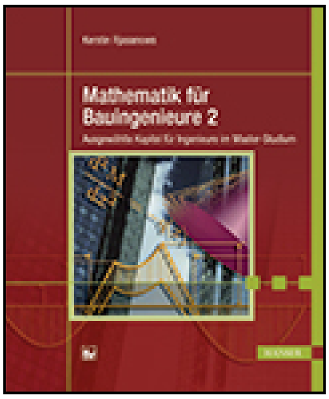
HANSER



Leseprobe

Kerstin Rjasanowa

Mathematik für Bauingenieure 2

Ausgewählte Kapitel für Ingenieure im Master-Studium

ISBN (Buch): 978-3-446-44950-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44951-0

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44950-3

sowie im Buchhandel.

Vorwort

„Jede Wissenschaft ist so weit Wissenschaft, wie Mathematik in ihr ist.“

Immanuel Kant (1724 - 1804)

Mit Einführung der Bachelor- und Masterstudiengänge an den deutschen Hochschulen haben sich gleichzeitig neue Anforderungen für deren inhaltliche Gestaltung ergeben. Das vorliegende Buch, das auf der Basis meiner Vorlesungen in Mathematik im Masterstudiengang Bauingenieurwesen an der Hochschule Kaiserslautern entstanden ist, trägt dieser aktuellen Entwicklung Rechnung. Kapitel 1 beschäftigt sich mit Funktionen mehrerer Veränderlicher sowie deren Differenzialrechnung und Integralrechnung, die u. a. die Ermittlung von Extremwerten bzw. die Berechnung von Momenten für Flächen und Volumina auch bei inhomogener Dichteverteilung ermöglicht. Gleichzeitig ist es Voraussetzung für das Kapitel 2, das Grundlagen für das Lösen gewöhnlicher Differenzialgleichungen bzw. von Systemen gewöhnlicher Differenzialgleichungen enthält. Die Fallstudien hierzu zeigen, dass viele physikalische Modelle im Bauingenieurwesen auf Differenzialgleichungen führen, deren Lösung somit eine zentrale Rolle spielt. In Kapitel 3 werden Grundbegriffe der Finanzmathematik wie Zinsrechnung, Wirtschaftlichkeits- und Investitionsrechnung, Abschreibungs- und Rentenrechnung vermittelt, auf denen betriebswirtschaftliche Kenntnisse basieren. Diese gewinnen in zunehmendem Maß Bedeutung bei der Planung, Realisierung und Erhaltung von Bauvorhaben, beim Management von Immobilien oder bei der erfolgreichen Leitung von Unternehmen auch im Baubereich. Kapitel 4 ist der Statistik gewidmet, deren Gegenstand die Analyse und zahlenmäßige Erfassung zufälliger, d. h. nicht vorhersehbarer, Experimente ist. Diese hat im Bauingenieurwesen zunehmend Eingang gefunden, z. B. bei der Aus- und Bewertung von Messungen, bei der Vorhersage von Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse, die als Grundlage für die Bemessung von Bauwerken benutzt werden, oder sogar bei der Bewertung von Immobilien.

Die Darstellung der Inhalte orientiert sich am Vorgänger „Mathematik für Bauingenieure 1 - Grundlagen für das Bachelor-Studium“, was das Studium dieses Buches erleichtern soll. Eine zielgerichtete, mathematisch korrekte und für das Bauingenieurwesen geeignete Darlegung steht dabei im Mittelpunkt. Kleingedruckte Ergänzungen wie z. B. Beweise erhöhen das mathematische Verständnis, sind aber für die Anwendung der Ergebnisse nicht zwingend erforderlich. Die überwiegende Mehrheit der Beispiele zur Illustration getroffener Aussagen bzw. zur Lösung praktischer Probleme ist aus dem Erfahrungsbereich Bauingenieurwesen entnommen. Fallstudien am Ende der Kapitel enthalten dafür typische Situationen, die Ableitung geeigneter mathematischer Modelle und die Lösung mit den dargestellten Methoden. Besonderer Wert ist auf eine strukturierte Gestaltung des mathematischen Textes gelegt. Zahlreiche Schlagwörter auf der Marginalienspalte erhöhen die Übersicht, gestatten bessere logische Nachvollziehbarkeit und helfen beim Nachschlagen. Die farbliche Gestaltung, insbesondere das Unterlegen resultierender Formeln und Ergebnisse sowie zahlreiche Grafiken und Bilder, dienen ebenfalls einem vertiefenden Verständnis. Ein ausführliches Sachwortverzeichnis soll die Arbeit mit dem Buch erleichtern. Zahlreiche Übungsaufgaben mit Lösungen stehen dem Leser unter der Internet-Adresse www.hanser-fachbuch.de/9783446449503 zur Verfügung.

Für die gewissenhafte Durchsicht des Buches danke ich sehr Herrn Dr. S. Steidel vom ITWM Fraunhofer in Kaiserslautern, Herrn R. Berweiler von der Universität Koblenz, Herrn Prof. Dr. J. Schanzenbach von der HS Kaiserslautern sowie Herrn T. Seel, z. Zt. Master-Student im Studiengang Bauingenieurwesen der HS Kaiserslautern. Ein Dankeschön gilt ebenfalls vielen Studierenden des Studienganges Bauingenieurwesen der Hochschule Kaiserslautern, die Kontrollrechnungen der Übungsaufgaben vornahmen und so mithalfen, die angegebenen Lösungen zu verifizieren. Bei Herrn Ph. Thorwirth vom Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag bedanke ich mich herzlich für die Unterstützung beim Entstehen des vorliegenden Buches und die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag.

Kaiserslautern, im Sommer 2016 Kerstin Rjasanowa

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher **9**

1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher . . . 9
1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, Partielle Ableitungen . . . 12
1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung . . . 16
1.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . 20
1.4.1 Definition lokaler Extrema . . . 20
1.4.2 Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema . . . 21
1.4.3 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema . . . 22
1.5 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher . . . 24
1.5.1 Integration über ebene Bereiche . . . 25
1.5.2 Kurvenintegrale . . . 32
1.5.3 Der Satz von Green . . . 37
1.6 Anwendungen an Beispielen . . . 40
1.6.1 Ermittlung des Widerstandsmomentes . . . 40
1.6.2 Vermessung eines Dreiecks . . . 41
1.6.3 Wasserrinne mit Trapez-Querschnitt . . . 42

2 Differenzialgleichungen **45**

2.1 Einführung . . . 45
2.2 Definitionen . . . 47
2.3 Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . 48
2.4 Trennung der Variablen . . . 49
2.5 Lineare Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . 50
2.6 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 52
2.6.1 Sätze über die Lösungen . . . 53
2.6.2 Allgemeine Lösung von homogenen Differenzialgleichungen 2. Ordnung . . . 55
2.6.3 Homogene Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . 57
2.6.4 Allgemeine Lösung inhomogener Differenzialgleichungen höherer Ordnung . . . 58
2.7 Lineare Systeme von Differenzialgleichungen 1. Ordnung . . . 63
2.7.1 Definitionen, Beispiele . . . 63
2.7.2 Lineare homogene Systeme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . 67
2.8 Anwendungen an Beispielen . . . 71
2.8.1 Mechanische Schwingung . . . 71
2.8.2 Ausströmgeschwindigkeit einer Flüssigkeit . . . 73
2.8.3 Gleichung einer Seilkurve . . . 74

2.8.4 Knickkraft nach Euler 76
2.8.5 Biegelinie eines Balkens 78
2.8.6 Absenkung des Grundwasserspiegels mit einem vollkommenen Brunnen 80
2.8.7 Schwingungssystem 82

3 Finanzmathematik **85**
3.1 Zinsen 85
3.1.1 Lineare Verzinsung 85
3.1.2 Regelmäßige Zahlungen 87
3.1.3 Geometrische Verzinsung 89
3.1.4 Unterjährige Verzinsung 93
3.1.5 Stetige Verzinsung 96
3.1.6 Zusammenfassung 98
3.2 Tilgungsrechnung 99
3.2.1 Tilgungsprozess 99
3.2.2 Annuitätentilgung 100
3.2.3 Ratentilgung 103
3.2.4 Zinsschuldtilgung 105
3.2.5 Zusammenfassung 105
3.3 Investitionsrechnung 106
3.3.1 Kapitalwertmethode 107
3.3.2 Methode des internen Zinsfußes 108
3.4 Abschreibungen 111
3.4.1 Abschreibungsprozess 111
3.4.2 Lineare Abschreibung 112
3.4.3 Geometrisch degressive Abschreibung 112
3.4.4 Übergang degressive - lineare Abschreibung 114
3.4.5 Arithmetisch degressive Abschreibung 115
3.4.6 Zusammenfassung 117
3.5 Berechnung des effektiven Zinssatzes 118
3.6 Rentenrechnung 120
3.6.1 Konstante Rente 120
3.6.2 Geometrisch wachsende Rente 125
3.6.3 Arithmetisch wachsende Rente 129
3.6.4 Zusammenfassung 134

