner-Schema (2.4) können außerdem die Koeffizienten des Polynoms $P_{n-1}(x)$ entnommen werden, das man erhält, wenn man das Ausgangspolynom $P_n(x)$ durch den Linearfaktor $(x - x^*)$ teilt. Diese Koeffizienten sind gerade die Zahlen $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ in der unteren Reihe des Horner-Schemas, und $r_0 = P_n(x^*)$ ist der Rest bei dieser Division, sodass mit der in (2.3) verwendeten Schreibweise mithilfe des Summenzeichens gilt

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = (x - x^*) P_{n-1}(x) + r_0, \quad P_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i. \quad (2.5)$$

Beweis: Multipliziert man die rechte Seite in (2.5) aus, so erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i x^i &= x \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i - x^* \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + r_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{i+1} - x^* \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i + r_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (b_{i-1} - x^* b_i) x^i + b_{n-1} x^n + r_0 - b_0 x^*. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich auf der linken und rechten Seite liefert

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1}, & \text{d. h. } b_{n-1} &= a_n, \\ a_{n-1} &= b_{n-2} - x^* b_{n-1}, & \text{d. h. } b_{n-2} &= b_{n-1} x^* + a_{n-1}, \\ & & \vdots & \\ a_1 &= b_0 - x^* b_1, & \text{d. h. } b_0 &= b_1 x^* + a_1, \\ a_0 &= r_0 - x^* b_0, & \text{d. h. } r_0 &= b_0 x^* + a_0. \end{aligned}$$

Das ist aber gerade das Horner-Schema (2.4). ■

Beispiel 2.37

Aus den Horner-Schemata in **Beispiel 2.36** entnimmt man mit (2.5) die Resultate der Polynomdivisionen von $P_4(x)$ durch die Linearfaktoren $(x - 7)$, $(x - 3)$ bzw. $(x - 2)$:

$$P_4(x) = (x - 7)(x^3 + 4x^2 + 16x + 164) + 1100,$$

$$P_4(x) = (x - 3)(x^3 - 12x + 16),$$

$$P_4(x) = (x - 2)(x^3 - x^2 - 14x + 24).$$

Die Polynomdivisionen durch $(x - 3)$ bzw. $(x - 2)$ erfolgen jeweils ohne Rest, da 3 und 2 Nullstellen von $P_4(x)$ sind. Man kann auch ein fortlaufendes Horner-Schema erstellen:

1	-3	-12	52	-48	
3	3	0	-36	48	
1	0	-12	16	0	
2	2	4	-16		
1	2	-8	0		

Daraus entnimmt man unmittelbar die Linearfaktorenzerlegung

$$P_4(x) = (x - 3)(x - 2)(x^2 + 2x - 8).$$

Berechnet man noch die Nullstellen 2 und -4 des verbleibenden quadratischen Polynoms, folgt als vollständige Linearfaktorzerlegung von P_4 (siehe **Bild 2.22**)

$$P_4(x) = (x - 3)(x - 2)^2(x + 4).$$

Die Division durch den Linearfaktor $x - x^*$ in (2.5) kann sukzessive auf das Polynom P_{n-1} mit dem Rest r_1 usw. angewendet werden. Man erhält die Gleichungen

Polynomdivision durch Linearfaktor

Horner-Schema zur Polynomdivision

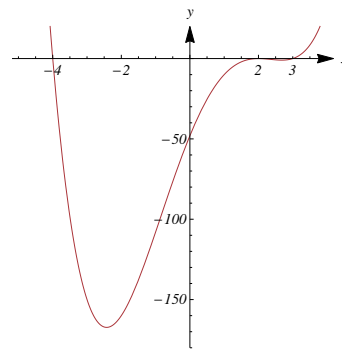


Bild 2.22

$$P_4(x) = (x - 3)(x - 2)^2(x + 4)$$

Vollständige Entwicklung nach Potenzen eines Linearfaktors

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= (x - x^*)P_{n-1}(x) + r_0 && (1. \text{ Horner-Schema}), \\
 P_{n-1}(x) &= (x - x^*)P_{n-2}(x) + r_1 && (2. \text{ Horner-Schema}), \\
 &\vdots \\
 P_1(x) &= (x - x^*)P_0(x) + r_{n-1} && (n. \text{ Horner-Schema}).
 \end{aligned}$$

Setzt man die zweite in die erste Gleichung ein, so folgt

$$P_n(x) = (x - x^*)^2 P_{n-2}(x) + r_1(x - x^*) + r_0,$$

setzt man die dritte in diese Gleichung ein usw., so folgt schließlich die **vollständige Entwicklung nach Potenzen von $(x - x^*)$** :

$$P_n(x) = (x - x^*)^n P_0(x) + r_{n-1}(x - x^*)^{n-1} + \dots + r_1(x - x^*) + r_0.$$

Vollständiges Horner-Schema

Beispiel 2.38

Für das Polynom $P_4(x)$ aus **Beispiel 2.36** erhält man an den Stellen $x = 7$ bzw. $x = 2$ das vollständige Horner-Schema

1	-3	-12	52	-48		1	-3	-12	52	-48	
7		7	28	112	1148	2		2	-2	-28	48
	1	4	16	164	1100 = r_0		1	-1	-14	24	0 = r_0
7		7	77	651		2		2	2	-24	
	1	11	93	815 = r_1			1	1	-12	0 = r_1	
7		7	126			2		2	6		
	1	18	219 = r_2				1	3	-6	= r_2	
7		7				2		2			
	1	25 = r_3					1	5 = r_3			

Daraus folgt die vollständige Zerlegung nach Potenzen von $(x - 7)$

$$P_4(x) = 1(x - 7)^4 + 25(x - 7)^3 + 219(x - 7)^2 + 815(x - 7) + 1100$$

und die vollständige Zerlegung nach Potenzen von $(x - 2)$ (ohne absolutes und lineares Glied, da $x = 2$ zweifache Nullstelle von $P_4(x)$ ist)

$$P_4(x) = 1(x - 2)^4 + 5(x - 2)^3 - 6(x - 2)^2.$$

2.2.8 Rationale Funktionen

Die rationale Funktion hat eine Funktionsgleichung der Form

$$y = f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei P_n und P_m Polynome vom Grad n bzw. m sind.

An den Nullstellen des Polynoms P_m (Nennerpolynom) ist die Funktion f nicht definiert.

Sei x_0 Nullstelle von P_m , sodass $P_m(x_0) = 0$ ist. Ist x_0 *nicht* Nullstelle von P_n , gilt also $P_n(x_0) \neq 0$, so wird x_0 als **Polstelle** von f bezeichnet.

Tritt der Linearfaktor $(x - x_0)$ in der Zerlegung des Zählerpolynoms $P_n(x)$ genau k -mal und in der des Nennerpolynoms $P_m(x)$ genau l -mal auf, $k, l \in \mathbb{N}$, so hat die Funktion $f(x)$ an dieser Stelle

- für $k \geq l$ eine **Lücke** ($(x - x_0)^l$ kann vollständig aus dem Nenner gekürzt werden) und
- für $k < l$ eine **Polstelle** (Funktionswerte sind in einer beliebigen Umgebung von $x = x_0$ unbeschränkt).

Summe, Differenz, Produkt und Quotient rationaler Funktionen sind wieder rationale Funktionen, ebenso deren Verkettung.

