

David Hilbert



Stephan Cohn-Vossen



# Anschauliche Geometrie

Zweite Auflage

 Springer

# Anschauliche Geometrie

David Hilbert · Stephan Cohn-Vossen

# Anschauliche Geometrie

Appendix  
von P. Alexandroff  
Geleitwort  
von Marcel Berger

Zweite Auflage

 Springer

David Hilbert (1862–1943)  
Georg-August Universität Göttingen  
Mathematisches Institut  
Göttingen  
Deutschland

Stephan Cohn-Vossen (1902–1936)  
Russische Akademie der Wissenschaften  
Moskau  
Russland

*Die erste Auflage erschien 1932 unter gleichnamigem Titel in der Reihe Grundlehren  
der mathematischen Wissenschaften, Bd. 37*

*Die Fotovorlage für die Abbildung auf der Einbandvorderseite wurde für D. Hilbert  
dem Band C. Reid: Hilbert - Courant, Springer-Verlag, 1986, entnommen;  
die Abbildung für S. Cohn-Vossen stellte das mathematische Forschungsinstitut  
Oberwolfach zur Verfügung*

ISBN 978-3-540-59069-9 (Hardcover)      e-ISBN 978-3-642-19948-6  
ISBN 978-3-642-19947-9 (Softcover)  
DOI 10.1007/978-3-642-19948-6  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (1991): 33-01,35-01,49-01,70-01

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1932, 1996 (Hardcover), 2011 (Softcover)

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

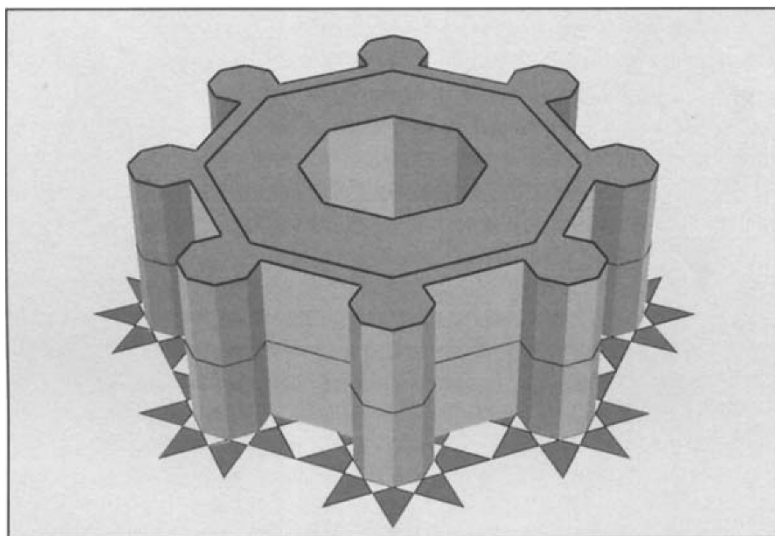
Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

La présente réédition du livre de Hilbert et Cohn-Vossen me semble l'illustration parfaite de la très grande contribution que le docteur Heinz Götze a apporté au monde mathématique en mettant ses remarquables talents aux multiples facettes au service de la maison Springer.

Ich möchte dieses Buch Dr. Heinz Götze widmen, weil es mir eine perfekte Illustration von Heinz Götzes verlegerischen Leistungen zu sein scheint. Durch seine vielfältigen Gaben, die er im Dienst des Hauses Springer einsetzte, hat er einen außerordentlichen Beitrag zur Bereicherung der mathematischen Welt geleistet.

