

Von Benjamin Prüfer und Ruth Prüfer sind bereits folgende Titel erschienen:
Mathe für Mamas und Papas – So helfen Sie Ihrem Kind beim Lernen

Über die Autoren:

Benjamin Prüfer, geboren 1979, erinnert sich nur höchst ungern an seine eigene Mathelaufbahn. Doch kaum kam seine Tochter in die Schule, waren Einmaleins, Zahlenstrahl und Würfelnetze auf einmal wieder aktuell. Seine Mutter, *Ruth Prüfer*, Mathelehrerin in Hessen, gab ihm praktische Tipps, wie er seinem Kind bei den Hausaufgaben helfen kann. Das brachte die beiden auf die Idee zu diesem Buch.

Ruth und Benjamin Prüfer

MATHE

für Mamas und Papas



So helfen Sie Ihrem Kind
durch die Klassen 5-9

KNAUR*

Besuchen Sie uns im Internet:

www.knaur.de



Originalausgabe Januar 2018

Knaur Taschenbuch

© 2018 Knaur Verlag

Ein Imprint der Verlagsgruppe

Droemer Knaur GmbH & Co. KG, München

Alle Rechte vorbehalten. Das Werk darf – auch teilweise –
nur mit Genehmigung des Verlags wiedergegeben werden.

Redaktion: Ulrike Gallwitz

Covergestaltung: Kat Menschik

Coverabbildung: Kat Menschik

Formeln und Zeichnungen: Benjamin Prüfer

Illustrationen: Istockphoto / hugolacasse

Layout und Satz: Sandra Hacke

Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck

ISBN 978-3-426-78849-3

2 4 5 3 1

Inhalt

Warum ein Schulschwänzer noch ein Mathebuch schreibt	13
Welche Hilfe wollen Teenager?	15
Die entscheidende Frage: »Was bringt mir das?«	19
Zahlen und Maße	23
Schriftliche Rechenverfahren	25
<i>Deshalb machen Kinder beim schriftlichen Rechnen so viele Fehler</i>	25
Schriftliches Addieren – so funktioniert es	27
Schriftliches Subtrahieren	32
<i>So funktionieren Abzieh- und Ergänzungsverfahren</i>	34
<i>Das Abziehverfahren verständlich erklärt</i>	34
<i>Das Ergänzungsverfahren</i>	38
<i>Das Ergänzungsverfahren verständlich erklärt</i>	39
Das schriftliche Multiplizieren	44
<i>So geht das schriftliche Malnehmen</i>	45
<i>Mit diesem Trick vergessen Kinder die Überträge nie</i>	48
<i>So multipliziert man schriftlich mit mehrstelligen Zahlen</i>	49
Schriftliches Dividieren – braucht man das noch?	52
<i>So geht das schriftliche Dividieren</i>	53
<i>Wie man mit zweistelligem Divisor teilt</i>	58
Umrechnen von Maßeinheiten	60
<i>Flächenmaße umrechnen</i>	62
<i>Einheiten des Volumens umrechnen</i>	62
<i>Einheiten der Zeit umrechnen</i>	63
Flächeninhalt feststellen	64
<i>Es gibt kein starres Verhältnis zwischen Umfang und Flächeninhalt</i>	65
<i>Volumen berechnen</i>	66
<i>Umrechnen der Einheiten</i>	67

<i>Der Zusammenhang von Oberfläche und Volumen</i>	67
Teilbarkeit erkennen	69
<i>Die Teilbarkeitsregeln effektiv anwenden</i>	70
<i>Wie man die Regeln kombiniert</i>	71
<i>Warum es nützlich ist,</i>	
<i>die wichtigsten Primzahlen zu kennen</i>	72
<i>Primfaktorzerlegung</i>	72
<i>Wie man die gemeinsamen Teiler findet</i>	74
<i>Den größten gemeinsamen Teiler</i>	
<i>mit der Primfaktorzerlegung bestimmen</i>	74
<i>Mit diesem Trick gelingt die Suche nach dem ggT spielend</i>	75
<i>Kleinstes gemeinsames Vielfaches</i>	76
<i>So findet man das kgV mit der Primfaktorzerlegung</i>	77
<i>Wir haben das kgV – wie bringt man damit</i>	
<i>Brüche auf einen Nenner?</i>	78
Potenzen und Wurzeln	79
<i>Wozu sind Potenzen gut?</i>	79
<i>Wie man Potenzen multipliziert</i>	80
<i>... und wie man sie dividiert</i>	81
<i>Warum eine Zahl mit einer Null im Exponenten</i>	
<i>Eins entspricht</i>	81
<i>Negative Potenzen können sehr kleine Zahlen darstellen</i>	82
<i>Rechnen in der Normdarstellung</i>	83
<i>Was sind Wurzeln?</i>	85
<i>Wozu braucht man Wurzeln?</i>	86
<i>So zieht man die Wurzel – ohne Taschenrechner</i>	86
<i>Warum unter dem Wurzelzeichen kein Minus stehen darf</i>	87
Brüche, Dezimalzahlen und Prozente	89
Brüche	92
<i>Jeder Bruch ist eine Teilungsaufgabe</i>	92
<i>Papierpizzen stellen äquivalente Brüche perfekt dar</i>	94
<i>Was genau ist bei einem Bruch der Teil –</i>	
<i>und was das Ganze?</i>	95
<i>Unechte in gemischte Brüche verwandeln – und andersrum</i> ...	97