Beispiel 2.39

Die rationale Funktion $f(x) = \frac{x-4}{x^2-6x+8} = \frac{x-4}{(x-2)(x-4)}$ (siehe **Bild 2.23**) hat folgende Eigenschaften:

1. Sie ist an den Nullstellen des Nennerpolynoms $x = 2$ und $x = 4$ nicht definiert.
2. An der Stelle $x = 2$ hat sie eine *Polstelle*, da das Zählerpolynom dort von 0 verschieden ist (es gilt $P_1(2) = -2$).
3. An der Stelle $x = 4$ hat sie eine *Lücke*. Das Zählerpolynom ist zwar dort auch gleich 0, aber die Funktion $f(x)$ ist bis auf die Stelle $x = 4$, an der sie nicht definiert ist, identisch mit der Funktion $\tilde{f}(x) = 1/(x-2)$, wie man durch Kürzen feststellt. \tilde{f} hat an der Stelle $x = 4$ den Funktionswert 0.5, also keine Besonderheit.

Beispiel 2.40

Die elektrische Leistung P , die ein Gerät mit dem Widerstand R umsetzt, das an eine Spannungsquelle mit der Spannung U und dem Innenwiderstand R_i angeschlossen ist, ist eine rationale Funktion von R :

$$P(R) = \frac{U^2 R}{(R + R_i)^2}.$$

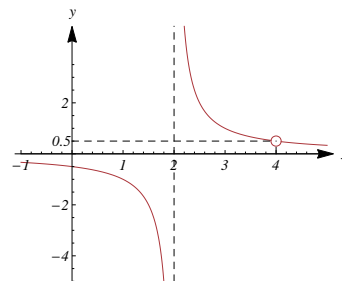


Bild 2.23

$$f(x) = (x-4)/(x^2-6x+8)$$

Polstelle und Lücke

Elektrische Leistung

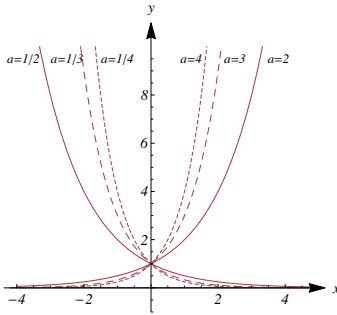
2.2.9 Die Exponential- und Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion hat die Funktionsgleichung

$$f(x) = a^x, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R} \text{ fest, } a > 0, a \neq 1.$$

Die Exponentialfunktion (siehe **Bild 2.24**) ist

1. für $a > 1$ streng monoton steigend auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} und demzufolge dort umkehrbar,
2. für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R} und demzufolge dort umkehrbar,

Bild 2.24 $f(x) = a^x$

Natürliche Exponentialfunktion

Exponentialfunktion bei Zusammenhängen in der Natur

3. nach unten beschränkt durch 0, da alle Funktionswerte positiv sind, und nach oben unbeschränkt.

Aus $f(x) = a^x$ erhält man $f(-x) = a^{-x} = 1/a^x = (1/a)^x$, d. h. die Graphen der Exponentialfunktionen a^x und $(1/a)^x$ mit zueinander reziproken Basen sind symmetrisch zur y -Achse (siehe Bild 2.24).

Für die Exponentialfunktion gelten die Potenzgesetze, insbesondere das Gesetz

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \text{ für beliebige } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Exponentialfunktion mit der **Euler-Zahl** $e = 2,718281\dots$ als Basis wird **natürliche Exponentialfunktion** $f(x) = e^x$ genannt. Sie spielt eine wesentliche Rolle bei der Beschreibung von Zusammenhängen in der Natur.

Beispiel 2.41

1. Das Wachstum einer Population p in Abhängigkeit von der Zeit t (z. B. Bakterien in einer Kläranlage) mit dem Bestand p_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ lässt sich durch das Gesetz

$$p(t) = p_0 e^{\alpha t}$$

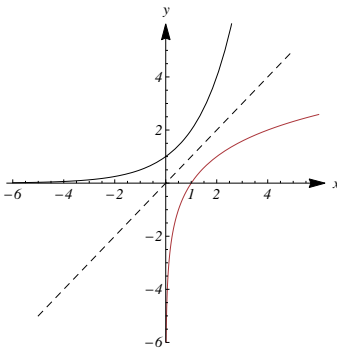
beschreiben. Dabei gibt die Konstante α die Stärke des Wachstums an, die aus zwei Messungen bestimmt werden kann.

2. Die Absorption einer Welle (z. B. Explosionswelle, Erdbebenwelle), d. h. die Abnahme ihrer Energiestromstärke Φ entlang eines Weges x , genügt dem Gesetz

$$\Phi(x) = \Phi_0 e^{-\beta x}.$$

Dabei ist β der Absorptionskoeffizient und Φ_0 die Energiestromstärke im Punkt $x = 0$.

Logarithmus als Umkehrfunktion

Bild 2.25 $f(x) = 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, und man definiert

$$x = \log_a y \quad \text{genau dann, wenn} \quad y = a^x.$$

Vertauscht man wie in **Abschnitt 2.1.4** beschrieben die Rollen von Argument y und Funktionswert x , so folgt als Funktionsgleichung der Logarithmusfunktion (siehe Bild 2.25)

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$

Da Exponential- und Logarithmusfunktion zu den gleichen Basen Umkehrfunktionen sind, sind ihre Funktionsgraphen symmetrisch zum Graphen von $y = x$ (siehe Bild 2.25).

Die Logarithmusfunktion ist

1. streng monoton steigend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $0 < a < 1$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich \mathbb{R}^+ und demzufolge dort umkehrbar,
2. nach oben und unten unbeschränkt auf ihrem Definitionsbereich,
3. hat eine Nullstelle bei $x = 1$. (Wie in **Abschnitt 1.3** bemerkt, ist vereinbarungsgemäß $a^0 = 1$ und daher $\log_a 1 = 0$.)

Die Logarithmen zu den Basen 10 und e werden häufig verwendet. Sie stehen u.a. auf Taschenrechnern und in den höheren Programmiersprachen zur Verfügung. Oft werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$$\log_{10} x = \lg x, \quad \log_e x = \ln x.$$

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Logarithmengesetze, die sich alle unmittelbar aus der Definition des Logarithmus ableiten lassen:

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c,$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c,$$

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a b^c = c \cdot \log_a b,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Beispiel 2.42

Sind L_1, L_2, \dots, L_n die Schallpegel von n Schallquellen, so berechnet sich der Gesamtschallpegel L_{ges} dieser Schallquellen gemäß der Gleichung (siehe [35])

$$L_{\text{ges}} = 10 \lg \sum_{j=1}^n 10^{0.1L_j}.$$

1. Um wie viel erhöht sich der Schallpegel, wenn statt einer Schallquelle n gleich laute Schallquellen vorhanden sind?

Ist der Schallpegel einer dieser Schallquellen gleich L , so beträgt der Schallpegel von n solcher Schallquellen nach der obigen Gleichung

$$L_{\text{ges}} = 10 \lg (n \cdot 10^{0.1L}) = 10 (\lg n + \lg 10^{0.1L}) = 10 \lg n + L,$$

er ist um $10 \lg n$ größer als der Schallpegel von nur einer dieser Schallquellen.

2. Bei lärmgedämpften Nutzfahrzeugen konnte der Schallpegel von 90 auf 74 dB gesenkt werden. Wie viele dieser umweltfreundlicheren Nutzfahrzeuge erzeugen jetzt denselben Lärmpegel wie ein Produkt der alten geräuschstärkeren Serie?