4 Statistik **135**
4.1 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung 135

4.1.1 Kombinatorik 135
4.1.2 Zufällige Ereignisse 138
4.1.3 Definition der Wahrscheinlichkeit 140
4.1.4 Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit 141
4.1.5 Bedingte und totale Wahrscheinlichkeit 144
4.2 Zufallsvariablen 147
4.2.1 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktion 147
4.2.2 Diskrete Verteilungen 149
4.2.3 Stetige Verteilungen 158
4.2.4 Grenzverteilungssätze 172
4.3 Beschreibende Statistik 177
4.3.1 Häufigkeitsverteilungen 177
4.3.2 Maßzahlen einer Stichprobe 181
4.4 Schließende Statistik 186
4.4.1 Stichprobenfunktionen 186
4.4.2 Statistische Schätzverfahren 189
4.4.3 Statistische Testverfahren 203
4.4.4 Der χ^2-Anpassungstest 211
4.5 Anwendungen an Beispielen 214
4.5.1 Hochwasserabfluss 214
4.5.2 Beurteilung der Dicke von Betondeckungen 215
4.5.3 Beurteilung der Nutzungssicherheit von Bauwerken 217
4.5.4 Bewertung von Grundstücken 217

Literaturverzeichnis **221**

Sachwortverzeichnis **223**

1 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Oft sind physikalische Größen nicht nur von einer, sondern mehreren Einflussgrößen abhängig. Beispielsweise wird das Volumen eines Quaders von drei Kantenlängen bestimmt. Die Verlängerung eines Stabes infolge einer Krafteinwirkung ist nach dem Gesetz von Hooke abhängig von dieser Kraft, der Länge des Stabes, seinem Querschnitt und seinem Elasizitätsmodul. Solche Abhängigkeiten werden durch Funktionen mehrerer Veränderlicher beschrieben. Funktionen zweier Veränderlicher können graphisch veranschaulicht werden. Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit wird erklärt. Partielle Ableitungen sind Grenzwerte der Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Der Gradient wird zur Charakterisierung des Wachstums einer Funktion und zur Berechnung des totalen Differenzials benutzt. Damit ist z. B. die Bestimmung maximaler absoluter und relativer Messfehler bei Vorgabe der Toleranzen der Messgrößen möglich. Eine wichtige Rolle spielt die Ermittlung von Extremwerten von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Flächen- und Volumenintegrale sind i. Allg. Integrale von Funktionen mehrerer Veränderlicher, mit denen z. B. die Berechnung von Momenten bei inhomogener Dichteverteilung erfolgt.

Bezeichnungen

$\mathbb{R}^n$ n-dimensionaler Vektorraum

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
Vektor, Stelle

$X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
zugehöriger Punkt

$\overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$
zugehöriger Ortsvektor

1.1 Der Begriff der Funktion mehrerer Veränderlicher

Die Veränderlichen, die eine physikalische Größe beeinflussen, werden in einem Vektor zusammengefasst. Der Definitionsbereich für Funktionen mehrerer Veränderlicher ist damit eine Teilmenge des Vektorraums $\mathbb{R}^n$ oder der $\mathbb{R}^n$ selber. Jetzt kann der Funktionsbegriff als eindeutige Zuordnung aus dem $\mathbb{R}^n$ in die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ erklärt werden. Die graphische Veranschaulichung ist für Funktionen zweier Veränderlicher durch eine Oberfläche im Raum möglich. Isolinienbilder dienen ebenfalls der Darstellung der Funktionswerte - ähnlich wie die Höhenlinien auf einer Landkarte.

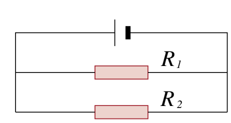


Bild 1.1 Parallele Widerstände

Definition 1.1

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Ist jeder Stelle $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top \in D$ durch eine Vorschrift f *eindeutig* eine Zahl $z = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ zugeordnet, so heißt f **Funktion von n unabhängigen Veränderlichen** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf dem Definitionsbereich $D_f = D$. Dabei ist z die **abhängige Veränderliche**.

Beispiel 1.2

Funktionen mehrerer Veränderlicher

1. Sind zwei Widerstände R_1 und R_2 im Stromkreis parallel geschaltet (siehe **Bild 1.1**), so errechnet sich ihr Gesamtwiderstand R aus dem **Gesetz von Ohm**
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{zu} \qquad R = \frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}.$$

R ist *abhängig* von den beiden Widerständen R_1 und R_2, also eine Funktion zweier Veränderlichen $R = R(R_1, R_2)$.

2. Die Gravitationskraft F zwischen zwei Körpern mit den Massen M und m berechnet sich nach dem **Gravitationsgesetz von Newton** zu

$$F = -\frac{\gamma\, m\, M}{|x|^2}\,\frac{x}{|x|},$$

wobei γ die Gravitationskonstante und $x = \overrightarrow{OX} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ der Ortsvektor des Schwerpunktes des Körpers mit der Masse m im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit dem Ursprung O im Schwerpunkt des Körpers mit der Masse M ist (siehe **Bild 1.2**). Die Kraft F ist ein dreidimensionaler Vektor, dessen Richtung durch den Einheitsvektor $-x/|x|$ gegeben ist und dessen Betrag $\gamma\, m\, M/|x|^2$ ist. Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$F_i = -\frac{\gamma\, m\, M}{|x|^3}\, x_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Das bedeutet, dass die Kraftkomponenten F_1, F_2, F_3 jeweils abhängig von x_1, x_2, x_3 sind und daher Funktionen dreier Veränderlicher darstellen: $F_i = F_i(x_1, x_2, x_3)$.

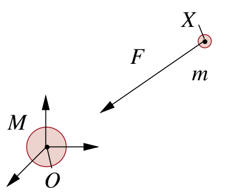


Bild 1.2 Gravitationskraft F

Definition 1.3

Der **natürliche Definitionsbereich** einer Funktion f ist diejenige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, für die die Zuordnung f erklärt ist.

Natürlicher Definitionsbereich

Beispiel 1.4

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ hat den natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2$, da *jeder* Stelle $(x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ durch diese Vorschrift eine reelle Zahl zugeordnet werden kann.
2. Die Funktion $R(R_1, R_2) = \dfrac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}$ hat als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(R_1, R_2)^\top : R_1 = -R_2\}$, da der Nenner in der Funktionsvorschrift für $R_1 = -R_2$ Null wird und somit der Bruch nicht erklärt ist. Der *für das physikalische Gesetz relevante Definitionsbereich* ist allerdings lediglich $\{(R_1, R_2)^\top : R_1 > 0 \wedge R_2 > 0\}$, da Widerstände positiv sind.
3. Die Funktionen $F_i(x_1, x_2, x_3) = -\dfrac{\gamma\, m\, M}{|x|^3}\, x_i, \; i = 1, 2, 3,$ haben als natürlichen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)^\top\}$, da der Nenner in den Funktionsvorschriften genau dann Null ist, wenn $|x| = 0$ gilt, also $x = (0,0,0)^\top$ ist. In diesem Fall fallen die Schwerpunkte der Körper mit den Massen M und m zusammen.

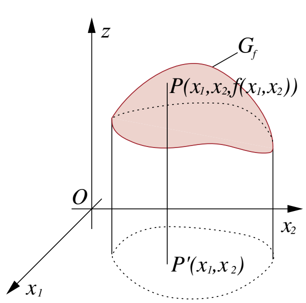


Bild 1.3 Graph einer Funktion $z = f(x_1, x_2)$

Die wesentlichen Unterschiede von Funktionen einer bzw. mehrerer Veränderlicher bestehen bereits für die Fälle $n = 1$ und $n = 2$. Für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen kann verallgemeinert werden. Daher werden im Folgenden vorwiegend Funktionen zweier Veränderlicher studiert.

Graphische Darstellung

Die gleichzeitige graphische Darstellung von Definitionsbereich und Funktionswerten ist nur für Funktionen von bis zu zwei Veränderlichen möglich, da andernfalls mehr als drei Dimensionen dafür benötigt werden. Im Folgenden werden Möglichkeiten der graphischen Darstellung von Funktionen zweier Veränderlicher erläutert.

Im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem mit den Achsen x_1, x_2, z und dem Koordinatenursprung O wird der Definitionsbereich

D_f durch eine Teilmenge der (x_1, x_2)-Ebene dargestellt. Jeder Stelle $(x_1, x_2)^\top$ des Definitionsbereiches mit dem zugehörigen Punkt P' kann mit der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ ein Punkt P mit dem Ortsvektor $(x_1, x_2, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ zugeordnet werden. Der Punkt P' ist die **Projektion** des Punktes P auf die (x_1, x_2)-Ebene. Die Menge aller zugeordneten Punkte P bildet i. Allg. eine Oberfläche im Raum $\mathbb{R}^3$ (siehe **Bild 1.3**).

Definition 1.5

Die Menge der Punkte $G_f = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f,\ z = f(x_1, x_2)\}$ heißt **Graph** der Funktion f.

Graphen von Funktionen

Beispiel 1.6

1. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4**) ist eine Ebene mit der Gleichung $z = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (siehe **Bild 1.4**). Ihre Achsenabschnittsgleichung lautet $x_1 + \dfrac{x_2}{2} + \dfrac{z}{4} = 1$.
2. Der Graph der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ heißt **Kreisparaboloid** (siehe **Bild 1.5**). Für $x_2 = 0$ folgt aus der Funktionsgleichung $f(x_1, 0) = x_1^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_1, z)-Ebene. Analog folgt für $x_1 = 0$ aus der Funktionsgleichung $f(0, x_2) = x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P ist eine Normalparabel in der (x_2, z)-Ebene. Für $z = c$, $c \geq 0$, folgt aus der Funktionsgleichung $c = x_1^2 + x_2^2$. Die Menge der zugeordneten Punkte P in der Ebene $z = c$ parallel zur (x_1, x_2)-Ebene ist jeweils ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(0, 0, c)$ und dem Radius $\sqrt{c}$.