<i>Einfache Brüche mit der »Würstchen-Methode« vergleichen</i>	101
<i>Checkliste: So vergleicht man Brüche schmerzfrei</i>	102
<i>Brüche durch Erweitern vergleichen – die »Schokoladentafel-Methode«</i>	103
<i>Brüche mit gleichem Nenner addieren und subtrahieren</i>	106
<i>So addiert und subtrahiert man Brüche mit unterschiedlichem Nenner</i>	106
<i>Zwei Methoden zum Erweitern von Brüchen</i>	108
<i>Was bedeutet das Multiplizieren von Brüchen eigentlich?</i>	109
<i>Wie man gemischte Brüche malnimmt</i>	111
<i>So teilt man durch einen Bruch</i>	111
<i>Ein Missverständnis bezüglich der Bruchrechnung</i>	113
<i>Dezimalzahlen</i>	116
<i>Dezimalzahlen sind auch nur Brüche</i>	117
<i>Wenn beim Dividieren Kommazahlen entstehen</i>	118
<i>Periodische Zahlen sind die Schwachstelle der Dezimalbrüche</i>	119
<i>Wie man Dezimalzahlen malnimmt</i>	120
<i>So teilt man Kommazahlen</i>	122
<i>Brüche in Dezimalzahlen verwandeln</i>	123
<i>... und Dezimalzahlen wieder in Brüche verwandeln</i>	124
<i>Aus periodischen Dezimalzahlen Brüche machen</i>	125
<i>Gemischtperiodische Kommazahlen in Brüche verwandeln</i>	127
<i>Dreisatz</i>	128
<i>»Je mehr, desto mehr« oder »je mehr, desto weniger«?</i>	129
<i>So löst man einen Dreisatz bei proportionaler Zuordnung</i>	129
<i>Den Dreisatz bei antiproportionaler Zuordnung nutzen</i>	131
<i>Prozente</i>	134
<i>Prozente sind zum Vergleichen da</i>	135
<i>Man muss wissen, welcher Anteil von was gesucht ist</i>	135
<i>So berechnet man einen Prozentsatz mit Bruchrechnung</i>	136
<i>Wie man einen Prozentsatz durch Teilen ausrechnet</i>	137
<i>Was Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert bedeuten</i>	138

<i>Wie man Prozentrechnungs-Textaufgaben löst</i>	140
<i>Prozent-Aufgaben mit dem Dreisatz lösen</i>	141
<i>So löst man Prozent-Aufgaben</i>	
<i>mit dem Multiplikationsverfahren</i>	143
<i>Das Streifendiagramm klärt, was Grundwert, Prozentwert</i>	
<i>und Prozentsatz sind</i>	143
<i>Ein Dreieck hilft, die richtige Formel zu finden</i>	145
<i>Den Prozentwert mit dem</i>	
<i>Multiplikationsverfahren finden</i>	146
<i>Mit dem Multiplikationsverfahren den Grundwert finden</i> . . .	147
<i>Mit Prozenten ein Wachstum beschreiben</i>	150
<i>Beispiel: Wie man den Prozentwert</i>	
<i>einer Zunahme berechnet</i>	151
<i>So rechnet man den Prozentwert einer Abnahme aus</i>	154
<i>Ein anderer Lösungsweg</i>	155
<i>So dreht man einen Wachstumsfaktor um</i>	156
Übersicht: Brüche, Dezimalzahlen und	
<i>Prozente umwandeln</i>	159
<i>Prozente in Dezimalbrüche</i>	159
<i>Dezimalbrüche in Prozente</i>	159
<i>Brüche in Prozente</i>	160
<i>Prozente in Brüche</i>	160
<i>Dezimalzahlen in Brüche</i>	160
<i>Brüche in Dezimalzahlen</i>	160
Zinsrechnung	161
<i>Einfache Verzinsung</i>	161
<i>Verzinsung mit Zinseszinsen</i>	162
Algebra	165
Nutzen der Algebra	167
<i>Algebra ist verständlicher als Worte</i>	167
<i>Erster Nutzen der Algebra:</i>	
<i>Probleme durch »Finden von x« lösen</i>	168
<i>Zweiter Nutzen:</i>	
<i>Mithilfe von Funktionen Zusammenhänge verstehen</i>	171