Die gesuchte Anzahl sei n . Ein Nutzfahrzeug der alten geräuschstärkeren Serie erzeugt einen Pegel von 90 dB, n umweltfreundlichere Nutzfahrzeuge erzeugen nach Aufgabe 1. einen Pegel von $10 \lg n + 74$ dB. Aus der sich ergebenden Gleichung

$$90 = 10 \lg n + 74$$

folgt durch Umstellen nach n die Gleichung

$$1.6 = \lg n \quad \text{bzw.} \quad n = 10^{1.6} \approx 40.$$

Etwa 40 Nutzfahrzeuge der umweltfreundlicheren Serie erzeugen so viel Lärm wie ein altes. Die Abhängigkeit des Gesamtschallpegels L_{ges} von der Anzahl n der Nutzfahrzeuge gleichen Schallpegels ist in **Bild 2.26** dargestellt.

Gebräuchliche Basen

Logarithmengesetze

Logarithmus eines Produktes

Logarithmus eines Quotienten

Logarithmus als Exponent

Logarithmus einer Potenz

Logarithmus einer anderen Basis

Berechnung des Schallpegels

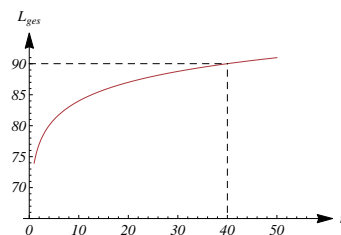


Bild 2.26 $L_{\text{ges}}(n) = 10 \lg n + 74$

2.2.10 Trigonometrische Funktionen

Gradmaß und Bogenmaß

Das **Gradmaß** unterteilt

den Vollwinkel in 360° , jedes Grad in $60'$ (Minuten),
 den gestreckten Winkel in 180° , jede Minute in $60''$ (Sekunden).
 den rechten Winkel in 90° ,

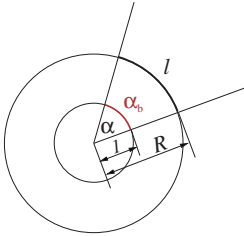


Bild 2.27 Bogenmaß α_b

Das **Bogenmaß** eines Winkels α in **Radian** ist das Verhältnis der Längen des zugehörigen Kreisbogens l und des Radius' R des Kreises: $\alpha = l/R$ (siehe **Bild 2.27**). Für einen Kreis mit dem Radius 1 ist das Bogenmaß die (einheitslose) Länge des Kreisbogens, den die Schenkel des Winkels aus dem Kreis ausschneiden. Demnach entspricht z. B.

dem Vollwinkel das Bogenmaß 2π ,
 dem gestreckten Winkel das Bogenmaß π ,
 dem rechten Winkel das Bogenmaß $\pi/2$.

Ist α_b die Maßzahl des Winkels im Bogenmaß und α_g seine Maßzahl im Gradmaß, so ergeben sich aus den Entsprechungen

$$\alpha_g = 360^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_b = 2\pi$$

die Gleichungen zum Umrechnen von Grad- und Bogenmaß:

Umrechnung

$$\alpha_b = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha_g \quad \text{bzw.} \quad \alpha_g = \frac{180^\circ}{\pi} \alpha_b.$$

Sinus- und Kosinusfunktion

Im rechtwinkligen Koordinatensystem $(0, x, y)$ wird dem Winkel α mit einem Schenkel auf der x -Achse der Punkt $P(x_p, y_p)$ des Einheitskreises (Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung O) zugeordnet, den der andere Schenkel als Schnittpunkt mit dem Einheitskreis hat (siehe **Bild 2.28**).

Definition 2.43

Der **Sinus** des Winkels α ist die y -Koordinate y_p des zu ihm gehörenden Punktes $P(x_p, y_p)$ auf dem Einheitskreis, der **Kosinus** des Winkels α ist die x -Koordinate x_p dieses Punktes:

$$y_p = \sin \alpha, \quad x_p = \cos \alpha.$$

Aus der **Definition 2.43** ergibt sich durch einfache geometrische Zusammenhänge folgende Wertetabelle für Sinus und Kosinus:

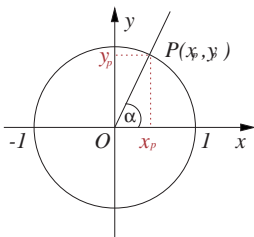


Bild 2.28 Sinus x_p , Kosinus y_p

α in Grad	0	30	45	60	90	180	270
α in Radian	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$\sin \alpha$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0

Die Sinusfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \sin x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1],$$

die Kosinusfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \cos x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Sinusfunktion (siehe **Bild 2.29**) und Kosinusfunktion (siehe **Bild 2.30**) haben folgende Eigenschaften ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

- Die Sinusfunktion ist
streng monoton steigend auf den Intervallen $[-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$,
streng monoton fallend auf den Intervallen $[\pi/2 + 2k\pi, 3\pi/2 + 2k\pi]$,
die Kosinusfunktion ist
streng monoton steigend auf den Intervallen $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$,
streng monoton fallend auf den Intervallen $[2k\pi, (2k + 1)\pi]$.
- Beide Funktionen sind beschränkt: $-1 \leq \sin x \leq 1$, $-1 \leq \cos x \leq 1$.
- Die Nullstellen der Sinusfunktion sind $x = k\pi$,
die Nullstellen der Kosinusfunktion sind $x = \pi/2 + k\pi$.
- Beide Funktionen haben die **Periode** 2π , d. h. es gilt
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
- Die Sinusfunktion ist eine **ungerade Funktion**,
die Kosinusfunktion ist eine **gerade Funktion**, d. h. es ist
 $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Zwischen Sinus- und Kosinusfunktion gelten für alle $x \in \mathbb{R}$ folgende Zusammenhänge, die **Additionstheoreme** genannt werden:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$, $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$,
- $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\sin(\pi + x) = -\sin x$,
 $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$,
- $\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$,
 $\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$,
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$,
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$.

Tangens- und Kotangensfunktion

Der Quotient aus Sinus und Kosinus eines Winkels x heißt **Tangens** dieses Winkels, der Quotient aus Kosinus und Sinus des Winkels x heißt **Kotangens** dieses Winkels:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

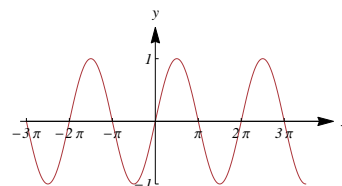


Bild 2.29 $f(x) = \sin x$

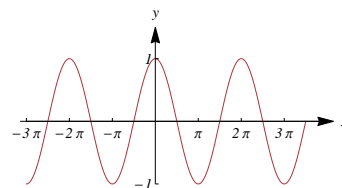


Bild 2.30 $f(x) = \cos x$

Additionstheoreme

Definition 2.44

Die Tangensfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \tan x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

die Kotangensfunktion hat die Funktionsgleichung

$$y = f(x) = \cot x, \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tangensfunktion (siehe **Bild 2.31**) und Kotangensfunktion (siehe **Bild 2.32**) haben folgende Eigenschaften ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$):