*Marcel Berger*



Computerdarstellung (Susanne Krömker, Heidelberg) und Aufnahme (Heinz Götze, Heidelberg) des Castel del Monte. Siehe auch Heinz Götze: Castel del Monte – Gestalt und Symbol der Architektur Friedrichs II. Prestel-Verlag, München 1984, 1986, 1991 (1.–3. Auflage)

## Préface

Le livre qui suit est tout à fait extraordinaire. Il est issu d'un cours qu'Hilbert donna pour la première fois à Göttingen l'année universitaire 1920–21. Sa motivation première semble avoir été de faire revivre l'esprit de géométrie dans la Faculté. La désaffection pour la géométrie, au profit de la seule habileté dans l'algèbre, le calcul différentiel et intégral, a toujours provoqué une réaction inquiète chez les grands mathématiciens. Voici, entre autres, ce qu'ont dit Gauss, Klein puis André Weil. Dans une analyse de la Géométrie descriptive de Monge qui venait de paraître, Gauss écrivait en 1813 :

*„Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde ... Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit, ... beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“*

Puis en 1850 dans une lettre à Schumacher :

*„Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden.*

*An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, ... Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben ...“*

Dans une conférence donnée, dans une série de douze, aux USA en 1893, sur l'intuition de l'espace, Felix Klein disait :

*“It is my opinion that in teaching it is not only admissible, but absolutely necessary, to be less abstract at the start, to have constant regard to the applications, and to refer to the refinements only gradually as the student becomes able to understand*

them.” . . . “I am led to these remarks by the consciousness of a growing danger in the higher educational system in Germany, — the danger of a separation between abstract mathematical science and its scientific and technical applications. Such separation could only be deplored; for it would necessarily be followed by shallowness on the side of the applied sciences, and by isolation on the part of pure mathematics.”

Enfin André Weil, dans «S.S. Chern as Geometer and Friend», écrivit en 1978 :

*“Obviously everything in differential geometry can be translated into the language of analysis, just as every thing in algebraic geometry can be expressed in the language of algebra. Sometimes mathematicians, following their personal inclination or perhaps misled by a false sense of rigor, have turned their mind wholly to the translation and lost sight of the original text. It cannot be denied that this has led occasionally to work of great value; nevertheless further progress has invariably involved going back to geometric concepts. The same has happened in our times with topology. Whether one considers analytic geometry at the hands of Lagrange, tensor calculus at those of Ricci, or more modern examples, it is always clear that a purely formal treatment of geometric topics would invariably have killed the subject if it had not been rescued by true geometers, Monge in one instance, Levi-Civita and above all Elie Cartan in another.”*

Dans ces textes, il ne s’agit pas de stigmatiser l’abstraction ni l’habileté dans les calculs, mais leur usage à l’état brut sans l’existence, en profondeur, d’une intuition, d’une pensée, d’une ligne directrice, d’une vision. Le calcul électronique présente un danger analogue sinon identique. Car on peut craindre que le mathématicien, qui utilise ces puissants moyens, ne se fie en dernier ressort qu’au seul résultat fourni par l’ordinateur sans que son intuition ne le lui confirme.

Ce cours de géométrie «pictoriale», «figurative», «illustrative», Hilbert le donna encore deux fois dans la suite, alors cependant que la diversité de ses enseignements est restée légendaire. Outre la motivation mentionnée précédemment, essentiellement tournée vers les étudiants, Hilbert désirait atteindre un public beaucoup plus large : il le dit dans sa préface, qu’il faut absolument lire : elle n’a pas encore pris une seule ride. Ajoutons qu’il admirait l’habileté des scientifiques des autres disciplines à présenter aux non-experts leur propre discipline et ses succès. Un très bref extrait de cette préface :

*„ ... zu einer gerechteren Würdigung der Mathematik in weiteren Kreisen des Publikums beizutragen. Denn im allgemeinen erfreut sich die Mathematik, wenn auch ihre Bedeutung anerkannt wird, keiner Beliebtheit. Das liegt an der verbreiteten Vorstellung, als sei die Mathematik eine Fortsetzung oder Steigerung der Rechenkunst. Dieser Vorstellung soll unser Buch entgegenwirken, ... “*

Le présent livre est dû à la plume du grand géomètre, décédé prématurément, que fut Stephan Cohn-Vossen. Le résultat est, répétons-le, est extraordinaire. Non seulement, à son époque, Hilbert a réussi à atteindre les futurs mathématiciens ainsi qu’une audience beaucoup plus large, mais ce livre continue aujourd’hui une

carrière unique et permanente. Tous les collègues que j'ai interrogés aiment, admirent ce livre. Ils ne manquent guère une occasion d'en recommander la lecture à leurs étudiants. Ceci pour les gens du sérail. Mais il continue à atteindre un large public : à l'Université de Pennsylvanie, par exemple, il figure au catalogue de cinq bibliothèques en charge de disciplines différentes, et mieux, il a disparu dans quatre d'entre elles!