<i>Wie man mit Variablen arbeitet</i>	175
<i>Verwirrt? Setzen Sie Zahlen ein!</i>	176
Ausdrücke vereinfachen	178
<i>Das Multiplikationssymbol verschwindet</i>	178
<i>So fasst man ähnliche Terme</i>	
<i>durch Addieren und Subtrahieren zusammen</i>	180
<i>Wie man mit Termen</i>	
<i>mit unterschiedlichen Vorzeichen umgeht</i>	184
<i>Wie man mit Klammern umgeht</i>	185
<i>Eine Klammer wegmultiplizieren</i>	185
<i>Mehrere Klammern ausmultiplizieren</i>	188
<i>Faktorisieren – wie man Terme einklammert</i>	191
<i>Äquivalente Ausdrücke sehen unterschiedlich aus,</i>	
<i>besagen aber das Gleiche</i>	195
<i>Ausdrücke mit verschachtelten (eckigen)</i>	
<i>Klammern vereinfachen</i>	197
<i>Ausdrücke durch Teilen vereinfachen</i>	198
<i>Bruchterme durch Einklammern (Faktorisieren) kürzen</i>	200
x bestimmen – wie man Aufgaben mit Algebra löst	203
<i>Was bedeutet das Gleichheitszeichen eigentlich?</i>	204
<i>Das Gleichheitszeichen ist eine Waage</i>	204
<i>So geht's: Lösen von Gleichungen</i>	
<i>(Äquivalenzumformung)</i>	206
<i>Drei Ausgänge sind möglich</i>	206
<i>Brüche aus Gleichungen beseitigen</i>	210
<i>Wie man eine Gleichung aufstellt</i>	211
<i>Diesen Fehler macht jeder – selbst Mathematiker</i>	212
Lineare Gleichungssysteme (LGS)	215
<i>Wie man LGS durch Zeichnen löst</i>	219
<i>So löst man LGS mit dem Additionsverfahren</i>	221
Was sind Funktionen?	225
<i>Funktionen stellen Zusammenhänge dar</i>	227
<i>Einer Funktion einen Namen geben</i>	228
<i>Graphen zeigen den wahren Nutzen von Funktionen</i>	229
<i>Was ist das Besondere an linearen Funktionen?</i>	231

<i>Was sind proportionale Funktionen?</i>	232
<i>Die Steigung eines Graphen mit Dreiecken ermitteln</i>	234
<i>Von der proportionalen Funktion</i>	
<i>zu allgemeinen linearen Funktionen</i>	239
<i>Alle linearen Funktionen lassen sich</i>	
<i>in die Normalform verwandeln</i>	240
<i>Wie man aus einem Graphen</i>	
<i>die Funktionsgleichung abliest</i>	242
Quadratische Ausdrücke	245
<i>Was ist das – und wozu ist es gut?</i>	245
<i>Wie Galilei die Gesetzmäßigkeiten</i>	
<i>der Schwerkraft entdeckte</i>	247
<i>Was ist eine quadratische Funktion – und was nicht?</i>	248
Was ist eine Parabel?	250
<i>Wie man Parabeln streckt, staucht und spiegelt</i>	253
<i>Verschiebung nach oben oder unten</i>	253
<i>Verschiebung nach links oder rechts</i>	254
<i>Streckung oder Stauchung</i>	255
<i>Spiegeln an der x-Achse</i>	256
<i>So liest man aus einer Gleichung den Scheitelpunkt ab</i>	258
<i>Wie man mit Gleichungen und Parabeln</i>	
<i>die Wirklichkeit nachstellen kann</i>	259
Lösen quadratischer Gleichungen	262
<i>Wozu quadratische Gleichungen lösen?</i>	262
<i>Warum macht die kleine 2 alles so viel komplizierter?</i>	264
<i>Quadratische Gleichungen durch Zeichnen lösen</i>	266
<i>Wie man quadratische Gleichungen rechnerisch löst</i>	267
<i>Satz des Vieta – die Produktform zeigt die Lösung sofort</i>	269
<i>So faktorisiert man quadratische Ausdrücke</i>	
<i>durch »gezieltes Probieren«</i>	270
<i>Wozu sind die binomischen Formeln gut –</i>	
<i>und wozu nicht?</i>	276
<i>Binomische Formeln – so kommen sie zustande</i>	279
<i>Die quadratische Ergänzung</i>	281
<i>Von der Scheitelpunktform zur Lösung</i>	284

<i>Die PQ-Formel</i>	289
<i>Die Herleitung der PQ-Formel</i>	293
Geometrie	297
Die Lehre von Linien und Körpern	299
<i>Was ist ein Punkt?</i>	300
<i>Und was ist eine Linie?</i>	301
<i>Wie Winkel entstehen</i>	302
<i>So bezeichnet man Winkel korrekt</i>	303
<i>Scheitelwinkel sind immer gleich groß</i>	305
<i>Stufen- und Wechselwinkel</i>	306
<i>So konstruiert man einen rechten Winkel</i>	308
Transformationen – wie man Formen verändert	310
<i>So spiegelt man an einer Achse</i>	310
<i>Figuren verschieben</i>	312
<i>Wie man eine Form dreht</i>	312
<i>So findet man das Zentrum einer Rotation</i>	314
<i>Eine Figur in einem Punkt spiegeln</i>	316
Warum Dreiecke besondere Formen sind	317
<i>Alle Winkel im Dreieck ergeben zusammen 180°</i>	317
<i>Flächeninhalte von Dreiecken berechnen</i>	318
<i>Wie man Dreiecke benutzt,</i> <i>um die Winkelsummen in Vielecken zu bestimmen</i>	319
<i>Wann sind Dreiecke deckungsgleich?</i>	321
Die verblüffende Zahl Pi	323
Der Satz des Pythagoras	326
<i>Ein Beweis des Satzes des Pythagoras</i>	330
Die Trigonometrie	334
<i>Was sind Gegenkathete, Ankathete und Hypotenuse?</i>	335
<i>Die drei Formeln zu Sinus, Cosinus und Tangens</i>	336
<i>Beispiele für Sinus, Cosinus und Tangens</i>	337
<i>Wie kann man sich Sinus, Cosinus und Tangens merken?</i> ...	339
<i>So benutzt man den Taschenrechner richtig</i>	340