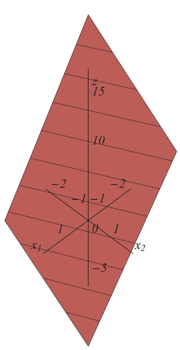


Bild 1.4 $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$

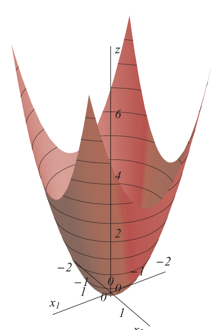


Bild 1.5 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

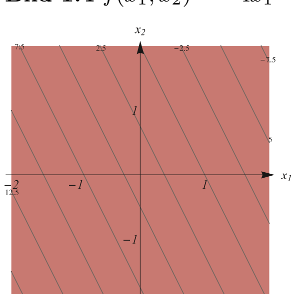


Bild 1.6 Isolinien $c = -4x_1 - 2x_2 + 4$

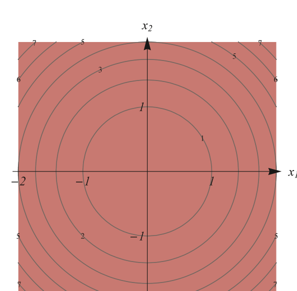


Bild 1.7 Isolinien $c = x_1^2 + x_2^2$

Definition 1.7

Ist $f(x_1, x_2)$ eine Funktion zweier Veränderlicher mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, so heißen die Punktmengen
$I_c = \{(x_1, x_2, z) : (x_1, x_2)^\top \in D_f,\ z = f(x_1, x_2) = c\}$
Isolinien von f mit der Höhe c.

Isolinien

Beispiel 1.8

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = -4x_1 - 2x_2 + 4$ (vergleiche **Beispiel 1.4 und 1.6**) hat als Isolinien Geraden (siehe **Bild 1.6**). Für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ folgt aus der Funktionsgleichung

   $$c = -4x_1 - 2x_2 + 4.$$

   Umstellen nach x_2 liefert die Geradengleichung

   $$x_2 = -2x_1 + 2 - \frac{c}{2}.$$

   Diese Geraden sind parallel (sie haben alle denselben Anstieg -2) und schneiden die x_2-Achse im Punkt $(0,\ 2 - c/2)$.

2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (vergleiche **Beispiel 1.6**) hat für die konstante Höhe $z = f(x_1, x_2) = c$ als Isolinien Kreise mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung und dem Radius $\sqrt{c}$ (siehe **Bild 1.7**).

1.2 Grenzwerte, Stetigkeit, Partielle Ableitungen

Der Begriff des Grenzwertes und der Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher basiert - wie auch bei Funktionen einer Veränderlichen - auf der Konvergenz von Folgen von Argumenten gegen eine Stelle des Definitionsbereiches. Partielle Ableitungen sind die Grenzwerte von Differenzenquotienten bezüglich einer der Veränderlichen. Für Funktionen zweier Veränderlicher ist die geometrische Interpretation ihrer partiellen Ableitungen möglich.

Grenzwerte

Abstand

In [4] wurde bereits der Begriff der Länge eines Vektors erklärt, der in diesem Abschnitt ebenfalls Anwendung findet. Der **Abstand** zweier Punkte X und Y, die den Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ entsprechen, ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{XY}$, also die Zahl

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Definition 1.9

1. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, die jeder natürlichen Zahl k ein Element $a_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet, heißt **Folge** im $\mathbb{R}^n$. Sie wird mit $\{a_k\}$ bezeichnet.
2. Die Folge $\{a_k\} \in \mathbb{R}^n$ **konvergiert** gegen die Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, wenn gilt

$$\lim_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}| = 0.$$

Die Stelle $\bar{x}$ heißt **Grenzwert** der Folge $\{a_k\}$, und man schreibt

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \bar{x}.$$

Beispiel 1.10

Folgen und Grenzwert

1. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = \left(2^{2-k}, 2^{1-k}\right)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.8**). Die ersten Folgenglieder lauten $(2,1)^\top$, $(1,0.5)^\top$, $(0.5,0.25)^\top$, ... Es wird gezeigt, dass diese Folge gegen die Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$ konvergiert. Nach **Definition 1.9** wird $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}|$ berechnet. Es ist

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} |a_k - \bar{x}| &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2^{2-k}-0)^2+(2^{1-k}-0)^2} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{2^{2(2-k)}+2^{2(1-k)}} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sqrt{(2^{2\cdot 2}+2^2)2^{-2k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{20}/2^k = 0.\end{aligned}$$

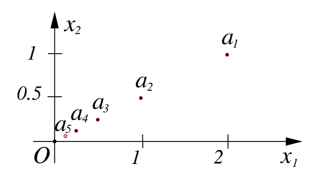


Bild 1.8 Folge $a_k = (2^{2-k}, 2^{1-k})^\top$

2. Betrachtet wird die Folge mit den Gliedern $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$, $k \in \mathbb{N}$ (siehe **Bild 1.9**). Die ersten Folgenglieder sind $(1,1)^\top$, $(0,1/4)^\top$, $(-1,1/9)^\top$, $(0,1/16)^\top$, $(1,1/25)^\top$, ... Die Punkte, die diesen Folgengliedern entsprechen, liegen abwechselnd auf den Geraden $x_1 = 1$, $x_1 = 0$, $x_1 = -1$. Es gibt keinen Punkt $\bar{x}$ in der Ebene so, dass der Abstand der Folgenglieder zu diesem Punkt gegen 0 konvergiert. Welchen Punkt man auch immer wählt, es ist der Abstand derjenigen (unendlich vielen) Folgenglieder zu diesem Punkt, die auf den Geraden liegen, auf denen dieser Punkt sich nicht befindet, stets mindestens so groß wie der Abstand dieses Punktes zu den Geraden selbst.

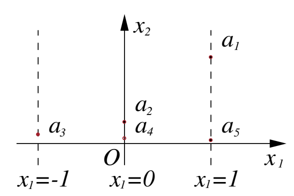


Bild 1.9 Folge $a_k = (\sin(k\pi/2), 1/k^2)^\top$

Definition 1.11

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ hat für $x \to \bar{x}$ den **Grenzwert** $c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = c, \; x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n,$$

wenn für *jede* gegen $\bar{x}$ konvergente Folge $\{a_k\}$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = c.$$

Beispiel 1.12

Grenzwert einer Funktion

Der Grenzwert der Funktion $f(x_1,x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ für $x \to \bar{x} = (2,3)^\top$ ist zu ermitteln (siehe **Bild 1.10**) .

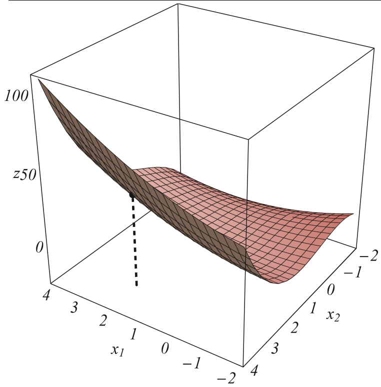


Bild 1.10 $f(x_1,x_2)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^3$

Für jede Folge $\{a_k\} = \{(a_{k1}, a_{k2})^\top\}$, die gegen $\bar{x} = (2,3)^\top$ konvergiert, gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{k1} = 2 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} a_{k2} = 3.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte konvergenter Zahlenfolgen (siehe z. B. [4]) ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} f(a_{k1}, a_{k2}) &= \left(\lim_{k\to\infty} a_{k1}\right)^2 + 2\lim_{k\to\infty} a_{k1} \lim_{k\to\infty} a_{k2} + \left(\lim_{k\to\infty} a_{k2}\right)^3 \\ &= 2^2 + 2\cdot 2\cdot 3 + 3^3 = 43.\end{aligned}$$

Stetigkeit

Definition 1.13

Eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **stetig** an der Stelle $\bar{x} \in D_f$, wenn gilt

$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Die Funktion heißt **stetig**, wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereiches D_f stetig ist.

Stetigkeit

Beispiel 1.14

Die Funktion

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & (x_1,x_2)^\top \neq (0,0)^\top, \\ 0, & (x_1,x_2)^\top = (0,0)^\top \end{cases}$$

(siehe **Bild 1.11**) ist *stetig* für alle $(x_1,x_2)^\top \neq (0,0)^\top$.

Für $(x_1,x_2)^\top = (0,0)^\top$ hingegen ist $f(x_1,x_2)$ *nicht stetig*. Wählt man z. B. die Folge mit den Gliedern $a_k = (1/k, 0)^\top$, die gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergiert, so erhält man als Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* den Funktionswert $f(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k^2 - 0}{1/k^2 + 0} = 1 \neq f(0,0).$$

Auch für die Folge mit den Gliedern $a_k = (2/k, 1/k)^\top$, die gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergiert, erhält man als Grenzwert der Folge der zugehörigen Funktionswerte *nicht* den Funktionswert $f(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \lim_{k\to\infty} \frac{4/k^2 - 1/k^2}{4/k^2 + 1/k^2} = \frac{3}{5} \neq f(0,0).$$

Offenbar ist der Grenzwert der Folge der Funktionswerte von $f(x_1,x_2)$ für verschiedene gegen die Stelle $(0,0)^\top$ konvergierende Folgen nicht derselbe. Damit hat die Funktion $f(x_1,x_2)$ an der Stelle $(0,0)^\top$ *keinen* Grenzwert und ist daher dort nicht stetig.