Comment expliquer ce succès, cette longévité ? Voici un premier ensemble de raisons, dont le lecteur aura la joie de vérifier le bien-fondé quand il en se plongeant dans l'ouvrage. En 1920 la géométrie était déjà un corpus de connaissances très large. Pour choisir le matériel à présenter, Hilbert a donc du faire un choix draconien. «Enseigner, c'est choisir» a-t-on dit. Ce à quoi Voltaire ajoutait d'ailleurs: «L'art d'ennuyer, c'est celui de vouloir tout dire». Mais de là à pouvoir, à savoir faire le choix, quelle courage, quelle lucidité!

Hilbert a beau dire dans sa préface qu'il propose une promenade et non une marche avec un but, le livre est très fortement structuré : sous des apparences désinvolte il y court des leitmotifs sous-jacents. Et c'est un des plus grands plaisirs que donne sa lecture que de retrouver un même objet, un même concept, dans des contextes apparemment étrangers les uns aux autres. Pour ne donner qu'un exemple, le cas des quadriques homofocales est particulièrement saisissant.

Il y a aussi dans cet ouvrage un mélange très équilibré de propriétés seulement énoncées sans la moindre allusion à une démonstration et d'endroits où plus d'une page est consacrée à expliquer l'essence de la démonstration. C'est peut-être finalement ce remarquable mélange qui explique le succès de l'ouvrage auprès de lecteurs aussi variés.

Ceci n'explique qu'en partie sa longévité. Le lecteur pourrait en effet penser que la géométrie a beaucoup évolué depuis soixante ans, et ce qui en constituait tant le corps que l'essence en 1920 a, en un certain sens, complètement disparu. De plus les mathématiques ont incroyablement progressé en abstraction, dans leur maîtrise de structures très générales et toutes essentielles. Dans cette nouvelle donne, la géométrie est-elle devenue inutile ou à tout le moins un peu fanée?

Ce quoi croyant, cher lecteur, ne tombez-vous pas encore une fois dans le piège récurrent deux fois cité plus haut ? Laissez-moi argumenter quelque peu, pour éventuellement vous contredire. Je signale en premier lieu que le titre „Anschauliche Geometrie“ a été traduit en anglais par “Geometry and the Imagination”. Hilbert ne pouvait récuser un tel titre; c'est lui le héros de l'anecdote suivante :

*It seems that there was a mathematician at Göttingen who became a novelist. “Why did he do that?” people at Göttingen marvelled. “How can a man who was a mathematician write novels?” “But that is completely simple,” Hilbert said. “He did not have enough imagination for mathematics, but he had enough for novels.”*

Le lecteur attend probablement de nous maintenant que nous tentions de définir ce qu'est la géométrie aujourd'hui. Pour ce faire nous avons consulté, et ce depuis quelque temps déjà, de nombreux géomètres de grand talent. Il nous semble que les trois meilleures réponses que nous puissions offrir sont les suivantes. Nous les présentons par ordre de précision. Dieudonné écrivit en 1981 :



*«En conclusion, peut-on dire que la Géométrie a perdu son identité? Au contraire, je pense qu'en éclatant au-delà de ses frontières traditionnelles, elle a révélé ses pouvoirs cachés, sa souplesse et sa faculté d'adaptation extraordinaire, devenant ainsi l'un des outils les plus universels et les plus utiles dans tous les secteurs des mathématiques.»*

André Weil continuait ainsi le texte cité plus haut :

*“The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved. Whatever the truth of the matter, mathematics in our century would not have made such impressive progress without the geometric sense of Elie Cartan, Heinz Hopf, Chern, and a very few more. It seems safe to predict that such men will always be needed if mathematics is to go on as before.”*