Stochastik	345
Statistik	348
<i>Warum der Mittelwert vieles verschweigt</i>	349
<i>Spannweite, Minimum und Maximum</i>	350
<i>Mittendrin – der Median</i>	351
<i>Der Häufigste – der Modalwert (Modus)</i>	352
<i>Die Quartile</i>	353
<i>Mit dem Boxplot lassen sich Daten</i>	
<i>schnell und verständlich darstellen</i>	355
<i>Kreisdiagramme verdeutlichen Verhältnisse</i>	356
<i>Säulendiagramme vergleichen Datensätze</i>	357
<i>Liniendiagramme zeigen eine Entwicklung</i>	358
<i>Histogramme stellen eine Häufigkeitsverteilung dar</i>	358
<i>Streudiagramme zeigen Zusammenhänge</i>	359
Wahrscheinlichkeitsrechnung – was ist das eigentlich?	361
<i>Warum Wahrscheinlichkeiten oft falsch verstanden werden</i> ...	362
<i>Wie man über Wahrscheinlichkeiten spricht</i>	363
<i>Was ist der Erfahrungswert?</i>	365
<i>Bei Laplace-Experimenten sind alle Ausgänge</i>	
<i>gleich wahrscheinlich</i>	366
<i>So kombiniert man Wahrscheinlichkeiten</i>	368
<i>Die entscheidende Frage: Wie viele Möglichkeiten gibt es?</i> ...	369
<i>Bedingte Wahrscheinlichkeiten –</i>	
<i>wenn Ereignisse Folgen haben</i>	371
<i>Abhängige Ereignisse können auch gleichzeitig auftreten</i> ...	372
<i>Die Vierfeldertafel schafft Übersicht</i>	
<i>bei abhängigen Wahrscheinlichkeiten</i>	373
<i>Die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten</i>	375
<i>Bedingte Wahrscheinlichkeiten haben</i>	
<i>Risiken und Nebenwirkungen</i>	376
<i>Von einem Merkmal auf andere schließen</i>	378
<i>Wie bedingte Wahrscheinlichkeiten verwirren können</i>	379
Lösungen	382
Schlagwortverzeichnis	393

Warum ein Schulschwänzer noch ein Mathebuch schreibt

Wie es war, ein Kind zu sein, wurde mir während eines Radio-interviews vor Augen geführt. Ich saß im Studio eines Kindersenders, um über den ersten Band von »Mathe für Mamas und Papas« zu sprechen. Mein Interviewpartner war ein Mädchen aus einer siebten Klasse, das vor sich einen Fragenzettel steif in beiden Händen hielt. Ich wollte gerade die Freuden der Mathematik preisen, als sie, ohne aufzublicken, die erste Frage ablas: »Wie viel ist 3792 geteilt durch 16?«

Panik stieg in mir auf: Ich war aufgefliegen. Ich starrte das wartende Mikrofon vor meiner Nase an und sagte: »Ähmmööhhh ...« Die Wahrheit ist nämlich: Ich war als Kind sehr schlecht in Mathe. Ich weiß, wie es ist, der Letzte beim Viereckenrechnen zu sein, rote Anmerkungen im Heft zu haben und um die Häuser zu schleichen, weil man sich mit einer verpatzten Arbeit nicht nach Hause traut.

Wie ich dazu kam, ein Mathebuch zu schreiben? Meine Frau und ich haben eine Tochter adoptiert, die in den ersten Jahren ihres Lebens mit wenig Bildung aufwuchs. Als sie eingeschult wurde, musste sie aufgrund ihres Alters gleich in die dritte Klasse gehen. Wir hatten nur wenig Zeit, den Stoff von zwei Jahren nachzuholen. Ich stellte fest, dass es unzählige Mathebücher gab. Doch etwas fehlte: ein Buch, das Eltern erklärt, wie man Mathe erklärt. Deshalb tat ich mich mit meiner Mutter Ruth zusammen, die Lehrerin ist. Wir wollten ein Buch schreiben, das nicht belehrend ist, sondern Verständnis dafür zeigt, dass viele Kinder und Eltern Angst vor Mathe haben. Es sollte frei sein von unnötigem Fachvokabular, in allen Bundesländern anzuwenden, verständlich – und natürlich auch unterhaltsam.

Inzwischen beschäftigt sich unsere Tochter in der Schule mit Algebra und Prozentrechnung. Und daher ist es natürlich, einen

weiteren Band von »Mathe für Mamas und Papas« herauszugeben.
Hier ist er – viel Spaß damit!
Übrigens: Ich habe es schließlich doch noch geschafft, die Aufgabe
im Radiointerview zu lösen – mit dem Taschenrechner in meinem
Handy.

Welche Hilfe wollen Teenager?