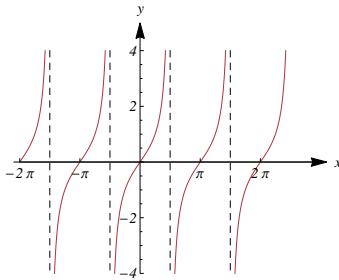


Bild 2.31 $f(x) = \tan x$

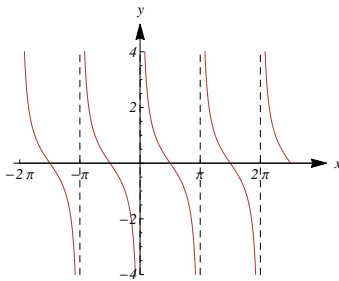


Bild 2.32 $f(x) = \cot x$

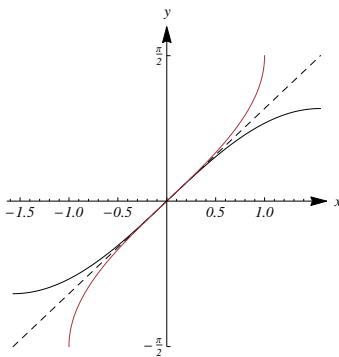


Bild 2.33 $f(x) = \sin x,$
 $f^{-1}(x) = \arcsin x$

1. Die Tangensfunktion ist streng monoton steigend auf den Intervallen $(-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi)$, die Kotangensfunktion ist streng monoton fallend auf den Intervallen $(k\pi, (k+1)\pi)$.
2. Die Nullstellen der Tangensfunktion sind $x = k\pi$, die Nullstellen der Kotangensfunktion sind $x = \pi/2 + k\pi$, das sind jeweils die Nullstellen ihrer Zählerfunktionen.
3. Die Tangensfunktion hat Polstellen bei $x = \pi/2 + k\pi$, die Kotangensfunktion hat Polstellen bei $x = k\pi$, das sind jeweils die Nullstellen ihrer Nennerfunktionen. An diesen Stellen sind sie nicht definiert.
4. Wegen der Polstellen sind beide Funktionen unbeschränkt.
5. Sie haben die **Periode** π , und es gilt $\tan(x + k\pi) = \tan x, \quad \cot(x + k\pi) = \cot x.$

Die Periodizität lässt sich mithilfe der Additionstheoreme nachweisen. So ist

$$\begin{aligned} \tan(x + k\pi) &= \frac{\sin(x + k\pi)}{\cos(x + k\pi)} = \frac{\sin x \cos k\pi + \cos x \sin k\pi}{\cos x \cos k\pi - \sin x \sin k\pi} \\ &= \frac{\sin x \cos k\pi}{\cos x \cos k\pi} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x. \end{aligned}$$

6. Beide Funktionen sind **ungerade Funktionen**.

Umkehrfunktionen

Betrachtet man die Sinusfunktion $y = f(x) = \sin x$ nur auf dem Intervall $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, so ist sie dort streng monoton steigend und daher nach **Satz 2.15** dort umkehrbar. Der **Arcussinus** wird definiert als

$$x = \arcsin y \quad \text{genau dann, wenn} \quad y = \sin x, \quad x \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion mit dem Argument x ist

$$f^{-1}(x) = \arcsin x, \quad f^{-1}: [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2].$$

Betrachtet man die Kosinusfunktion $y = f(x) = \cos x$ nur auf dem Intervall $x \in [0, \pi]$, so ist sie dort streng monoton fallend und daher nach **Satz 2.15** dort umkehrbar. Der **Arcuscosinus** wird definiert als

$x = \arccos y$ genau dann, wenn $y = \cos x, x \in [0, \pi]$.

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion mit dem Argument x ist

$$f^{-1}(x) = \arccos x, f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Betrachtet man die Tangensfunktion $y = f(x) = \tan x$ nur auf dem Intervall $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, so ist sie dort streng monoton steigend und daher nach **Satz 2.15** dort umkehrbar. Der **Arcustangens** wird definiert als

$x = \arctan y$ genau dann, wenn $y = \tan x, x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Die Funktionsgleichung der Umkehrfunktion mit dem Argument x ist

$$f^{-1}(x) = \arctan x, f^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\pi/2, \pi/2).$$

Die Graphen der Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens sind auf den angegebenen Intervallen zusammen mit ihren Umkehrfunktionen Arcussinus, Arcuscosinus und Arcustangens in **Bild 2.33**, **2.34** und **2.35** dargestellt.

Trigonometrische Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

In **Definition 2.43** wurde der Sinus und der Kosinus eines Winkels α am Einheitskreis definiert. Wählt man einen Kreis mit beliebigem Radius, der mit den Schenkeln des Winkels α die Schnittpunkte Q' und P' hat, so ergibt sich aufgrund des Strahlensatzes mit $\overline{PQ} = y_p, \overline{OP} = 1$ (siehe **Bild 2.36**)

$$\overline{OP} : \overline{OP'} = \overline{PQ} : \overline{P'Q'}, \quad \overline{PQ} = y_p = \sin \alpha = \overline{P'Q'} : \overline{OP'},$$

d. h. der Sinus des Innenwinkels α im rechtwinkligen Dreieck $\triangle OQ'P'$ ist gleich dem **Quotienten aus der Gegenkathete $\overline{P'Q'}$ und der Hypotenuse $\overline{OP'}$** .

Analog erhält man den Kosinus des Innenwinkels α im rechtwinkligen Dreieck $\triangle OQ'P'$ als **Quotienten aus der Ankathete $\overline{OQ'}$ und der Hypotenuse $\overline{OP'}$** :

$$\overline{OQ} = x_p = \cos \alpha = \overline{OQ'} : \overline{OP'}.$$

Der Tangens des Innenwinkels α ergibt sich im rechtwinkligen Dreieck $\triangle OQ'P'$ aus der **Definition 2.44** als **Quotient aus der Gegenkathete $\overline{P'Q'}$ und der Ankathete $\overline{OQ'}$** :

$$\tan \alpha = \overline{P'Q'} : \overline{OQ'}.$$

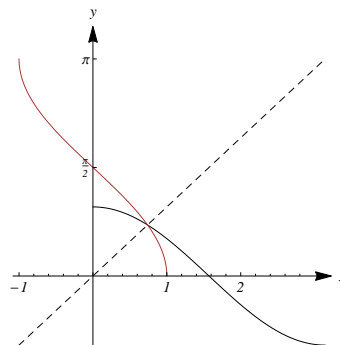


Bild 2.34 $f(x) = \cos x,$
 $f^{-1}(x) = \arccos x$

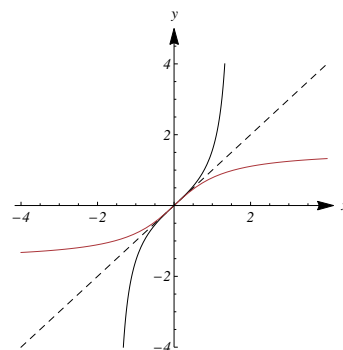


Bild 2.35 $f(x) = \tan x,$
 $f^{-1}(x) = \arctan x$

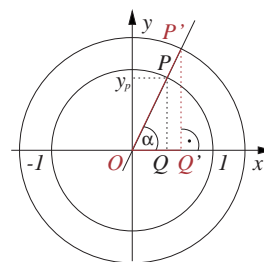


Bild 2.36 Rechtwinkliges Dreieck

Sinussatz und Kosinussatz am beliebigen Dreieck

Satz 2.45 Sinussatz

Die Sinuse zweier Innenwinkel im Dreieck verhalten sich wie die Längen der ihnen gegenüberliegenden Seiten (siehe **Bild 2.37**):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}, \quad \text{analog} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{b}{c}. \quad (2.6)$$

Beweis: Aus den trigonometrischen Beziehungen an den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ALC$ und $\triangle LBC$ mit L als Fußpunkt der Höhe h_c vom Eckpunkt C auf die Seite c folgt

$$\sin \alpha = h_c/b \quad \text{und} \quad \sin \beta = h_c/a$$

und daraus unmittelbar die Gleichung (2.6). ■

Satz 2.46 Kosinussatz

Das Quadrat der Länge einer Seite am Dreieck ist gleich der Summe der Quadrate der Längen der beiden anderen Seiten, vermindert um ihr zweifaches Produkt mit dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Innenwinkels:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (2.7)$$