Enfin il nous semble que la communication orale d'Eugenio Calabi qui suit est un parfait point d'orgue :

*“Geometry is any branch of mathematics in which you can trace your primary source of information or intuition back to a sensorial experience.”*

Nous voudrions terminer enfin en donnant la parole ou presque, par la plume interposée d'Otto Blumenthal, à Hilbert lui-même. On trouve en effet dans le centre du livre, une section captivante, naïvement intitulée, comme pour donner le change : «onze propriétés de la sphère». Ici Hilbert a résumé, au lieu de disperser comme pour le cas les quadriques homofocales. Et voici ce que dit Blumenthal dans son *Lebensgeschichte* de Hilbert, et qui nous semble la meilleure conclusion possible à notre texte :

*„Hier werden fast ohne Beweise, vielfach durch Demonstration am Modell, in reicher Fülle solche geometrischen Tatsachen aufgezeigt, die in tiefere Zusammenhänge einleiten können. Man nehme etwa als besonders bezeichnend den §32, Elf Eigenschaften der Kugel. Man verfolgt geradezu mit Spannung, welche Eigenschaften man da kennenlernen wird und zu welchen allgemeinen Fragenstellungen sie Anlaß geben. Wir Hilbertschüler aber sehen das freundliche, etwas schelmische Lächeln und hören die liebevolle Modulation der Stimme, mit der Hilbert an der Tafel gesagt hat: ‚Elf Eigenschaften der Kugel ... also elf Eigenschaften der Kugel.‘“*

## Vorwort

Das folgende Buch ist ein ganz außergewöhnliches. Es ging aus einer Vorlesung hervor, die Hilbert erstmals in Göttingen im akademischen Jahr 1920/21 hielt. Sein erstes Anliegen scheint es gewesen zu sein, den Geist der Geometrie in der Fakultät wiederzubeleben. Auf die Lieblosigkeit gegenüber der Geometrie, zugunsten bloßer Fertigkeiten in der Algebra, der Differential- und Integralrechnung, haben die großen Mathematiker immer beunruhigt reagiert. Lesen wir unter anderem, was Gauß, Klein und später André Weil gesagt haben. In einer Rezension der gerade erschienenen „Géométrie descriptive“ von Monge schrieb Gauß 1813:

*„Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde ... Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit, ... beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann.“*

Dann 1850 in einem Brief an Schumacher:

*„Es ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir einen Hebel besitzen, wodurch die verwickeltesten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden.*

*An Reichtum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mechanisch angewandt, ... Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben ...“*

In einem von einer Reihe von zwölf Vorträgen über räumliche Intuition, die Felix Klein 1893 in den USA hielt, sagte er:

*“It is my opinion that in teaching it is not only admissible, but absolutely necessary, to be less abstract at the start, to have constant regard to the applications, and to refer to the refinements only gradually as the student becomes able to understand them.” . . . “I am led to these remarks by the consciousness of a growing danger in the higher educational system in Germany, – the danger of a separation between abstract mathematical science and its scientific and technical applications. Such separation could only be deplored; for it would necessarily be followed by shallowness on the side of the applied sciences, and by isolation on the part of pure mathematics.”*

Schließlich schrieb André Weil 1978 in „S.S. Chern as Geometer and Friend“:

*“Obviously everything in differential geometry can be translated into the language of analysis, just as every thing in algebraic geometry can be expressed in the language of algebra. Sometimes mathematicians, following their personal inclination or perhaps misled by a false sense of rigor, have turned their mind wholly to the translation and lost sight of the original text. It cannot be denied that this has led occasionally to work of great value; nevertheless further progress has invariably involved going back to geometric concepts. The same has happened in our times with topology. Whether one considers analytic geometry at the hands of Lagrange, tensor calculus at those of Ricci, or more modern examples, it is always clear that a purely formal treatment of geometric topics would invariably have killed the subject if it had not been rescued by true geometers, Monge in one instance, Levi-Civita and above all Elie Cartan in another.”*

In diesen Texten geht es nicht darum, die Abstraktion oder die Geschicklichkeit im Rechnen zu verunglimpfen, sondern deren rohen Gebrauch ohne in der Tiefe vorhandene Intuition, einen Gedanken, eine Leitlinie, eine Vision. Das elektronische Rechnen birgt eine ähnliche, wenn nicht dieselbe Gefahr; denn es steht zu befürchten, daß der Mathematiker, der sich dieser mächtigen Mittel bedient, sich letztlich nur auf das bloße Ergebnis des Computers verläßt, ohne daß seine Intuition es ihm bestätigt.