Wir haben bei den Recherchen für dieses Buch viele Eltern und ihre Kinder befragt, wie sie zusammen für die Schule lernen. Dabei fiel uns immer wieder eines auf: Fragten wir die Eltern, ob sie ihren Kindern beim Mathelernen helfen wollen, sagten sie einstimmig »Ja«. Wenn wir allerdings deren Söhne und Töchter fragten, ob sie dies ebenfalls wünschen, hörten wir auf einmal ganz andere Töne. Man könnte sagen: *Es ist kompliziert.*

Wir nahmen an, dass Teenager einfach Distanz zu ihren Eltern wollen – aber das war nicht, was sie bewegte. Stattdessen nannten sie zwei ganz konkrete Gründe. Diese Antwort eines 14-Jährigen ist typisch:

»Wenn ich Papa um Hilfe frage, verfranzt er sich oft und verwirrt mich nur noch mehr. Dann muss er zuerst ewig bei Google nach einer Antwort suchen.«

Die meisten Eltern lernen mit ihren Kindern Mathe, wenn sie plötzlich dazu gezwungen werden – weil ihr Kind sie um Hilfe fragt, weil eine Klassenarbeit vor der Tür steht oder weil es ein schlechtes Halbjahreszeugnis gegeben hat. Die Eltern werden unvorbereitet überrascht, blättern nervös im Lehrbuch ihres Kindes oder suchen im Internet nach Anleitung.

Viele Eltern fühlen sich schon bei einfachen Themen wie Prozentrechnung unsicher. Auch jene, die sich sicher in Mathe fühlen, haben Probleme, ihren Kindern den Stoff verständlich zu erklären. Es ist ein Problem, wenn Kinder ihre Eltern planlos und verwirrt sehen. Zum einen, weil es Kinder entmutigt: *»Wenn Papa es nicht versteht – wie soll ich es dann kapiieren?«* Zum anderen, weil es die Autorität der Eltern untergräbt – ein Kind wird nicht so schnell wieder um Hilfe fragen.

Lassen Sie es nicht so weit kommen: Verfolgen Sie den Unterricht Ihres Kindes, kontrollieren Sie seine Hausaufgaben, lassen Sie sich zeigen, auf welchen Seiten im Schulbuch der Unterricht gerade

stattfindet. Und falls es Sie doch mal kalt erwischt – bereiten Sie sich zuerst vor, bevor Sie mit Ihrem Kind lernen. Sagen Sie: »Ich muss mir das erst angucken – wir machen das heute Abend zusammen.«

Es gibt noch einen zweiten Grund, weshalb Jugendliche ungern mit ihren Eltern lernen – der ist aber mit dem ersten verknüpft. Diese Äußerung eines Mädchens ist typisch:

»Wenn mir Mama bei den Mathehausaufgaben helfen will, ist sie oft sehr gestresst. Wenn ich etwas falsch mache oder nicht verstehe, gibt es schnell Streit.«

Beim Mathelernen kommt es oft zu Spannungen mit den Eltern – und nicht selten auch zu Streit. Dabei spielen häufig die Ängste der Eltern eine Rolle. Unbewusst übertragen sie ihre eigenen Erfahrungen mit dem Matheunterricht in der Kindheit auf ihre Söhne und Töchter.

Eltern, die den Matheunterricht mochten, geben diese positive Erfahrung an ihre Kinder weiter. Sie interessieren sich für die Mathehausaufgaben des Kindes und vermitteln schon dadurch den Kindern eine gute Einstellung gegenüber dem Stoff. Viele Eltern verbinden aber mit Mathematik ihre schlimmsten Kindheitserlebnisse. Das Paradoxe: Gerade jene Eltern, die als Kinder selbst schlecht in Mathe waren, neigen dazu, beim Lernen mit ihren eigenen Kindern ungeduldig zu sein und oft zu schelten. Sie werden gestresst und machen Vorwürfe – besonders, wenn sie beim Lernen stecken bleiben. Wenn es Spaß machen würde, wäre es nicht Mathematik, denken sie.

Zu Konflikten kommt es oft, wenn Eltern und Teenager im Stress sind – weil die Kinder es nicht verstehen oder weil die Väter und Mütter nicht wissen, wie sie es erklären sollen. Der beste Weg, dies zu vermeiden, ist Vorbereitung. Dieses Buch hilft Ihnen dabei.

Tipps zum Lernen mit Teenagern

Bestärken Sie Ihr Kind nicht darin, Mathe abzulehnen Oft vermitteln wir Kindern ein sehr negatives Bild der Mathematik – ohne es zu wollen. Eltern sagen ihren Söhnen und Töchtern oft »Ich habe Mathe auch nie begriffen« oder »Es muss eben sein«. Kinder übernehmen diese negative Einstellung dann. Wenn die Eltern nur mit Abscheu in das Matheheft blicken, ist es nicht überraschend, wenn auch ihr Nachwuchs sich nur widerwillig damit beschäftigt.

Erklären Sie immer das »Warum?« Erwachsene unterliegen oft der Versuchung, sich beim Erklären darauf zu beschränken, wie man ein bestimmtes Verfahren nutzt, ohne zu erläutern, wie das Verfahren funktioniert und warum es ein bestimmtes Ergebnis produziert. Das führt dann dazu, dass Kinder nicht kontrollieren können, ob ein Ergebnis Sinn macht oder vielleicht ein Fehler drinsteckt. Machen Sie beim Erklären keine Abkürzungen.

Legen Sie Zeiten zum Lernen fest Teenager reagieren meist mit Protest und Ablehnung, wenn die Eltern ihnen überraschend erklären, dass sie *genau jetzt* mit ihnen Mathe lernen wollen. Oft liegt das daran, dass die Jugendlichen schon andere Pläne haben. Feste Termine zum Lernen führen auch zu mehr Kontinuität und helfen dabei, das oberflächliche Panik-Lernen kurz vor Klassenarbeiten zu vermeiden. Zudem können Sie sich so besser auf das gemeinsame Lernen vorbereiten.