Beweis: Aus dem Satz des Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecken $\triangle ALC$ und $\triangle LBC$ (siehe **Bild 2.37**) folgt

$$a^2 = h_c^2 + q^2 \quad \text{und} \quad b^2 = h_c^2 + p^2. \quad (2.8)$$

Die Kosinusbeziehung am rechtwinkligen Dreieck $\triangle ALC$ ergibt

$$p = b \cos \alpha. \quad (2.9)$$

Eliminiert man aus (2.8) h_c und verwendet noch $q = c - p$, so folgt

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2pc$$

und mit Gleichung (2.9) unmittelbar die Behauptung (2.7) des Kosinussatzes. ■

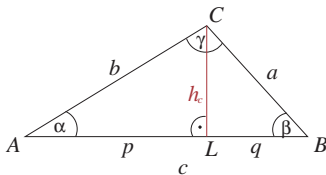


Bild 2.37 Beliebiges Dreieck



Johannes Müller von Königsberg (auch kurz Hans Müller), latinisiert **Regiomontanus** (*6. Juni 1436 in Unfinfen (Königsberg), †6. Juli 1476 in Rom) bedeutender Mathematiker, Astronom und Verleger des Spätmittelalters

Begründer der neuzeitlichen Trigonometrie, Konstruktion astronomischer Beobachtungsinstrumente, astronomische Tafeln, eigene Druckerei und Sternwarte

hier: Berechnungen am Dreieck

Berechnungen am Dreieck

Viele der folgenden trigonometrischen Berechnungen am Dreieck gehen zurück auf **Regiomontanus**.

1. Sind im Dreieck $\triangle ABC$ (siehe **Bild 2.37**) eine Seite und die zwei anliegenden Innenwinkel gegeben (z. B. c , α und β), so lassen sich die beiden anderen Seiten mithilfe des Sinussatzes **Satz 2.45** unmittelbar berechnen:

$$a = c \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \text{und} \quad b = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \pi - \alpha - \beta.$$

2. Sind im Dreieck $\triangle ABC$ (siehe **Bild 2.37**) zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Innenwinkel gegeben (z. B. a , b , γ), so errechnet sich die Länge der Seite c unmittelbar aus dem Kosinussatz **Satz 2.46**

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}.$$

Der Winkel $\alpha \in (0, \pi)$ ergibt sich *eindeutig* aus der Gleichung (2.7) (Kosinussatz)

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right), \quad (2.10)$$

da die Umkehrfunktion \arccos als Wertebereich das Intervall $[0, \pi]$ hat. (Bei Anwendung des Sinussatzes lässt sich α nicht eindeutig ermitteln, da die Gleichung $\sin \alpha = a \sin \gamma / c$ im Intervall $(0, \pi)$ zwei Lösungen haben kann.) Der Innenwinkel β ergibt sich danach zu $\beta = \pi - \alpha - \gamma$.

3. Sind im Dreieck $\triangle ABC$ (siehe **Bild 2.37**) die drei Seiten a, b, c gegeben, so berechnen sich die Innenwinkel unmittelbar aus dem Kosinussatz **Satz 2.46**. z. B. erhält man den Innenwinkel α aus Gleichung (2.10).
4. Sind im Dreieck $\triangle ABC$ (siehe **Bild 2.37**) zwei Seiten und einer der nicht eingeschlossenen Innenwinkel gegeben (z. B. a, b, α), so lässt sich der Innenwinkel β dann eindeutig bestimmen, wenn der gegebene Innenwinkel α der *größeren* der beiden gegebenen Seiten a, b gegenüberliegt.

Nach dem Sinussatz **Satz 2.45** ist zunächst

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha. \quad (2.11)$$

Diese Gleichung hat wegen des Wertebereiches der Sinusfunktion nur dann Lösungen, wenn ihre rechte Seite nicht größer als 1 ist, d. h. wenn $b \sin \alpha \leq a$ ist.

- (a) Ist $a > b$, so ist auch $\alpha > \beta$ (d. h. α liegt der größeren der beiden gegebenen Seiten a gegenüber) und daher $\beta < \pi/2$. Gleichung (2.11) ist daher eindeutig lösbar.
- (b) Ist $a = b$, so ist das Dreieck gleichschenkelig, und für $\alpha < \pi/2$ erhält man $\alpha = \beta$.
- (c) Ist $a < b$, so ist auch $\alpha < \beta$ (d. h. α liegt der kleineren der beiden gegebenen Seiten a gegenüber, siehe **Bild 2.38**).
Für $b \sin \alpha < a$ hat Gleichung (2.11) zwei voneinander verschiedene Lösungen β_1 und β_2 mit $\beta_1 + \beta_2 = \pi$.
Für $b \sin \alpha = a$ hat Gleichung (2.11) genau die Lösung $\beta = \pi/2$.
Für $b \sin \alpha > a$ hat Gleichung (2.11) keine Lösung.

5. Für die Höhe h_c vom Eckpunkt C auf die Seite c folgt unmittelbar aus der trigonometrischen Beziehung am rechtwinkligen Dreieck $\triangle ALC$ bzw. $\triangle LBC$ (siehe **Bild 2.37**)

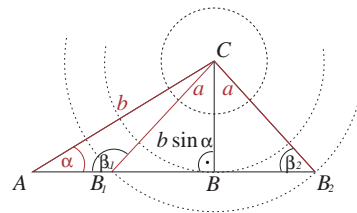


Bild 2.38 Dreieck mit $a < b, \alpha$

Höhe

$$h_c = a \sin \beta = b \sin \alpha.$$

- Flächeninhalt** 6. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks $\triangle ABC$ erhält man mit der Höhe $h_c = a \sin \beta$ aus $A = 0.5 ch_c$ (siehe **Bild 2.37**) unmittelbar

$$A = 0.5 ac \sin \beta,$$

d. h. A errechnet sich als halbes Produkt der Längen zweier Dreiecksseiten und des Sinus des von ihnen eingeschlossenen Innenwinkels.

Seitenhalbierende

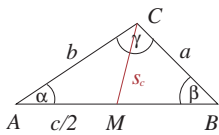


Bild 2.39 Seitenhalbierende

7. Für die Seitenhalbierende s_c vom Eckpunkt C zur Mitte M der Seite c (siehe **Bild 2.39**) ergibt sich mit dem Kosinussatz **Satz 2.46** im Dreieck $\triangle AMC$ unmittelbar

$$s_c = \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{4} - bc \cos \alpha}.$$