Diese Vorlesung über Geometrie, „bildlich“, „figürlich“, „illustrativ“, hielt Hilbert später noch zweimal, während doch die Vielseitigkeit seines Unterrichts legendär geblieben ist. Außer dem schon genannten Anliegen, das sich im wesentlichen auf die Studenten richtet, wünschte Hilbert auch eine viel größere Öffentlichkeit zu erreichen. Er sagt dies in seinem Vorwort, das man unbedingt lesen muß – es hat noch kein einziges Altersfältchen. Hinzugesagt sei, daß er die Gewandtheit von Wissenschaftlern anderer Disziplinen bewunderte, Nichtfachleuten ihr eigenes Arbeitsgebiet und seine Erfolge darzustellen. Ein ganz kurzer Auszug aus diesem Vorwort:

*„... zu einer gerechteren Würdigung der Mathematik in weiteren Kreisen des Publikums beizutragen. Denn im allgemeinen erfreut sich die Mathematik, wenn auch ihre Bedeutung anerkannt wird, keiner Beliebtheit. Das liegt an der verbreiteten Vorstellung, als sei die Mathematik eine Fortsetzung oder Steigerung der Rechenkunst. Dieser Vorstellung soll unser Buch entgegenwirken, ...“*

Das vorliegende Buch verdanken wir der Feder des allzu früh verstorbenen großen Geometers Stephan Cohn-Vossen. Das Ergebnis ist, wir sagen es nochmals, außergewöhnlich. Nicht nur gelang es Hilbert seinerzeit, die künftigen Mathematiker wie auch eine viel breitere Hörerschaft zu erreichen, sondern dieses Buch geht bis heute fortwährend seinen einzigartigen Weg. Alle Kollegen, die ich fragte, lieben und bewundern dieses Buch. Sie lassen kaum eine Gelegenheit aus, es ihren Studenten zum Lesen zu empfehlen. Soweit zu den Leuten im Serail. Aber es findet nach wie vor eine weite Öffentlichkeit: an der Universität von Pennsylvania zum Beispiel ist es im Katalog von fünf verschiedenen Fachbibliotheken aufgeführt und – besser noch – aus vieren davon verschwunden!

Wie erklärt sich dieser Erfolg, diese Langlebigkeit? Hier ist erst einmal eine Reihe von Gründen, deren Zutreffen der Leser mit Vergnügen nachprüfen können, indem er sich in das Werk vertieft. Schon 1920 war die Geometrie ein sehr weites Wissensgebiet. Um den darzubietenden Stoff auszusuchen, mußte Hilbert also eine drakonische Auswahl treffen. „Lehren ist Wählen“, hat man gesagt; dem fügte übrigens Voltaire hinzu: „Die Kunst des Langweilens ist die, alles sagen zu wollen.“ Aber von da aus, bis man die Wahl treffen kann, zu treffen weiß – welcher Mut, welche Klarheit!

Mag Hilbert auch in seinem Vorwort einen Spaziergang anbieten und nicht den Marsch auf ein Ziel, so ist doch das Buch sehr streng gegliedert: unter lässigem Anschein verbergen sich zugrundeliegende Leitmotive. Und zu den größten Freuden, die das Lesen bereitet, gehört es, ein und denselben Gegenstand, ein und denselben Begriff in Umfeldern, die scheinbar nichts miteinander zu tun haben, wiederzufinden. Um nur ein Beispiel zu nennen: der Fall der konfokalen Quadriken ist besonders verblüffend.