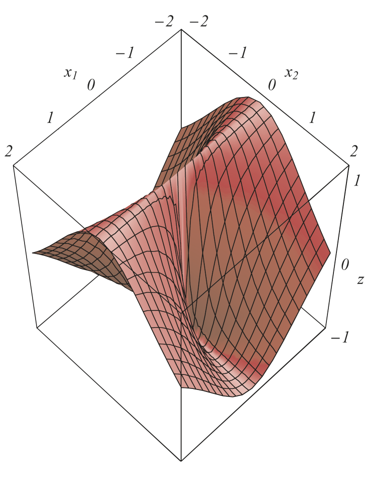


Bild 1.11
$f(x_1,x_2)=(x_1^2-x_2^2)/(x_1^2+x_2^2)$

Die Rechenregeln für die Grenzwerte von Folgen bzw. Funktionen sind analog zu denen von Funktionen einer Veränderlichen. Insbesondere sind Summe, Produkt und Quotient (Nennerfunktion ungleich Null) stetiger Funktionen ebenfalls wieder stetige Funktionen.

Partielle Ableitungen

Definition 1.15

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Existiert für ein $i \in \{1, ..., n\}$ an einer festen Stelle $(x_1, ..., x_n)^\top$ der Grenzwert

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i},$$

so heißt er **partielle Ableitung** von f nach x_i an der Stelle $(x_1, ..., x_n)^\top$ und wird wie folgt bezeichnet:

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, ..., x_n).$$

Die Funktion f ist dort **partiell differenzierbar** nach x_i.

Beispiel 1.16

Differenzierbarkeit und Ableitungen

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^3$ ist an jeder Stelle des $\mathbb{R}^2$ nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

   $f_{x_1} = 2x_1 + 2x_2 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = 2x_1 + 3x_2^2.$

2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ mit dem Definitionsbereich
   $D_f = \{(x_1, x_2)^\top : 0 < x_1 < \infty,\ -\infty < x_2 < \infty\}$
   ist an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches nach x_1 und nach x_2 partiell differenzierbar. Es ist

   $f_{x_1} = x_2 x_1^{x_2 - 1} \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = x_1^{x_2} \ln x_1.$

3. Die Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = \mathrm{e}^{x_2 x_3} + x_3$ mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}^3$ ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar nach x_1, x_2 und x_3. Es ist

   $f_{x_1} = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = x_3\, \mathrm{e}^{x_2 x_3} \qquad \text{und} \qquad f_{x_3} = x_2\, \mathrm{e}^{x_2 x_3} + 1.$

Bemerkung 1.17

1. Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0}$ in **Definition 1.15** der partiellen Ableitung bezieht sich nur auf die Veränderung der i-ten Veränderlichen x_i der Argumente von f. Alle anderen Argumente sind fest. Die entsprechende partielle Ableitung nach x_i ist daher gleich der gewöhnlichen Ableitung von f nach x_i, wenn alle anderen Argumente als konstant betrachtet werden.

2. Die partielle Ableitung f_{x_i} an der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)^\top$ ist gleich dem Anstieg der Tangente an den Graphen der Funktion $f(\bar{x}_1, ..., x_i, ..., \bar{x}_n)$ *der einen Veränderlichen* x_i an der Stelle $\bar{x}_i$.

   Für eine Funktion zweier Veränderlicher x_1 und x_2 lauten die Gleichungen der beiden Tangenten (Geraden im Raum)

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

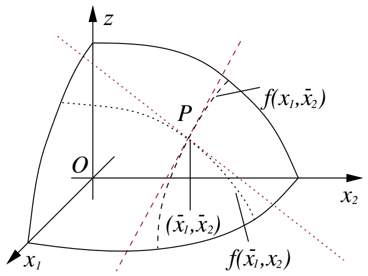


Bild 1.12 Tangenten an den Graphen von $f(x_1, x_2)$ an der Stelle $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$

Hermann Amandus Schwarz
(* 25. Januar 1843 in Hermsdorf, Schlesien, † 30. November 1921 in Berlin)

deutscher Mathematiker, Professor in Halle, Zürich, Göttingen, Berlin, Mitglied der preußischen Akademie der Wissenschaften (1882), der Leopoldina (1985) und der Russischen Akademie der Wissenschaften (1897)

Funktionentheorie, Theorie der Minimalflächen, Schwarz-Christoffel-Transformation, Arbeiten über die hypergeometrische Differentialgleichung, Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Spiegelungsprinzip von Schwarz, Alternierendes Verfahren von Schwarz zur Gebietszerlegung bei der Lösung elliptischer partieller Differentialgleichungen

hier: Satz von Schwarz

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Sie spannen die sogenannte **Tangentialebene** auf, die den Graphen der Funktion $z = f(x_1, x_2)$ im Punkt $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, f(\bar{x}_1, \bar{x}_2))$ berührt (siehe **Bild 1.12**).

3. Existieren für eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ die partiellen Ableitungen bezüglich jedes Argumentes, so heißt f auf D_f **differenzierbar**.

4. Die Rechenregeln für das Bilden der partiellen Ableitungen nach einer bestimmten Veränderlichen sind analog zu denen für Funktionen einer Veränderlichen. Alle anderen Veränderlichen betrachtet man dabei als konstant.

5. Partielle Ableitungen höherer Ordnung erhält man als partielle Ableitungen der partiellen Ableitungen (die ihrerseits Funktionen mehrerer Veränderlicher sind). So ist z. B.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_{x_1x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = f_{x_1x_2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = f_{x_2x_1}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = f_{x_2x_2}. \end{aligned}$$

6. Nach dem **Satz von Schwarz** ist für eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ p-mal stetig differenzierbare Funktion f die Reihenfolge des Differenzierens beim Bilden einer q-ten partiellen Ableitung mit $q \leq p$ unerheblich. Insbesondere gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen f

$$f_{x_ix_j} = f_{x_jx_i}, \; i, j = 1, ..., n, \; i \neq j. \tag{1.1}$$

1.3 Gradient, partielles und totales Differenzial, Fehlerrechnung

Der Gradient einer differenzierbaren Funktion mehrerer Veränderlicher hat zentrale Bedeutung. Er gibt z. B. die Richtung des steilsten Anstiegs an. Mit seiner Hilfe kann das totale Differenzial berechnet werden, das bei der näherungsweisen Berechnung von Funktionswerten und insbesondere bei der Fehlerrechnung verwendet wird.

Gradient

Definition 1.18

Ist eine Funktion f mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ an einer Stelle $x \in D_f$ nach allen n Veränderlichen partiell differenzierbar, so heißt der Vektor der ersten partiellen Ableitungen von f **Gradient** von f an der Stelle x:

$$\operatorname{grad} f(x) = (f_{x_1}(x),\ \ldots,\ f_{x_n}(x))^\top .$$

Der Gradient weist in Richtung des steilsten Anstieges der Funktion f an der Stelle x.

Beispiel 1.19

Die Funktion

$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$

(siehe **Bild 1.13**) hat den Gradienten $\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (-2x_1 + 10, -2x_2 + 10)^\top$. An der Stelle $x = (4,4)^\top$ erhält man z. B. $\operatorname{grad} f(4,4) = (2,2)^\top$, an der Stelle $x = (3,6)^\top$ ergibt sich $\operatorname{grad} f(3,6) = (4,-2)^\top$.

Der Graph der Funktion f ist ein Kreisparaboloid. Seine Isolinien sind Kreise mit dem Mittelpunkt $M(5,5)$. In **Bild 1.14** sind die Isolinien zusammen mit den beiden Gradienten dargestellt.

Gradient an einer Stelle

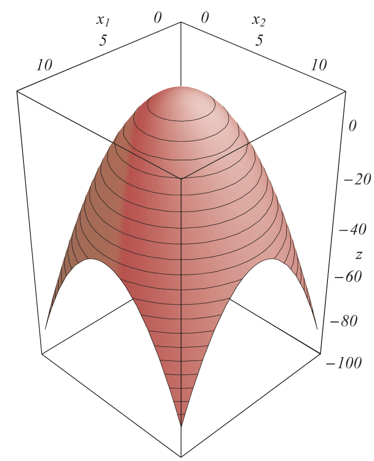


Bild 1.13
$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40$

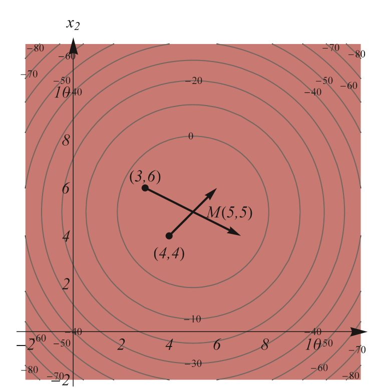


Bild 1.14 Isolinien, Gradienten

Partielles und totales Differenzial

Das Differenzial $\mathrm{d}f$ der an einer festen Stelle $x = \bar{x}$ differenzierbaren Funktion f *einer* Veränderlichen mit der Abweichung Δx ist erklärt als

$$\mathrm{d}f(\Delta x) = f'(\bar{x})\Delta x,$$

und für den Funktionswert $f(\bar{x} + \Delta x)$ gilt näherungsweise (siehe [4])

$$f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})\Delta x = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f(\Delta x).$$

Betrachtet man bei einer Funktion $f(x_1, x_2)$ *zweier* Veränderlicher eine Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$ und fixiert $\bar{x}_2$, so erhält man die Funktion $f(x_1, \bar{x}_2)$, die jetzt nur noch von *einer* Veränderlichen abhängt. Für den Funktionswert $f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2)$ gilt dann

$$f(\bar{x}_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f_{x_1}(\Delta x_1),$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_1

$$\mathrm{d}f_{x_1}(\Delta x_1) = f_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_1 = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1.$$