Winkelhalbierende

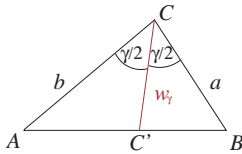


Bild 2.40 Winkelhalbierende

8. Für die Winkelhalbierende w_γ des Innenwinkels γ am Eckpunkt C folgt aus der Tatsache, dass sich die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ als Summe der Flächen der Teildreiecke $\triangle AC'C$ und $\triangle C'BC$ ergibt (siehe **Bild 2.40**), die Gleichung

$$0.5 ab \sin \gamma = 0.5 b w_\gamma \sin(\gamma/2) + 0.5 a w_\gamma \sin(\gamma/2)$$

$$\text{und nach } w_\gamma \text{ umgestellt mit } \sin \gamma = 2 \sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2)$$

$$w_\gamma = \frac{2ab \cos(\gamma/2)}{a + b}.$$

Umkreisradius

9. Für den Umkreisradius r erhält man z. B. aus der trigonometrischen Beziehung im rechtwinkligen Teildreieck $\triangle BA'M$, wenn M der Mittelpunkt des Umkreises (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks) ist (siehe **Bild 2.41**):

$$\sin(\pi/2 - \alpha_1) = a/(2r),$$

$$\text{und mit } \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \pi/2 \text{ und } \beta_1 + \gamma_1 = \alpha \text{ folgt}$$

$$r = a/(2 \sin \alpha).$$

Analog erhält man

$$r = b/(2 \sin \beta) = c/(2 \sin \gamma).$$

Mit dem halben Dreiecksumfang $s = (a + b + c)/2$ lässt sich auch zeigen

$$r = \frac{s}{4 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2) \cos(\gamma/2)}.$$

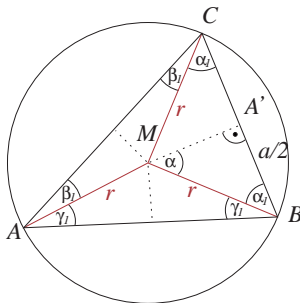


Bild 2.41 Umkreisradius

10. Für den Inkreisradius ρ erhält man z. B. aus der trigonometrischen Beziehung im rechtwinkligen Teildreieck $\triangle AC'M$, wenn M der Mittelpunkt des Inkreises (Schnittpunkt der Winkelhalbierenden der Innenwinkel des Dreiecks) ist (siehe **Bild 2.42**):

$$\tan(\alpha/2) = \rho/a_1$$

$$\text{und mit } 2(a_1 + b_1 + c_1) = a + b + c = 2s \text{ und } b_1 + c_1 = a$$

$$\rho = (s - a) \tan(\alpha/2).$$

Analog erhält man

$$\rho = (s - b) \tan(\beta/2) = (s - c) \tan(\gamma/2).$$

Außerdem lassen sich folgende Formeln zur Berechnung von ρ zeigen:

$$\rho = s \tan(\alpha/2) \tan(\beta/2) \tan(\gamma/2),$$

$$\rho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\rho = 4r \sin(\alpha/2) \sin(\beta/2) \sin(\gamma/2).$$

11. Für den Flächeninhalt A des Dreiecks $\triangle ABC$ lassen sich weitere Formeln zeigen. Aus **Bild 2.42** erhält man die Fläche dieses Dreiecks als Summe der Flächen der Teildreiecke $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CAM$, die jeweils die Höhe ρ haben, zu

$$A = 0.5 a \rho + 0.5 b \rho + 0.5 c \rho = s \rho.$$

Ersetzt man hier ρ durch die in Punkt 10. gewonnene (winkelfreie) Gleichung, so erhält man die **Flächenformel von Heron**

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Außerdem ergibt sich unmittelbar aus **Bild 2.41** mithilfe trigonometrischer Umformungen

$$A = 2r^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Inkreisradius

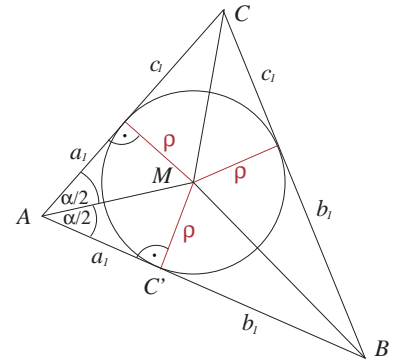


Bild 2.42 Inkreisradius

Flächeninhalt



Heron von Alexandria (Mechanicus)

(etwa zwischen 200 v. Chr. und 300 n. Chr.) antiker Mathematiker und Ingenieur

Ausführungen zu mathematischen, optischen und mechanischen Themen, u. a. Flächenformel von Heron, Heron-Verfahren zum Berechnen der Quadratwurzel

hier: Flächenformel von Heron

2.3 Anwendungen an Beispielen

2.3.1 Polynome bei der Balkenbiegung

Polynome spielen im Bauingenieurwesen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von Schnittkräften und Verformungen in der Balkenstatik. Ein an der Stelle $x = 0$ eingespannter Balken konstanter Biegesteifigkeit

Ausgangssituation

EI mit freiem Ende (Kragarm) der Länge l wird mit der Elementlast q belastet. Ist die Funktion q ein Polynom (z. B. konstante Streckenlast $q(x) = q$ oder lineare Streckenlast $q(x) = ax + b$), so ergeben sich die Schnittkraft- und Verformungsverläufe ebenfalls als Polynome.

Ergebnis

Bei konstanter Streckenlast $q(x) = q_0$ (siehe **Bild 2.43**) sind die Funktionsgleichungen für die Durchbiegung w , das Biegemoment M und die Querkraft V

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{24} q_0 x^4 - \frac{1}{6} q_0 l x^3 + \frac{1}{4} q_0 l^2 x^2 \right), \\M(x) &= -\frac{1}{2} q_0 x^2 + q_0 l x - \frac{1}{2} q_0 l^2, \\V(x) &= -q_0 x + q_0 l.\end{aligned}$$

Bei linearer Streckenlast $q(x) = ax + b$ (siehe **Bild 2.47**) sind die Funktionsgleichungen für die Durchbiegung w , das Biegemoment M und die Querkraft V

$$\begin{aligned}w(x) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{a}{120} x^5 + \frac{b}{24} x^4 - \frac{al + 2b}{12} l x^3 + \frac{2al + 3b}{12} l^2 x^2 \right), \\M(x) &= -\frac{a}{6} x^3 - \frac{b}{2} x^2 + \frac{al + 2b}{2} l x - \frac{2al + 3b}{6} l^2 \\V(x) &= -\frac{a}{2} x^2 - bx + \frac{al + 2b}{2} l.\end{aligned}$$

Die Funktionen M und V haben jeweils Nullstellen für $x = l$, d. h. am freien Ende des Kragarms ist sowohl das Biegemoment als auch die Querkraft gleich Null. Die Funktionen V sind monoton fallend (siehe **Bild 2.46, 2.50**), die Funktionen M monoton steigend (siehe **Bild 2.45, 2.49**). Die maximalen Beträge der Biegemomente bzw. Querkräfte werden daher an der Einspannstelle erreicht. Die Funktionen w haben eine doppelte Nullstelle für $x = 0$, d. h. die Verschiebung an der Einspannstelle ist gleich Null. Sie sind monoton steigend (siehe **Bild 2.44, 2.48**), die maximale Durchbiegung ist daher am freien Ende des Kragarms erreicht.

Die Ermittlung dieser Funktionen erfolgt z. B. durch das Lösen entsprechender Differenzialgleichungen (siehe z. B. [9], [18]).

2.3.2 Darlehen und Zinsen

Ausgangssituation

Eine Anwendung von Potenz- und Logarithmusfunktion ergibt sich bei der Zinseszinsrechnung. Nimmt ein Bauherr bei der Bank ein Darlehen S_0 mit einem jährlichen Zinssatz i auf, so wird oft vereinbart, dass die jährlich aufzubringende Leistung des Schuldners (Annuität) A konstant ist. Von Interesse ist dabei die Restschuld am Ende jedes Jahres sowie die Anzahl n der Jahre bis zur vollständigen Tilgung des Darlehens S_0 in Abhängigkeit von der jährlichen Annuität A oder umgekehrt.