Loben Sie Ihr Kind für Hartnäckigkeit Auch Teenagern ist das Lob ihrer Eltern sehr wichtig, und es motiviert sie sehr. Man muss sich allerdings überlegen, *für was* man sie lobt. Kinder hören es natürlich gerne, wenn man sie »schlau« oder »intelligent« nennt. Es führt allerdings zu Problemen, wenn sie die Ansicht entwickeln, dass es bei Mathematik darum geht, schlau

zu sein. Dann können sie schnell frustriert werden, wenn ihnen etwas mal nicht sofort gelingt – sie denken, dass sie »nicht schlau« sind, wenn sie mal feststecken. Loben Sie Ihr Kind stattdessen für Hartnäckigkeit – es ist die Eigenschaft, die im Leben wie in der Mathematik am meisten Erfolg bringt.

Die entscheidende Frage: »Was bringt mir das?«

Diese Frage ihrer Kinder kennen die meisten Eltern – häufig kommt sie in gedehnter Form, verbunden mit einem Augenrollen:

»Und was bringt mir das?

Wann werde ich das jemals brauchen?»

Beim Lernen zweifeln Kinder oft daran, dass der Stoff des Mathematikunterrichts für sie von praktischem Nutzen sein wird. Dann antworten Eltern meist etwas wie: *»Das wirst du mal brauchen, wenn du Ingenieur werden willst.«* Und das Kind antwortet unausweichlich: *»Ich will aber nicht Ingenieur werden.«* Manche Eltern antworten auch mit der zynisch-defätistischen Variante: *»Das brauchst du, um ein gutes Zeugnis zu bekommen.«*

Die Frage, wie sich der Stoff aus dem Unterricht in der Realität anwenden lässt, wird leider viel zu selten beantwortet. Man muss nur einen Blick in ein Schulbuch werfen, um zu sehen, dass die Aufgaben darin oft nichts mit der Realität zu tun haben: Da fahren Züge auf einem Gleis frontal aufeinander zu, Zäune werden in stetig gleichbleibender Geschwindigkeit gestrichen, und quadratische Ausdrücke halten sich brav an das Schema $a^2 + 2ab + b^2$.

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Frage »Was bringt mir das?« in den meisten Fällen eine rhetorische ist: Wenn ein Teenager sie stellt, will er in den wenigsten Fällen wissen, wie sich ein mathematisches Verfahren in der Praxis anwenden lässt. Stattdessen möchte er seine Frustration zum Ausdruck bringen.

Sobald Kinder den Stoff verstehen, stellen sie diese Frage nicht mehr. Wenn sie ein Erfolgserlebnis haben, ist es ihnen egal, wozu eine Matheformel gut sein könnte. Die richtige Antwort ist also, den Kindern Mathe auf eine Weise zu erklären, die sie verstehen.

Trotzdem: In dem Moment, in dem man als Eltern mit seinem bockigen Kind vor den Hausaufgaben sitzt, braucht man eine pas-

sende Antwort. Wenn wir mit Eltern sprachen, äußerten sie oft den Wunsch nach einem Buch, das ihnen eine passende Antwort auf diese Kinderfrage gibt. Die Antwort war Eltern sogar so wichtig, dass wir am Anfang jedes Kapitels einen Abschnitt eingefügt haben, der erklärt, wozu ein bestimmtes mathematisches Verfahren in der Realität nützlich ist.

Falls Ihnen diese Frage gestellt werden sollte – wir haben hier eine Liste von Argumenten zusammengestellt, warum es sich lohnt, Mathe zu lernen.

Was es bringt:

Vier Argumente fürs Mathelernen

Mathe bringt Geld Jugendliche sind heute mehr an finanzieller Sicherheit interessiert als ihre Eltern. Die überwiegende Zahl der Berufe, die ein hohes Einstiegsgehalt bringen, sind die sogenannten MINT-Berufe (Mathematik, Ingenieurwesen, Naturwissenschaften, Technik), bei denen Mathematik eine große Rolle spielt. Die einzigen lukrativen Berufsfelder, in denen Mathe keine dominante Rolle spielt, sind Jura und Medizin – und auch hier nur bei großer Spezialisierung.

Wir brauchen Mathe, wenn wir es nicht erwarten Auch in Berufen, in denen man es nicht unbedingt vermuten würde, werden heute mathematische Kompetenzen verlangt. Falls Ihr Teenager plant, durch ein Psychologie- oder Soziologie-Studium der Mathematik zu entkommen, kann er sich auf die Statistik-Vorlesungen freuen. Auch Ärzte müssen heute gesunde Statistik-Kenntnisse mitbringen, um Studien zu gesundheitlichen Risiken beurteilen zu können.