Das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_1 gibt näherungsweise den Funktionswertzuwachs der Funktion f an, wenn man sich von der Stelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)^\top$ *nur in Richtung der x_1-Koordinate* um die Abweichung Δx_1 wegbewegt. Analog erhält man bei fixiertem $\bar{x}_1$ und der Abweichung Δx_2

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2 + \Delta x_2) \approx f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f(\bar{x}) + \mathrm{d}f_{x_2}(\Delta x_2)$$

mit dem **partiellen Differenzial** nach der Veränderlichen x_2

$$\mathrm{d}f_{x_2}(\Delta x_2) = f_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\Delta x_2 = f_{x_2}(\bar{x})\Delta x_2.$$

Entsprechend ist für eine Funktion f mit n Veränderlichen $x_1, ..., x_n$ das partielle Differenzial nach der Veränderlichen x_i an der Stelle $\bar{x}$

Partielles Differenzial

$$\mathrm{d}f_{x_i} = f_{x_i}(\bar{x})\Delta x_i\,, \;\; \Delta x_i \in \mathbb{R}\,, \;\; i = 1, ..., n\,.$$

Definition 1.20
Totales Differenzial

Sei f eine auf dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ differenzierbare Funktion, $\bar{x} \in D_f$ eine feste Stelle und $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)^\top$ ein reeller Vektor. Die Funktion des Vektors $\Delta x = (\Delta x_1, ..., \Delta x_n)^\top$

$$\mathrm{d}f(\Delta x) = (\operatorname{grad} f(\bar{x}), \Delta x) = f_{x_1}(\bar{x})\Delta x_1 + ... + f_{x_n}(\bar{x})\Delta x_n \tag{1.2}$$

heißt **totales Differenzial** der Funktion f an der Stelle $\bar{x}$.

Näherung von Funktionswerten

Das totale Differenzial $\mathrm{d}f(\Delta x)$ der Funktion f an der Stelle $\bar{x}$ gibt näherungsweise den Zuwachs des Funktionswertes von f an, wenn man sich von der Stelle $\bar{x}$ in eine *beliebige* Richtung mithilfe des Vektors Δx wegbewegt. An der Stelle $x = \bar{x} + \Delta x$ gilt die Näherungsformel

$$f(x) = f(\bar{x} + \Delta x) \approx f(\bar{x}) + \mathrm{d}f(\Delta x). \tag{1.3}$$

Beispiel 1.21

Für die Funktion

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + 10x_1 - x_2^2 + 10x_2 - 40 = -(x_1 - 5)^2 - (x_2 - 5)^2 + 10$$

aus **Beispiel 1.19** mit dem Funktionswert $f(7, 4) = 5$ soll näherungsweise der Funktionswert an den Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ und $(7.2, 4.1)^\top$ mithilfe des totalen Differenzials ermittelt werden.

Es ist $\bar{x} = (7, 4)^\top$, $f_{x_1} = -2x_1 + 10$, $f_{x_2} = -2x_2 + 10$.

An der Stelle $(7.2, 4.3)^\top$ ergibt sich mit $\Delta x = (0.2, 0.3)^\top$ das totale Differenzial
$\mathrm{d}f(0.2, 0.3) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.3 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 = -0.2$.
Als näherungsweiser Funktionswert ergibt sich nach Gleichung (1.3)
$f(7.2, 4.3) \approx f(7, 4) - 0.2 = 5 - 0.2 = 4.8$.
Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.3) = 4.67$.

An der Stelle $(7.2, 4.1)^\top$ ergibt sich analog mit $\Delta x = (0.2, 0.1)^\top$
$\mathrm{d}f(0.2, 0.1) = f_{x_1}(7, 4) \cdot 0.2 + f_{x_2}(7, 4) \cdot 0.1 = (-4) \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = -0.6$.
Damit ist der näherungsweise Funktionswert
$f(7.2, 4.1) \approx f(7, 4) - 0.6 = 5 - 0.6 = 4.4$.
Der genaue Funktionswert ist $f(7.2, 4.1) = 4.35$.

Fehlerrechnung

Wie bereits bei Funktionen einer Veränderlichen finden Differenzial und näherungsweise Funktionswertberechnung auch bei Funktionen mehrerer Veränderlicher Anwendung bei der Fehlerrechnung. Dabei werden anstelle der wahren Werte $x_1, ..., x_n$ jeweils die Näherungswerte $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n$ mit den Toleranzen $\Delta x_1, ..., \Delta x_n \geq 0$ für die Messfehler ermittelt. Bestimmt werden soll der maximal mögliche absolute und relative Fehler bei der Funktionswertermittlung mit den gemessenen Werten.

Absoluter Fehler

Der absolute Fehler ist die Differenz aus dem wahren Funktionswert an der Stelle $x = (x_1, ..., x_n)^\top$ und dem genäherten Funktionswert an der Messstelle $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)^\top$, wobei die wahren Werte im Toleranzbereich liegen: $x_i \in [\bar{x}_i - \Delta x_i, \bar{x}_i + \Delta x_i]$ bzw.

$|x_i - \bar{x}_i| \leq \Delta x_i,\ i = 1, ..., n.$

Mit Gleichung (1.3) folgt für den Betrag des absoluten Fehlers

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\bar{x})| &\approx |\mathrm{d}f(x - \bar{x})| \\ &= |f_{x_1}(\bar{x})(x_1 - \bar{x}_1) + ... + f_{x_n}(\bar{x})(x_n - \bar{x}_n)| \\ &\leq |f_{x_1}(\bar{x})|\, \Delta x_1 + ... + |f_{x_n}(\bar{x})|\, \Delta x_n. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Relativer Fehler

Der relative Fehler ist das Verhältnis des absoluten Fehlers zum Funktionswert. Sein Betrag lässt sich mithilfe von (1.4) abschätzen:

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(x) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right| &\approx \left|\frac{\mathrm{d}f(x - \bar{x})}{f(\bar{x})}\right| \\ &\leq \frac{1}{|f(\bar{x})|} \left(|f_{x_1}(\bar{x})|\, \Delta x_1 + ... + |f_{x_n}(\bar{x})|\, \Delta x_n\right). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Beispiel 1.22

Fehlerrechnung

Mit welchem relativen Fehler kann das Volumen eines zylinderförmigen Turmes mit Kegelspitze (siehe **Bild 1.15**) ermittelt werden, wenn der Grundkreisradius r, die Höhe h des Zylinders und die Höhe h_s der Kegelspitze jeweils mit einem relativen Messfehler nicht größer als 1 % bestimmt wurden?

Das Volumen des zylinderförmigen Turmes mit Kegelspitze beträgt

$$V = V(r, h, h_s) = \pi r^2 \left(h + \frac{1}{3} h_s\right).$$

Mit Gleichung (1.2) erhält man für das totale Differenzial

$$\mathrm{d}V = V_r \Delta r + V_h \Delta h + V_{h_s} \Delta h_s = 2\pi r \left(h + \frac{1}{3} h_s\right) \Delta r + \pi r^2 \Delta h + \frac{1}{3} \pi r^2 \Delta h_s.$$

Für den maximalen relativen Fehler ergibt sich damit aus (1.5)

$$\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{d}V}{V}\right| &= \left|\frac{2}{r}\Delta r + \frac{\Delta h}{h + h_s/3} + \frac{\Delta h_s}{3\,(h + h_s/3)}\right| \\ &= \left|2\,\frac{\Delta r}{r} + \frac{h}{h + h_s/3}\,\frac{\Delta h}{h} + \frac{h_s}{3\,(h + h_s/3)}\,\frac{\Delta h_s}{h_s}\right| \\ &\leq 2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \frac{h}{h + h_s/3}\left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \frac{h_s}{3\,(h + h_s/3)}\left|\frac{\Delta h_s}{h_s}\right| \\ &\leq \left(2 + \frac{h}{h + h_s/3} + \frac{h_s}{3\,(h + h_s/3)}\right) \cdot 1\ \% \ = \ 3\ \%. \end{aligned}$$

Das Volumen kann mit einem maximalen relativen Messfehler von 3 % ermittelt werden.

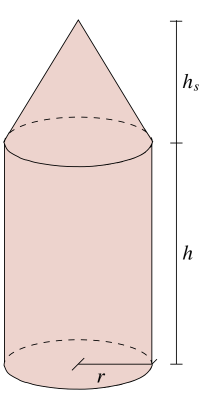


Bild 1.15 Turm mit Kegelspitze

1.4 Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Mit dem Begriff der Umgebung einer Stelle werden lokale und globale Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlicher erklärt. Für differenzierbare Funktionen werden notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz lokaler Extremwerte angegeben. Die Klassifikation kritischer Stellen umfasst auch sogenannte Sattelpunkte, in denen die notwendigen Bedingungen erfüllt sind, aber trotzdem kein lokaler Extremwert vorliegt.

1.4.1 Definition lokaler Extrema

Definition 1.23

Die **Umgebung** $U_r(\bar{x})$ einer Stelle $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Stellen $x \in \mathbb{R}^n$, für die der Abstand zur Stelle $\bar{x}$ kleiner als r ist:

$|\bar{x} - x| < r.$

Umgebung einer Stelle

Beispiel 1.24

Für $n = 1$ ist die Menge $\mathbb{R}$ durch die Zahlengerade darstellbar und $\bar{x}$ durch den entsprechenden Punkt auf ihr. Die Umgebung $U_r(\bar{x})$ ist das Intervall $(\bar{x}-r, \bar{x}+r)$.

Für $n = 2$ ist die Menge $\mathbb{R}^2$ durch eine Ebene darstellbar, $\bar{x}$ durch den entsprechenden Punkt auf ihr und die Umgebung $U_r(\bar{x})$ durch die inneren Punkte des Kreises mit diesem Mittelpunkt und dem Radius r.