In diesem Werk liegt auch eine sehr ausgewogene Mischung vor von Eigenschaften, die ohne die mindeste Andeutung eines Beweises genannt werden, und von Stellen, wo mehr als eine Seite darauf verwandt wird, das Wesentliche eines Beweises zu erklären. Vielleicht erklärt letzten Endes diese bemerkenswerte Mischung den Erfolg des Buches bei so verschiedenen Lesern.

Das erklärt nur teilweise seine Langlebigkeit. Der Leser könnte in der Tat denken, die Geometrie habe sich seit sechzig Jahren viel weiterentwickelt und das, was 1920 sowohl ihren Bestand als auch ihr Wesen ausmachte, sei gewissermaßen völlig untergegangen. Darüberhinaus ist die Mathematik unglaublich fortgeschritten in Abstraktion, in der Beherrschung sehr allgemeiner und samt und sonders wesentlicher Strukturen. Ist mit diesen neu verteilten Karten die Geometrie unnötig geworden oder wenigstens ein bißchen verwelkt?

Wenn Sie das glauben, verehrter Leser, tappen Sie da nicht noch einmal in die Falle, die zweimal weiter oben genannt wurde? Lassen Sie mich ein wenig argumentieren, um Ihnen eventuell zu widersprechen. Ich weise zunächst darauf hin, daß der Titel „Anschauliche Geometrie“ ins Englische als „Geometry and the Imagination“ übersetzt wurde. Hilbert konnte solch einen Titel nicht zurückweisen; er ist der Held der folgenden Anekdote:

*“It seems that there was a mathematician at Göttingen who became a novelist. “Why did he do that?” people at Göttingen marvelled. “How can a man who was a*

*mathematician write novels?” “But that is completely simple,” Hilbert said. “He did not have enough imagination for mathematics, but he had enough for novels.”*

Der Leser erwartet jetzt wahrscheinlich von uns, daß wir zu definieren versuchen, was Geometrie heute ist. Zu diesem Zweck haben wir schon seit einiger Zeit viele Geometer großen Talents befragt. Die drei besten Antworten, die wir bieten können, scheinen uns folgende zu sein; wir zitieren in der Reihenfolge der Genauigkeit. Dieudonné schrieb 1981:

*«En conclusion, peut-on dire que la Géométrie a perdu son identité? Au contraire, je pense qu'en éclatant au-delà de ses frontières traditionnelles, elle a révélé ses pouvoirs cachés, sa souplesse et sa faculté d'adaptation extraordinaire, devenant ainsi l'un des outils les plus universels et les plus utiles dans tous les secteurs des mathématiques.»*

André Weil fuhr in dem oben zitierten Text so fort:

*“The psychological aspects of true geometric intuition will perhaps never be cleared up. At one time it implied primarily the power of visualization in three-dimensional space. Now that higher-dimensional spaces have mostly driven out the more elementary problems, visualization can at best be partial or symbolic. Some degree of tactile imagination seems also to be involved. Whatever the truth of the matter, mathematics in our century would not have made such impressive progress without the geometric sense of Elie Cartan, Heinz Hopf, Chern, and a very few more. It seems safe to predict that such men will always be needed if mathematics is to go on as before.”*

Schließlich erscheint uns der folgende Ausspruch von Eugenio Calabi als ein vollkommener Schlußakkord:

*“Geometry is any branch of mathematics in which you can trace your primary source of information or intuition back to a sensorial experience.”*

Abschließend möchten wir, jedenfalls vermittelt der Feder von Otto Blumenthal, zuletzt Hilbert selbst das Wort überlassen. In der Tat findet sich in der Mitte des Buches ein fesselnder Abschnitt, der wie zum Trug den naiven Titel trägt: „Elf Eigenschaften der Kugel“. Hier hat Hilbert zusammengefaßt, statt wie im Falle der konfokalen Quadriken weit zu streuen. Und dies sagt Blumenthal in seiner Lebensgeschichte von Hilbert, und es erscheint uns als bestmöglicher Abschluß unseres Textes:

*„Hier werden fast ohne Beweise, vielfach durch Demonstration am Modell, in reicher Fülle solche geometrischen Tatsachen aufgezeigt, die in tiefere Zusammenhänge einleiten können. Man nehme etwa als besonders bezeichnend den §32, Elf Eigenschaften der Kugel. Man verfolgt geradezu mit Spannung, welche Eigenschaf-*

*ten man da kennenlernen wird und zu welchen allgemeinen Fragenstellungen sie Anlaß geben. Wir Hilbertschüler aber sehen das freundliche, etwas schelmische Lächeln und hören die liebevolle Modulation der Stimme, mit der Hilbert an der Tafel gesagt hat: ‚Elf Eigenschaften der Kugel ... also elf Eigenschaften der Kugel.‘“*

Bures-sur-Yvette, im Januar 1996

*Marcel Berger*

## Vorwort.

In der Mathematik wie in aller wissenschaftlichen Forschung treffen wir zweierlei Tendenzen an: die Tendenz zur Abstraktion — sie sucht die *logischen* Gesichtspunkte aus dem vielfältigen Material herauszuarbeiten und dieses in systematischen Zusammenhang zu bringen — und die andere Tendenz, die der Anschaulichkeit, die vielmehr auf ein lebendiges Erfassen der Gegenstände und ihre *inhaltlichen* Beziehungen ausgeht.

Was insbesondere die Geometrie betrifft, so hat bei ihr die abstrakte Tendenz zu den großartigen systematischen Lehrgebäuden der algebraischen Geometrie, der RIEMANNSchen Geometrie und der Topologie geführt, in denen die Methoden der begrifflichen Überlegung, der Symbolik und des Kalküls in ausgiebigem Maße zur Verwendung gelangen. Dennoch kommt auch heute dem *anschaulichen* Erfassen in der Geometrie eine hervorragende Rolle zu, und zwar nicht nur als einer überlegenen Kraft des Forschens, sondern auch für die Auffassung und Würdigung der Forschungsergebnisse.

Wir wollen hier die Geometrie in ihrem gegenwärtigen Zustand von der Seite des Anschaulichen aus betrachten. An Hand der Anschauung können wir uns die mannigfachen geometrischen Tatsachen und Fragestellungen nahebringen, und darüber hinaus lassen sich in vielen Fällen auch die Untersuchungs- und Beweismethoden, die zur Erkenntnis der Tatsachen führen, in anschaulicher Form andeuten, ohne daß wir auf die Einzelheiten der begrifflichen Theorien und der Rechnung einzugehen brauchen. Z. B. läßt sich der Beweis dafür, daß eine Kugel mit noch so kleinem Loch stets verbogen werden kann, oder daß zwei verschiedene Ringflächen im allgemeinen nicht konform aufeinander abgebildet werden können, in einer solchen Form behandeln, daß auch derjenige einen Einblick in die Durchführbarkeit des Beweises erhält, der die Einzelheiten der analytischen Entwicklung nicht selbst verfolgen will.

Wegen der Vielseitigkeit der Geometrie und ihrer Beziehungen zu den verschiedensten Zweigen der Mathematik gewinnen wir auf diesem Wege auch einen Überblick über die Mathematik überhaupt und einen Eindruck von der Fülle ihrer Probleme und dem in ihr enthaltenen Reichtum an Gedanken. So erweist sich eine Vorführung der Geometrie in großen Zügen, an Hand der anschaulichen Betrachtungsweise, auch als geeignet, zu einer gerechteren Würdigung der Mathematik in weiteren Kreisen des Publikums beizutragen. Denn im allgemeinen erfreut sich die Mathematik, wenn auch ihre Bedeutung anerkannt wird, keiner Beliebtheit. Das liegt an der verbreiteten Vorstellung, als sei die Mathematik eine Fortsetzung oder Steigerung der Rechenkunst. Dieser Vorstellung soll unser Buch entgegenwirken, indem es an Stelle der Formeln vielmehr anschauliche Figuren bringt, die vom Leser leicht