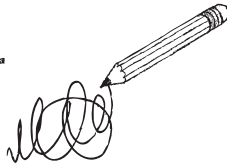
Mathe schützt vor Schulden Studien haben festgestellt, dass Menschen, die ein gesundes mathematisches Wissen haben, bessere finanzielle Entscheidungen treffen und seltener ver-

schuldet sind. Hier ein Beispiel: Stellen Sie sich vor, Sie hätten Ihr Geld in Aktien investiert, die leider 10 Prozent an Wert verloren haben. Um wie viel Prozent muss der Kurs steigen, damit Ihre Anteile wieder den ursprünglichen Wert haben? Wenn Ihnen jetzt *»Ist doch klar – 10 Prozent!«* durch den Kopf schießt – willkommen im Club! Diese Antwort geben die meisten. Tatsächlich sind es 11 Prozent. Beträgt der Verlust 50 Prozent, muss der Kurs sogar um 100 Prozent steigen. Wissenslücken wie diese lassen Menschen weit größere finanzielle Risiken eingehen, als ihnen klar ist.

Mathe löst Probleme Im Englischen gibt es kein Wort für »Matheaufgabe«. Man spricht dort von *»problems«* – und das beschreibt ziemlich gut, worum es in Mathe geht: Probleme lösen. Mathematik hilft dabei, reale Probleme des Alltags aus dem Weg zu schaffen. Denn die Eigenschaften, die Menschen beim Lösen von Matheaufgaben helfen, helfen ihnen auch im echten Leben. In erster Linie ist das Hartnäckigkeit, gepaart mit systematischem Vorgehen: Man muss das Problem in all seinen Einzelheiten verstehen. Dann muss man sich einen Plan machen – und den auch durchziehen.

Zahlen und Maße

$$1+1=2$$



Schriftliche Rechenverfahren

Die schriftlichen Verfahren zum Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren sind eigentlich Stoff für die Grundschule. Aber es gibt zwei Gründe, warum wir sie in dieses Buch für die Klassen 5 bis 9 aufgenommen haben. Zum einen machen Jugendliche auch auf dem Gymnasium noch viele Fehler beim schriftlichen Rechnen – insbesondere beim Dividieren.

Zum anderen bereitet das schriftliche Minusrechnen vielen Eltern Kopfschmerzen. Zurzeit werden in Deutschland zwei unterschiedliche Arten gelehrt: das Ergänzungsverfahren, das den meisten Eltern aus ihrer Schulzeit bekannt sein dürfte. Und das Abziehverfahren, das von vielen Vätern und Müttern als neue Rechenmethode wahrgenommen wird und vielen fremd ist.

Deshalb machen Kinder beim schriftlichen Rechnen so viele Fehler

Warum machen Jugendliche beim schriftlichen Rechnen so viele Fehler? Es liegt daran, dass schriftliche Verfahren sich grundlegend von den Methoden unterscheiden, die wir zum Rechnen im Kopf verwenden. Und zwar nicht nur durch die Tatsache, dass sie auf Papier aufgeschrieben werden.

Beim Rechnen im Kopf trennen wir Zahlen in ihre Stellen auf – also Einer, Zehner, Hunderter und so weiter. Wenn wir zum Beispiel 324 im Kopf mit 135 addieren, würden wir die erste Zahl im Kopf in 300, 20 und 4 aufteilen. Die zweite würden wir in 100, 30 und 5 trennen. Dann würden wir Hunderter, Zehner und Einer jeweils miteinander addieren. Es gibt natürlich unzählige Wege, diese Rechnung in Gedanken zu lösen. In der Regel basieren sie aber immer auf stellenweisem Rechnen.

Ganz anders funktionieren schriftliche Rechenverfahren. Bei ihnen wird nicht mit Stellen, sondern mit Ziffern gearbeitet.

Wenn wir die soeben genannte Aufgabe auf Papier lösen, schreiben wir die beiden Zahlen untereinander und addieren die jeweils übereinanderstehenden Ziffern. Die Zahlen verlieren so ihren Stellen-Charakter als Hunderter, Zehner und Einer. Das führt dazu, dass Jugendliche ihren »Zahlensinn« verlieren. Sie verlieren die Fähigkeit, mit ihrem gesunden Menschenverstand zu überprüfen, ob ein Ergebnis Sinn macht. Daher können sie Fehler und falsche Resultate nicht erkennen.

Das heißt nicht, dass schriftliche Rechenmethoden schlecht wären. Aber gleichzeitig müssen Schüler das Schätzen und Überprüfen von Ergebnissen lernen, um eigene Fehler zu erkennen. Zudem stellen sich Lehrer auf der ganzen Welt die Frage, ob es noch sinnvoll ist, das schriftliche Dividieren bis zum Abwinken zu pauken.

Schließlich haben Kinder heutzutage schneller einen Taschenrechner zur Hand als Stift und Papier. Und so ist es heute wichtiger, dass sie beurteilen können, ob das Ergebnis eines Taschenrechners richtig ist, als dass sie die Rechnung selbst auf Papier lösen können. In Ländern auf der ganzen Welt wurde daher die Bedeutung der schriftlichen Verfahren in Lehrplänen zugunsten des Kopfrechnens zurückgestellt.

Schriftliches Addieren – so funktioniert es

So läuft das schriftliche Plusrechnen: Man schreibt die Stellen der beiden zu verrechnenden Zahlen, wie zum Beispiel Hunderter, Zehner und Einer, jeweils untereinander. Dann addiert man die jeweils übereinanderliegenden Ziffern und schreibt das Ergebnis in die darunterliegende Zeile. So weit ist das Verfahren ganz einfach – wie in diesem Beispiel:

$$\begin{array}{r} \text{H} \text{ Z} \text{ E} \\ 172 \\ + 213 \\ \hline 385 \end{array}$$

Schwieriger wird es, wenn sogenannte Überträge entstehen – Ergebnisse der Teilrechnungen, die größer als Zehn sind. So wie hier.

$$\begin{array}{r} \text{H} \text{ Z} \text{ E} \\ 286 \\ + 345 \\ \hline ? \end{array}$$

In diesem Beispiel entsteht als Teilergebnis der rechten Spalte (6 und 5) 11. Offensichtlich ist das ein Problem – 11 ist eine zweistellige Zahl, doch in der Spalte ist nur Platz für eine einstellige. Es ist ein Übertrag von 10 entstanden.