Für $n = 3$ ist die Menge $\mathbb{R}^3$ durch den dreidimensionale Raum darstellbar, $\bar{x}$ durch den entsprechenden Punkt darin und die Umgebung $U_r(\bar{x})$ durch die inneren Punkte der Kugel mit diesem Mittelpunkt und dem Radius r.

Definition 1.25

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion f hat an der Stelle $\bar{x} \in D_f$

1. **ein lokales Minimum (Maximum)**, falls es eine Umgebung $U_r(\bar{x})$ gibt, sodass für alle $x \in U_r(\bar{x})$ gilt

   $f(x) \geq f(\bar{x}) \qquad (f(x) \leq f(\bar{x})),$

2. **ein strenges lokales Minimum (Maximum)**, falls es eine Umgebung $U_r(\bar{x})$ gibt, sodass für alle $x \in U_r(\bar{x}) \backslash \{\bar{x}\}$ gilt

   $f(x) > f(\bar{x}) \qquad (f(x) < f(\bar{x})).$

Lokale Extrema

Beispiel 1.26

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (siehe **Beispiel 1.6**, **Bild 1.16**) hat an der Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$ ein strenges lokales Minimum: $f(0,0) = 0$. Für *alle* Stellen $(x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top$ gilt offenbar $f(x_1, x_2) > 0 = f(0,0)$ und damit z. B. auch für alle Stellen von $U_1(\bar{x}) \backslash \{\bar{x}\}$.
2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$ (siehe **Bild 1.17**) hat an der Stelle

$\bar{x} = (0,0)^\top$ ein strenges lokales Maximum: $f(0,0) = 10$. Für *alle* Stellen $(x_1, x_2)^\top \neq (0,0)^\top$ gilt offenbar $f(x_1,x_2) < 10 = f(0,0)$ und damit z. B. auch für alle Stellen der Umgebung $U_1(\bar{x})\backslash\{\bar{x}\}$.

3. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2^2$ (siehe **Bild 1.18**) hat an der Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$ ein lokales Minimum: $f(0,0) = 0$. Für alle Stellen der Umgebung $U_1(\bar{x})$ gilt $f(x_1,x_2) \geq 0 = f(0,0)$, allerdings sind auch für die Stellen $(x_1,0)^\top \in U_1(\bar{x})$ mit $x_1 \neq 0$ die Funktionswerte gleich Null: $f(x_1,0) = 0 = f(0,0)$. Daher ist das Minimum kein strenges.

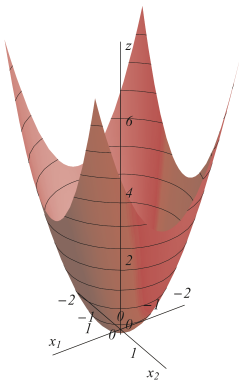


Bild 1.16 $f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$

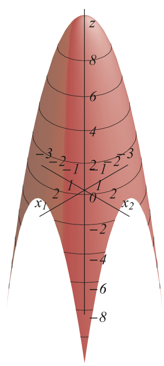


Bild 1.17 $f(x_1,x_2) = 10 - x_1^2 - x_2^2$

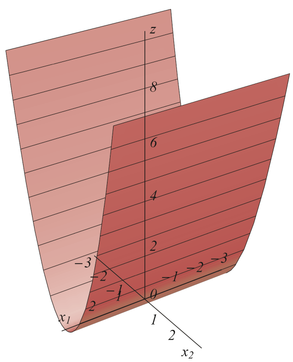


Bild 1.18 $f(x_1,x_2) = x_2^2$

Im folgenden Abschnitt geht es um die Bestimmung lokaler Extrema von *partiell differenzierbaren* Funktionen, obwohl die Definition der lokalen Extrema ohne den Differenzierbarkeitsbegriff auskommt.

1.4.2 Notwendige Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema

Im Fall differenzierbarer Funktionen einer Veränderlichen bedingt ein lokaler Extremwert an der Stelle $\bar{x}$ dort den Anstieg Null. Die Tangente an den Graphen der Funktion verläuft dort parallel zur x-Achse.

Für differenzierbare Funktionen zweier Veränderlicher kann analog geschlussfolgert werden, dass die Tangentialebene an der lokalen Extremstelle $\bar{x}$ an den Graphen der Funktion $f(x_1,x_2)$ horizontal liegen muss, d. h. parallel zur (x_1,x_2)-Ebene ist. Die Tangentialebene wird von den Tangentialvektoren $(1,0,f_{x_1}(\bar{x}))^\top$ und $(0,1,f_{x_2}(\bar{x}))^\top$ aufgespannt (siehe **Abschnitt 1.2**). Die Forderung, dass die Tangentialebene parallel zur (x_1,x_2)-Ebene verläuft, bedeutet, dass die z-Komponenten beider Vektoren gleich Null sein müssen: $f_{x_1}(\bar{x}) = f_{x_2}(\bar{x}) = 0$.

Satz 1.27
Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum

Sei f eine auf $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte und dort differenzierbare Funktion. Hat f an der Stelle $\bar{x} \in D_f$ ein lokales Extremum, so gilt

$$f_{x_i}(\bar{x}) = 0, \; i = 1, ..., n. \tag{1.6}$$

Bemerkung 1.28

1. Stellen $\bar{x}$, für die die Bedingung (1.6) des **Satzes 1.27** erfüllt ist, heißen **kritische Stellen**.
2. Kritische Stellen $\bar{x}$, die keine lokalen Extremwerte liefern, heißen **Sattelpunkte**.

Bedingung für lokale Extrema

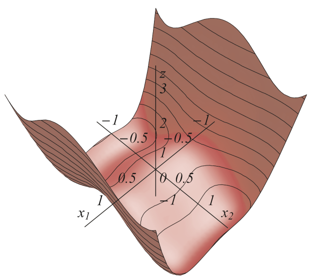


Bild 1.19 $f(x_1,x_2)=2x_1^4+x_2^4-x_1^2-2x_2^2$

Beispiel 1.29

An welchen Stellen kann die Funktion $f(x_1,x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$ (siehe **Bild 1.19**) lokale Extrema haben?

Die notwendigen Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema sind nach (1.6)

$$f_{x_1} = 8x_1^3 - 2x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = 4x_2^3 - 4x_2 = 0.$$

Die erste Gleichung lautet nach Ausklammern $2x_1(2x_1-1)(2x_1+1) = 0$ und hat die drei Lösungen $x_1 = 0, 0.5, -0.5$. Die zweite Gleichung lautet nach Ausklammern $4x_2(x_2-1)(x_2+1) = 0$ und hat die drei Lösungen $x_2 = 0, 1, -1$. Da beide Bedingungen *gleichzeitig* erfüllt sein müssen, ergeben sich folgende neun Stellen als mögliche Stellen lokaler Extrema:

$(0,0)^\top$, $(0,1)^\top$, $(0,-1)^\top$, $(0.5,0)^\top$, $(0.5,1)^\top$, $(0.5,-1)^\top$,
$(-0.5,0)^\top$, $(-0.5,1)^\top$, $(-0.5,-1)^\top$.

Sattelpunkt

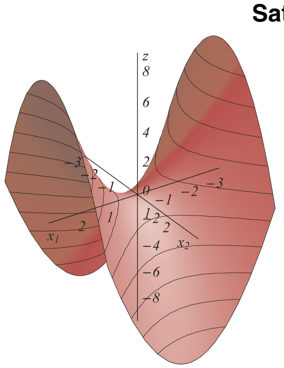


Bild 1.20 $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$

Beispiel 1.30

Die Funktion $f(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2$ hat die kritische Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$, denn die notwendigen Bedingungen

$$f_{x_1} = 2x_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_2} = -2x_2 = 0$$

sind offenbar genau für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ erfüllt. Trotzdem gibt es keine Umgebung der Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$, in der alle Funktionwerte entweder kleiner oder gleich bzw. größer oder gleich $f(0,0) = 0$ wären. Wählt man eine *beliebige* Umgebung $U_r(\bar{x})$, so ist z. B. für alle Stellen $(x_1,0)^\top$ mit $|x_1| < r$ dieser Umgebung $f(x_1,0) = x_1^2 \geq 0$, während für alle Stellen $(0,x_2)^\top$ mit $|x_2| < r$ dieser Umgebung $f(0,x_2) = -x_2^2 \leq 0$ ist. Damit kann die Funktion an der Stelle $\bar{x} = (0,0)^\top$ keinen lokalen Extremwert haben. Die Funktion f ist in **Bild 1.20** dargestellt.