Lösungsweg

Die Restschuld S_k nach k Jahren berechnet sich aus der Restschuld S_{k-1} des Vorjahres durch Addition der zu erbringenden Zinsen auf S_{k-1}

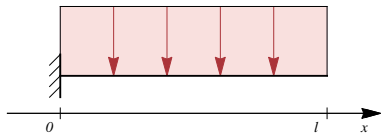


Bild 2.43 Kragarm mit Streckenlast $q(x) = q_0$
 $q_0 = 1, EI = 1, l = 10$

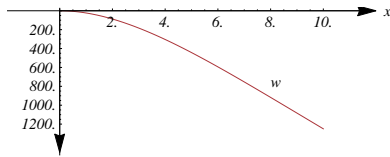


Bild 2.44 Biegelinie w

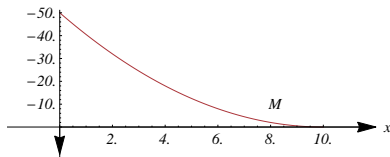


Bild 2.45 Biegemomentenlinie M

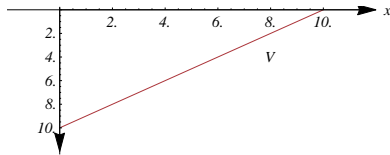


Bild 2.46 Querkraftlinie V

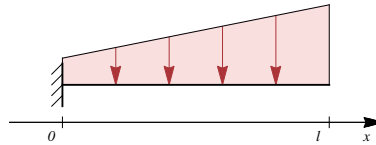


Bild 2.47 Kragarm mit Streckenlast $q(x) = ax + b$
 $a = 0.2, b = 1, l = 10$

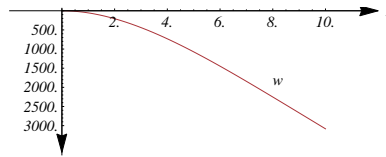


Bild 2.48 Biegelinie w

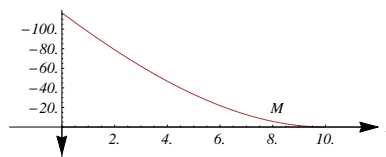


Bild 2.49 Biegemomentenlinie M

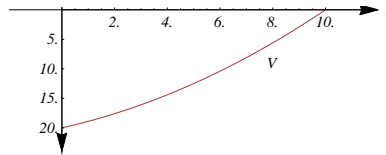


Bild 2.50 Querkraftlinie V

und Subtraktion der geleisteten Zahlung A :

$$S_k = S_{k-1} + iS_{k-1} - A = S_{k-1}(1+i) - A, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Man erhält daraus durch sukzessives Einsetzen

$$S_1 = S_0(1+i) - A,$$

$$S_2 = S_1(1+i) - A = S_0(1+i)^2 - A(1+i) - A,$$

$$S_3 = S_2(1+i) - A = S_0(1+i)^3 - A(1+i)^2 - A(1+i) - A, \dots,$$

$$S_n = S_{n-1}(1+i) - A = S_0(1+i)^n - A((1+i)^{n-1} + \dots + (1+i) + 1)$$

und nach Vereinfachen der Summe auf der rechten Seite der letzten Gleichung (siehe **Beispiel 2.34**) für die Restschuld S_n nach n Jahren

$$S_n = S_0(1+i)^n - A \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} = \left(S_0 - \frac{A}{i} \right) (1+i)^n + \frac{A}{i}. \quad (2.12)$$

Ergebnis Restschuld

Damit sich die Restschuld von Jahr zu Jahr tatsächlich verringert, ist die Bedingung

$$A > S_0 i$$

zu erfüllen (die Klammer auf der rechten Seite von (2.12) wird dann negativ).

Möchte man wissen, nach wie viel Jahren das Darlehen getilgt ist, so ist die Restschuld $S_n = 0$, und aus (2.12) ergibt sich nach Umstellen

$$(1+i)^n = \frac{A}{A - iS_0}$$

bzw. nach *Logarithmieren* dieser Gleichung (siehe **Abschnitt 2.2.9**)

Ergebnis Tilgungszeitraum

$$n = \frac{1}{\ln(1+i)} \ln \frac{A}{A - iS_0}. \quad (2.13)$$

Beträgt das Darlehen des Bauherrn $S_0 = 100\,000 \text{ €}$, der jährliche Zinssatz $i = 8\%$ und die vereinbarte Annuität $A = 10\,000 \text{ €}$, so ergibt sich mit Gleichung (2.13) ein Tilgungszeitraum von $n = 20.912$ Jahren.

Soll andererseits berechnet werden, wie hoch die Annuität sein muss, damit das Darlehen nach n Jahren getilgt ist, so ist Gleichung (2.12) nach A umzustellen. Es ergibt sich zw. nach *Logarithmieren* dieser Gleichung (siehe **Abschnitt 2.2.9**)

Ergebnis Annuität

$$A = S_0 i \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}. \quad (2.14)$$

Im obigen Zahlenbeispiel erhält man als Annuität bei einer 30-jährigen Tilgung mit Gleichung (2.14) $A = 8882.74 \text{ €}$. Der Bauherr bezahlt insgesamt $30A \approx 266\,482.20 \text{ €}$ für das Darlehen von $100\,000 \text{ €}$!

Wenn der Bauherr das Darlehen S_0 bei dem jährlichen Zinssatz i in kürzeren Zeitabständen zurückzahlen will, so beträgt der Zinssatz pro Zeitabschnitt bei einer Unterteilung des Jahres in m gleiche Zeitabschnitte i/m . Durch analoge Überlegungen wie bei der Herleitung von Gleichung (2.12) ergibt sich jetzt

Ergebnis Restschuld bei unterjährigen Rückzahlungen

$$S_n = \left(S_0 - \frac{A}{i} \right) \left(1 + \frac{i}{m} \right)^{mn} + \frac{A}{i}.$$

Zahlt er das Darlehen im obigen Zahlenbeispiel mit einer jährlichen Annuität von $A = 10\,000 \text{ €}$ monatlich zurück ($m = 12$), so verkürzt sich der Zeitraum auf $n = 20.184$ Jahre.

Wird ein Tilgungszeitraum von $n = 30$ Jahren wieder bei monatlicher

Zahlung zugrunde gelegt, so beträgt die jährliche Annuität jetzt nur $A = 8805.17 \text{ €}$. Damit würde der Bauherr insgesamt $264\,155.24 \text{ €}$ zurückzahlen müssen, immerhin 2326.98 € weniger als bei jährlicher Zahlung der Annuität.

2.3.3 Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden

Trigonometrische Berechnungen finden z. B. in Aufgaben des Vermessungswesens Anwendung, wenn es um die Bestimmung unzugänglicher Entfernungen geht.

Beim so genannten Vorwärtseinschneiden werden zur Bestimmung der Länge der unzugänglichen Strecke $a = \overline{PQ}$ die Peilwinkel α und β bzw. γ und δ zu den Punkten P und Q sowie die Länge der Standstrecke $\overline{AB} = c$ gemessen (siehe **Bild 2.51**).