Das Arbeiten mit Überträgen ist der Knackpunkt bei allen schriftlichen Rechenverfahren. Kinder lernen es oft als Rezept, das sie befolgen, ohne zu verstehen, wie es funktioniert. Sie machen aber deutlich weniger Fehler, wenn sie verstehen, was genau sie da eigentlich tun.

Um das Verfahren zu durchschauen, hilft es, die Zahlen in ihre Stellen aufzutrennen – so wie man es beim Kopfrechnen machen würde. Nehmen wir das Beispiel $286 + 345$. 286 besteht aus 200,

80 und 6 und 345 aus 300, 40 und 5. Wenn wir die Stellen mit ihren Nullen ausschreiben, sieht das so aus:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 H & Z & E \\
 200 & 80 & 6 \\
 +300 & 40 & 5 \\
 \hline
 500 & 120 & 11
 \end{array}
 \end{array}$$

Wir sehen hier, dass in den Zehner- und Einer-Spalten Überträge entstanden sind. 120 enthält einen Hunderter und ist damit zu groß für die Zehner-Spalte, und 11 enthält einen Zehner und ist so zu groß für die Einer-Spalte.

Die Lösung des Problems ist, dass man den Übertrag in die jeweils links stehende Spalte verschiebt: den Zehner, der in der Einer-Spalte zu viel ist, in die Zehner-Spalte und den Hunderter, der in der Zehner-Spalte zu viel ist, in die Hunderter-Spalte. Im Folgenden schreiben wir links das »normale« schriftliche Verfahren mit Ziffern und rechts eine stellenweise Darstellung, die besser zeigt, was »unter der Haube« passiert.

Erste Spalte rechts: 6 plus 5 ergibt 11 – das ist eine zweistellige Zahl. Aber in der Spalte für die Einer ist nur für einstellige Zahlen Platz. Es ist also ein Übertrag entstanden. Wohin damit?

In der ziffernweisen Darstellung schreibt man die zweite Ziffer des Teilergebnisses in die Ergebniszeile – hier also eine Eins. Die erste Ziffer, der Übertrag, muss zur links folgenden Spalte hinzugefügt werden. Dies geschieht in Form einer kleinen 1, die rechts unterhalb der Spalte notiert wird. Was das bedeutet, sehen wir in der stellenweisen Darstellung: 11 besteht aus einer 10 und einer 1. Wir notieren die 1 und fügen die 10 in der links folgenden Spalte hinzu.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 H & Z & E \\
 286 \\
 +345 \\
 \hline
 1 \\
 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 H & Z & E \\
 200 & 80 & 6 \\
 +300 & 1040 & 5 \\
 \hline
 & & 11
 \end{array}
 \end{array}$$

Nächste Spalte – die Zehner. 8 plus 4 plus den Übertrag 1 ergibt 13. Wieder ist ein Übertrag entstanden. In der ziffernweisen Darstellung schreibt man daher wieder eine kleine 1 in die links folgende Spalte zu den Hundertern.

Die stellenweise Darstellung zeigt verständlicher, was passiert: 80 und 40 und der Übertrag 10 ergeben zusammen 130. Das ist eine dreistellige Zahl, die wir nicht in der Spalte für zweistellige Zehner aufschreiben können. Wir notieren daher die 30 und fügen die 100 in der links folgenden Hunderter-Spalte als Übertrag hinzu.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{H Z E} \\
 286 \\
 + 345 \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 631
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{H Z E} \\
 200 \quad 80 \quad 6 \\
 +_{100} 300 \quad 10 \quad 40 \quad 5 \\
 \hline
 130 \quad 11
 \end{array}
 \end{array}$$

Jetzt sind wir in der letzten Spalte angelangt, bei den Hundertern. In der ziffernweisen Darstellung werden 2 plus 3 und der Übertrag 1 addiert. Wir erhalten als letztes Teilergebnis 6. In der stellenweisen Darstellung sehen wir, dass tatsächlich, 200 und 300 und der Übertrag 100 zusammengefügt wurden – was 600 ergibt. Als Ergebnis erhalten wir somit 631.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{H Z E} \\
 286 \\
 + 345 \\
 \hline
 1 \quad 1 \\
 631
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{H Z E} \\
 200 \quad 80 \quad 6 \\
 +_{100} 300 \quad 10 \quad 40 \quad 5 \\
 \hline
 600 \quad 130 \quad 11
 \end{array}
 \end{array}$$

In der Grundschule schaute uns bei dieser Rechnung vielleicht ein Lehrer über die Schulter und erklärte uns das Ganze so: »Sechs und Fünf ist Elf, Eins hin, Eins im Sinn. Acht und Vier und Eins ist Dreizehn, Drei hin, Eins im Sinn«, und so weiter.