1.4.3 Hinreichende Bedingungen für die Existenz lokaler Extrema

Dafür, dass eine Funktion f an einer kritischen Stelle $\bar{x}$ einen lokalen Extremwert hat, ist es erforderlich, dass die Funktion dort eine einheitliche Krümmung aufweist, d. h. dass sie z. B. in *jede* Richtung, die von $\bar{x}$ wegweist, ansteigt (oder absteigt). Die Krümmung für eine Funktion f zweier Veränderlicher wird charakterisiert mit der folgenden Definition:

Definition 1.31

Eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f ist an der Stelle $\bar{x} \in D_f$ **konvex (konkav)**, wenn dort gilt

$$f_{x_1x_1} \geq \ (\leq)\ 0 \qquad \text{und} \qquad f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} \geq (f_{x_1x_2})^2. \tag{1.7}$$

Sie ist dort **streng konvex (konkav)**, wenn gilt

$$f_{x_1x_1} > \ (<)\ 0 \quad \text{und} \quad f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} > (f_{x_1x_2})^2. \tag{1.8}$$

Beispiel 1.32

Konvexität

1. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ hat an allen Stellen ihres Definitionsbereiches $D_f = \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $f_{x_1x_1} = 2,\ f_{x_2x_2} = 4,\ f_{x_1x_2} = 0$. Sie ist an allen Stellen ihres Definitionsbereiches streng konvex, da die Ungleichungen in (1.8) erfüllt sind.
2. Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2$ hat an allen Stellen ihres Definitionsbereiches $D_f = \mathbb{R}^2$ die partiellen Ableitungen $f_{x_1x_1} = 2,\ f_{x_2x_2} = 0,\ f_{x_1x_2} = 0$. Sie ist an allen Stellen ihres Definitionsbereiches konvex, da (1.7) erfüllt ist. Sie ist *nicht* streng konvex, da die strengen Ungleichungen in (1.8) nicht erfüllt sind.

Satz 1.33

Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum

Die auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f hat an der kritischen Stelle $\bar{x} \in D_f$

1. ein **strenges lokales Minimum (Maximum)**, wenn dort gilt

$$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} > (f_{x_1x_2})^2 \quad \text{und} \quad f_{x_1x_1} > \ (<)\ 0,$$

2. einen **Sattelpunkt**, wenn dort gilt

$$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} < (f_{x_1x_2})^2.$$

Bemerkung 1.34

Im Fall $f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} = (f_{x_1x_2})^2$ kann keine Aussage getroffen werden. f kann ein lokales Extremum oder einen Sattelpunkt haben. Zur Unterscheidung sind andere Untersuchungsmethoden erforderlich, z. B. die direkte Anwendung der **Definition 1.31**.

Beispiel 1.35

Klassifikation kritischer Stellen

Betrachtet wird die Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - 2x_2^2$ aus **Beispiel 1.29**. Ihre zweiten partiellen Ableitungen lauten

$f_{x_1x_1} = 24x_1^2 - 2,\ f_{x_2x_2} = 12x_2^2 - 4,\ f_{x_1x_2} = 0.$

Mit **Satz 1.33** erhält man für die neun kritischen Stellen folgende Klassifikation:

Stelle	$f_{x_1x_1}$	$f_{x_2x_2}$	$f_{x_1x_2}$	$f_{x_1x_1} f_{x_2x_2} \gtreqless (f_{x_1x_2})^2$	Klassifikation
$(0,0)^\top$	-2	-4	0	$>$	lokales Maximum
$(0,1)^\top$	-2	8	0	$<$	Sattelpunkt
$(0,-1)^\top$	-2	8	0	$<$	Sattelpunkt
$(0.5,0)^\top$	4	-4	0	$<$	Sattelpunkt
$(0.5,1)^\top$	4	8	0	$>$	lokales Minimum
$(0.5,-1)^\top$	4	8	0	$>$	lokales Minimum
$(-0.5,0)^\top$	4	-4	0	$<$	Sattelpunkt
$(-0.5,1)^\top$	4	8	0	$>$	lokales Minimum
$(-0.5,-1)^\top$	4	8	0	$>$	lokales Minimum

Verallgemeinerung

Für Funktionen mit mehr als zwei Veränderlichen gelten die folgenden Definitionen und Sätze:

Definition 1.36

Eine auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f ist an der Stelle $x \in D_f$ **streng konvex**, wenn die **Hesse-Matrix**

$$H(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

dort positiv definit ist. Ist die Hesse-Matrix negativ definit, so ist die Funktion f an dieser Stelle **streng konkav**.

Ludwig Otto Hesse
(* 22. April 1811 in Königsberg in Preußen, † 4. August 1874 in München)

deutscher Mathematiker, Professor für Mathematik in Halle, Heidelberg und München, Mitglied der Preußischen (1859) und Bayerischen (1869) Akademie der Wissenschaften, Ehrenmitglied der London Mathematical Society (1871)

Entwicklung der Theorie algebraischer Funktionen und der Theorie der Invarianten, geometrische Interpretation algebraischer Transformationen, Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, Determinanten, Hesse-Matrix

hier: Hesse-Matrix

Da die Hesse-Matrix aufgrund des **Satzes von Schwarz** (1.1) symmetrisch ist, gelten folgende Sätze:

1. Die Hesse-Matrix ist genau dann positiv definit, wenn die folgenden Determinanten der Hauptminoren der Hesse-Matrix

   $$A_1 = \left| f_{x_1x_1} \right|, \; A_2 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{vmatrix}, \; A_3 = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{vmatrix}, \; \ldots,$$

   $$A_n = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & & & \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

   positiv sind:

   $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, \ldots, A_n > 0.$

2. Die Hesse-Matrix ist genau dann negativ definit, wenn die Determinanten ihrer Hauptminoren alternierende Vorzeichen haben, beginnend mit $A_1 < 0$:

   $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, A_4 > 0, \ldots.$

Satz 1.37

Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum

Die auf ihrem Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbare Funktion f hat an der kritischen Stelle $\bar{x} \in D_f$ ein lokales Minimum (Maximum), wenn sie dort streng konvex (konkav) ist.

Bemerkung: Im Fall $n = 2$ ist $A_1 = f_{x_1x_1}$ und $A_2 = f_{x_1x_1}f_{x_2x_2} - (f_{x_1x_2})^2$. Damit ergeben sich aus **Satz 1.37** unmittelbar die hinreichenden Bedingungen für lokale Extremwerte für Funktionen zweier Veränderlicher wie in **Satz 1.33**.

1.5 Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

Die Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher ermöglicht die Berechnung von Flächeninhalten ebener Bereiche. Darauf basierend werden sogenannte Doppelintegrale über ebene Bereiche definiert. Ihre Berechnung wird auf einfache Integrale zurückgeführt. Anwendungen der Doppelintegrale sind z. B. die Bestimmung der Masse und der Momente einer Platte mit inhomogener Dichteverteilung oder die Berechnung bestimmter Volumina. Mit der Integralrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher können Integrale über ebene Kurven ausgewertet werden, wobei Kurvenintegrale 1. und 2. Art unterschieden werden. Anwendungen von Kurvenintegralen 1. Art sind z. B. die Berechnung der Masse und Momente einer Kurve mit inhomogener Dichteverteilung, von Kurvenintegralen 2. Art die Berechnung der Arbeit einer beliebigen Kraft entlang einer Kurve oder der Zirkulation und des Flusses durch eine geschlossene Kurve in der Strömungslehre. Der Satz von Green stellt eine Beziehung zwischen dem Doppelintegral über ein Gebiet und dem Kurvenintegral entlang dessen Randkurve her und kann damit in diesem Fall auch als Methode zur Berechnung von Doppelintegralen benutzt werden. Eine Verallgemeinerung auf räumliche Integrale (Dreifachintegrale) und räumliche Kurvenintegrale kann analog erfolgen.

1.5.1 Integration über ebene Bereiche

Flächeninhalt ebener Bereiche

Definition 1.38

Als **ebener Bereich** wird im Folgenden ein ebenes Gebiet zusammen mit seinem Rand bezeichnet.
Ein **Gebiet** ist eine offene, zusammenhängende, nicht leere Punktmenge.
Eine Punktmenge ist **offen**, wenn es für jeden beliebigen Punkt P aus ihr eine $U_r(P)$-Umgebung gibt, die ebenfalls zur Punktmenge gehört (siehe **Definition 1.23**).
Eine offene Punktmenge ist **zusammenhängend**, wenn es zu beliebigen zwei Punkten P_1 und P_2 aus ihr einen Polygonzug innerhalb dieser Punktmenge gibt, der P_1 und P_2 verbindet.

Sei k eine natürliche Zahl. Durch das Gitter achsparalleler Geraden $x_1 = n2^{-k}$, $x_2 = n2^{-k}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, wird die (x_1, x_2)-Ebene in Quadrate mit der Kantenlänge 2^{-k} und dem Flächeninhalt 2^{-2k} unterteilt (siehe **Bild 1.21**).

Beschränkter ebener Bereich

Sei G ein **beschränkter** ebener Bereich, d. h. es gibt ganze Zahlen a, b, c, d so, dass die Koordinaten (x_1, x_2) eines beliebigen Punktes von G die folgenden Ungleichungen erfüllen:

$$2^{-k}a \leq x_1 \leq 2^{-k}b \qquad \text{und} \qquad 2^{-k}c \leq x_2 \leq 2^{-k}d.$$

Mit $s_k(G)$ wird die Summe der (endlich vielen) Flächeninhalte derjenigen Quadrate bezeichnet, die einschließlich ihres Randes vollständig innnerhalb des Bereiches G liegen. Analog wird mit $S_k(G)$ die Summe der (endlich vielen) Flächeninhalte derjenigen Quadrate bezeichnet, die mindestens einen Punkt von G enthalten (siehe **Bild 1.21**). Offensichtlich gilt

$$s_k(G) \leq S_l(G), \ l = 1, 2, \ldots \qquad \text{und} \qquad s_k(G) \leq s_{k+1}(G), \tag{1.9}$$

d. h. die Folge der Flächeninhalte $s_k(G)$ ist für $k \to \infty$ monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch jeden beliebigen Flächeninhalt $S_l(G)$, $l = 1, 2, \ldots$). Damit hat diese Folge einen Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} s_k(G) = F_i(G). \tag{1.10}$$