Aus dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ABP$ erhält man mit den Bezeichnungen aus **Bild 2.51** und $\varepsilon = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABP$)

$$\frac{\sin \varepsilon}{c} = \frac{\sin \gamma}{b}, \quad \text{d. h.} \quad b = c \frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon}.$$

Aus dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ABQ$ erhält man mit den Bezeichnungen aus **Bild 2.51** und $\sigma = \pi - (\beta + \gamma + \delta)$ (Innenwinkelsumme im Dreieck $\triangle ABQ$)

$$\frac{\sin \sigma}{c} = \frac{\sin (\gamma + \delta)}{e}, \quad \text{d. h.} \quad e = c \frac{\sin (\gamma + \delta)}{\sin \sigma}.$$

Im Dreieck $\triangle APQ$ sind jetzt die Seiten b und e berechnet und der von ihnen eingeschlossene Innenwinkel α gegeben. Mit dem Kosinussatz erhält man die gesuchte Entfernung als

$$a = \sqrt{b^2 + e^2 - 2be \cos \alpha}.$$

Beim so genannten Rückwärtseinschneiden ist die Lage dreier Standorte A , B und C bestimmt durch die Messung der Standstrecken $\overline{AC} = a$, $\overline{CB} = b$ und den Winkel γ zwischen ihnen (siehe **Bild 2.52**). Außerdem wurden die Peilwinkel α und β im Punkt P gemessen. Bestimmt werden sollen die unzugänglichen Entfernungen x , y , z der Standorte A , B und C zum Punkt P .

Mit den Innenwinkeln φ und ψ (siehe **Bild 2.52**) erhält man wegen der Innenwinkelsumme 2π im Viereck $ACBP$ zunächst

$$\varphi + \psi = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \tau, \quad \text{d. h.} \quad \psi = \tau - \varphi$$

mit bekanntem Hilfsinkel τ . Aus dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ACP$ und im Dreieck $\triangle CBP$ folgt

Vorwärtseinschneiden Ausgangssituation

Lösungsweg

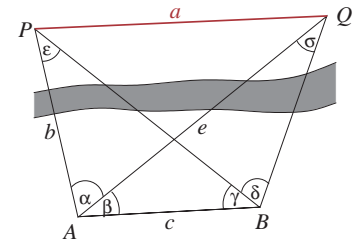


Bild 2.51 Vorwärtseinschneiden

Ergebnis

Rückwärtseinschneiden Ausgangssituation

Lösungsweg

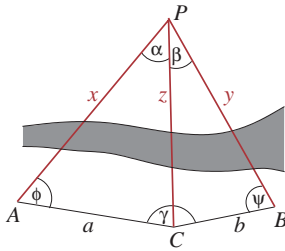


Bild 2.52 Rückwärtseinschneiden

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \varphi}{z} \quad \text{und} \quad \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \psi}{z}.$$

Wird aus diesen Gleichungen z eliminiert und danach $\psi = \tau - \varphi$, so folgt eine Gleichung zur Ermittlung des Winkels φ :

$$\frac{\sin(\tau - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}.$$

Mit dem Additionstheorem für $\sin(\tau - \varphi)$ ergibt sich daraus

$$\frac{\sin \tau \cos \varphi - \cos \tau \sin \varphi}{\sin \varphi} = \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha}$$

und nach Umstellen nach $\cot \varphi$

$$\text{Ergebnis} \quad \cot \varphi = \frac{1}{\sin \tau} \left(\cos \tau + \frac{a \sin \beta}{b \sin \alpha} \right),$$

woraus der Winkel φ unmittelbar bestimmt wird. Danach ergeben sich jeweils mit dem Sinussatz im Dreieck $\triangle ACP$ und im Dreieck $\triangle CBP$ die gesuchten Längen

$$x = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha}, \quad y = \frac{b \sin(\beta + \psi)}{\sin \beta}, \quad z = \frac{a \sin \varphi}{\sin \alpha}.$$

2.3.4 Polygonzugberechnung

Ausgangssituation

Bei der Festlegung der Verläufe von Straßen, Wegen, Begrenzungen oder Wasserläufen kommen Polygonzüge zum Einsatz, die deren Geometrie näherungsweise beschreiben. Dabei entsteht die Aufgabe, die Koordinaten der Punkte P_i eines Polygonzuges $P_0 P_1 \dots P_i \dots P_n$ aus den gemessenen Entfernungen $s_i = \overline{P_{i-1} P_i}$ benachbarter Polygonpunkte, $i = 1, \dots, n$, und Winkeln β_i zwischen den benachbarten Polygonseiten $\overline{P_{i-2} P_{i-1}}$ und $\overline{P_{i-1} P_i}$, $i = 2, \dots, n-1$, sowie dem Winkel β_1 , den die erste Polygonseite $\overline{P_0 P_1}$ mit der Richtung der positiven x -Achse einschließt, und den Koordinaten des Anfangspunktes $P_0(x_0, y_0)$ zu bestimmen.

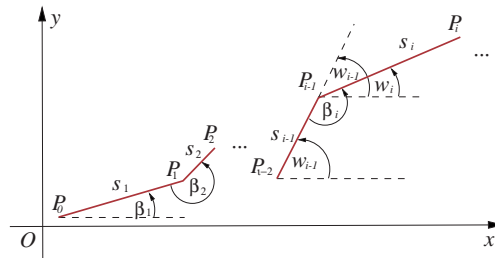


Bild 2.53 Polygonzug

Zunächst soll folgende Hilfsaufgabe gelöst werden: Gegeben ist der Abstand s eines Punktes $P(x_p, y_p)$ vom Koordinatenursprung O sowie der Winkel w , den die x -Achse mit dem Strahl \overrightarrow{OP} bildet (siehe **Bild 2.54**). Gesucht sind seine Koordinaten x_p, y_p . Mit den trigonometrischen Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck (siehe **Abschnitt 2.2.10**) ist

$$x_p = s \cos w \quad \text{und} \quad y_p = s \sin w. \quad (2.15)$$

Sind jetzt die Koordinaten eines Punktes $Q(x_q, y_q)$, der Abstand s des Punktes $P(x_p, y_p)$ vom Punkt Q und der Winkel w , den die x -Achse mit dem Strahl \overrightarrow{QP} bildet, bekannt, so ermittelt man im Hilfskoordinatensystem (Q, x', y') mit dem Ursprung im Punkt Q , der x' -Achse parallel zur x -Achse und der y' -Achse parallel zur y -Achse (siehe **Bild 2.55**) die Koordinaten des Punktes $P(x'_p, y'_p)$ wie in (2.15) und findet danach im Koordinatensystem (O, x, y)

$$\begin{aligned} x_p &= x_q + x'_p = x_q + s \cos w, \\ y_p &= y_q + y'_p = y_q + s \sin w. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Um in der ursprünglich gestellten Aufgabe die Koordinaten des Punktes $P_i(x_i, y_i)$ mithilfe derjenigen des vorhergehenden Punktes $P_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ und des Abstandes s_i zu ermitteln, wird noch der Winkel w_i benötigt, den die x -Achse mit dem Strahl $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ bildet. Er berechnet sich mithilfe des vorherigen Winkels w_{i-1} und des gegebenen β_i wie folgt:

$$w_1 = \beta_1, \quad w_i = w_{i-1} - \pi + \beta_i, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

Wendet man (2.16) an, wobei P_{i-1} dem Punkt Q , P_i dem Punkt P , s_i der Entfernung s und w_i dem Winkel w entspricht, so ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + s_i \cos w_i, \\ y_i &= y_{i-1} + s_i \sin w_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Lösungsweg

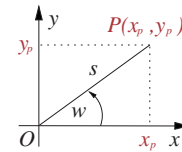


Bild 2.54 Koordinaten eines Punktes P

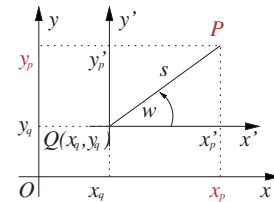


Bild 2.55 Verschobenes Koordinatensystem

Ergebnis