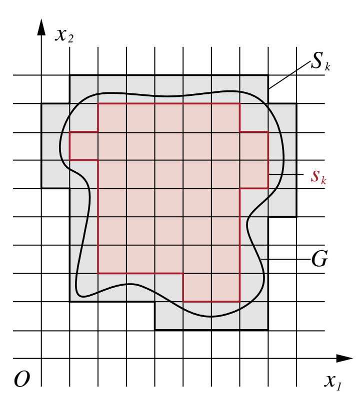


Bild 1.21 Beschränkter Bereich G

Sachwortverzeichnis

Ableitung, 33–35, 45–47, 49, 51, 52, 59–62, 72, 73, 75, 76, 80, 109, 110, 119, 158, 162, 193
    partielle, 15–17, 23, 41–44, 47–49, 192
Abschreibung, 111, 114–116
    -prozentsatz, 112, 113
    arithmetisch degressive, 111, 115, 116
    digitale, 111, 116
    geometrisch degressive, 112, 114
    geometrische, 111
    lineare, 111, 112, 114, 116
Abstand, 12, 13, 20, 81, 94
    -funktion, 211, 212
Additivitat, 27
Anfangswertaufgabe, 46, 48
Annuitat, 99, 104
Arbeit, 35, 36
Axiom von Newton, zweites, 45, 71

Barwert, 86, 87, 107, 108, 118, 120–123, 125–127, 130, 132
Bereich, 25, 27, 30, 32
    1. Art, 28, 29, 31
    2. Art, 28, 29
    beschrankter ebener, 25–28, 37
    ebener, 25, 37
Betrag, 27
Biegelinie, 77–80
Bogenlange, 34, 35
Buchwert, 111, 112, 115, 116

charakteristische Gleichung, 55–59, 75, 77, 79

Definitionsbereich, 9, 10, 15, 20, 22, 24
    naturlicher, 10
Determinante, 24, 61
    Wronski-, 55–57, 61
Differenzial, 17, 18, 33, 35, 36
    Bogen-, 33, 34
    partielles, 17, 18
    totales, 18, 19, 42
Differenzialgleichung, 45, 47, 48, 50, 52, 71, 73, 74, 76, 78, 79
    explizite, 48
    gewohnliche, 47, 49
    hoherer Ordnung, 52
    homogene, 50, 51, 53–55, 57–60
    implizite, 48
    inhomogene, 50, 51, 58–60, 62
    lineare, 50, 53, 60, 61
    Ordnung, 47
    partielle, 47
differenzierbar, 16
    partiell, 15

Doppelintegral, 27, 28, 37

Endwert, 85, 86, 88–90, 94, 107, 120, 123, 125, 127, 129–131
Ereignis, 139, 145, 154, 156, 157, 173
    -feld, 140
    Differenz, 139
    disjunkte, 140, 142, 143, 146, 149, 156
    Elementar-, 140
    komplementares, 139, 142, 144, 154, 157, 158
    Produkt, 139
    sicheres, 139–141, 149, 151
    Summe, 139
    Teil-, 139
    unabhangige, 145, 146, 150, 156, 157
    unmogliches, 139–141, 148, 149, 158
    vollstandiges System, 140
    zufalliges, 138, 144
Erwartungswert, 151–157, 160–162, 165, 172, 176, 187, 190, 195, 196, 198, 199, 204, 206–209
Euler-Gleichung, 56, 58

Fehler, 165
    absoluter, 19, 41, 42
    relativer, 19, 40–42
    zufalliger, 148, 199
Flacheninhalt, 27, 29, 38, 39
Fluss, 36, 37
Folge, 13, 14, 25
    konvergente, 13, 14
Fourier-Ansatz, 55, 56
Fundamentalsystem, 54–57, 60, 61
Funktion, 187
    zweimal stetig differenzierbare, 22–24
    differenzierbare, 16–18, 20, 21, 158
    dreier Veranderlicher, 10
    mehrerer Veranderlicher, 9, 12, 16, 18, 20, 24
    stetige, 14, 27, 32
    zweier Veranderlicher, 9, 10, 21

Gebiet, 25
Gesetz
    Additions-, 142, 146, 149
    Gravitations- von Newton, 10
    Kontinuitats-, 81
    von Darcy, 81
    von Hooke, 71, 78
    von Ohm, 9
    von Torricelli, 73
    Weg-Zeit-, 71
Gradient, 17
Graph, 10, 11, 15, 17, 21, 39, 110, 158, 171, 187
Grenzverteilungssatz, 172–174

Grenzwert, 13–15, 25–27, 96, 122, 123
Grenzwertsatz, 176
Guthaben, 85

Haufigkeit, 178, 179, 182, 184, 211, 212
Hesse-Matrix, 24
Histogramm, 178
Hypothese
 von Bernoulli, 78

imaginare Einheit, 56, 65
Integralsumme, 26, 27, 32
integrierbar, 27
Isolinien, 12, 17

Kapitalverdopplung, 91
kaufmannische Diskontierung, 87
Knickkraft nach Euler, 76, 77
Kombinationen, 137
 mit Wiederholung, 138
 ohne Wiederholung, 137
konkav, 22
 streng, 23, 24
konvex, 22, 23
 streng, 23, 24
kritische Stelle, 22, 191
Kurvenintegral, 32, 33, 37
 1. Art, 32–34
 2. Art, 32, 33, 35, 36

Ladung, 30
Laufzeit, 121, 126, 128, 130, 132
linear
 abhangig, 53
 unabhangig, 53–57, 60, 61
Linearitat, 27
Losung, 48–50, 55, 57
 -kurve, 48–50, 52
 allgemeine, 47, 51, 52, 54, 56–59, 61, 62, 72, 73, 75, 79, 80
 eindeutige, 48, 49, 61
 komplexe, 56, 72, 77
 partikulare, 47, 48, 51, 52, 55–60, 62, 72, 75, 79
 reelle, 57
 singulare, 47, 49, 50

Masse, 30, 31, 34, 35
Maximum
 lokales, 20, 24, 43
 strenges lokales, 20, 21, 23
Maximum-Likelihood-Methode, 190, 191, 212, 218, 219
Minimum
 lokales, 20, 23, 24, 44
 strenges lokales, 20
Mittelwertsatz, 28
Moment, 34, 35, 153, 161
 -methode, 190
 axiales, 30
 empirisches, 184, 190
 empirisches zentrales, 184
 Flachen-, 30, 31, 38–40
 polares, 30
 zentrales, 153, 161
Monotonie, 27

nachschussig, 85, 87–89, 120, 124, 127, 131

Parameterdarstellung, 32, 33, 35, 36
Permutationen, 135
 mit Wiederholung, 136
 ohne Wiederholung, 136
Produkt, 27
Punktmenge
 offene, 25
 zusammenhangende offene, 25

Quantil, 148, 150, 159, 162, 163, 166, 167, 169, 171, 195, 196, 211

Randbedingung, 46, 75–77, 79–81
Randwertaufgabe, 46
Regel
 von Cramer, 61, 62
Rendite, 108
Rente, 120
 arithmetisch wachsende, 129
 arithmetisch wachsende nachschussige, 131
 arithmetisch wachsende vorschussige, 129
 dynamische, 120
 ewige, 120, 122, 123, 126, 128, 130
 geometrisch wachsende, 125
 geometrisch wachsende nachschussige, 127
 geometrisch wachsende vorschussige, 125
 konstante, 120
 konstante nachschussige, 123
 konstante vorschussige, 120
 Zeit-, 120
Resonanzfall, 60
Richtungsfeld, 49, 50, 52
Ruckzahlungsperioden, 102, 103, 105

Sattelpunkt, 22, 23
Satz
 Additions-, 143, 144, 154, 156, 158
 Multiplikations-, 145, 146, 154, 156, 191
 von Green, 37
Schatzung, 190
 Konfidenz-, 194–196, 198, 199, 201, 213
 Punkt-, 190, 193, 216, 219
Schuld
 Anfangs-, 100, 101, 103, 105
 Rest-, 99, 100, 102, 103
Schwerpunkt
 geometrischer, 30, 31, 35
 Massen-, 30, 31, 34, 35
Schwingung, mechanische, 71

Schwingungssystem, 82
Seilkurve, 74, 76
Standardabweichung, 153–157, 188, 208
    empirische, 184
stetig, 158
    an der Stelle, 14
    Funktion, 14
Stichprobe, 177, 178, 183, 185, 186, 189, 192, 193, 196, 203, 204, 206, 210, 215, 218, 220
    -funktion, 186, 194–196, 198, 200, 213
Stromung
    stationare, 81

Test
    χ^2-Anpassungs-, 211, 218
    einseitiger, 203
    zweiseitiger, 203, 205, 206, 210
Tilgung
    Annuitaten-, 99, 100, 102, 103
    Raten-, 99, 103, 104
    Zinsschuld-, 99, 105

Umfang, 153
Umgebung, 20–22

Varianz, 151–157, 160–162, 176, 184, 187, 190, 195, 196, 198, 199, 204, 206–208
    empirische, 183, 187, 197, 200, 215
Variation der Konstanten, 51, 52, 60–62, 75, 79
Variationen, 136
    mit Widerholung, 137
    ohne Widerholung, 136
Variationskoeffizient, 161, 171, 217
    empirischer, 184
Vektorfeld, 32, 33, 36
    stetig differenzierbares, 38
Vermessung, 41
Verteilung, 148, 151, 176, 192, 211, 212, 215, 217
    χ_n^2-, 187, 198
    t_n-, 187, 197
    Binomial-, 153, 172, 174
    diskrete, 150
    Exponential-, 167, 168
    geometrische, 156, 192
    Haufigkeits-, 181, 185
    hypergeometrische, 155, 174
    Neville-, 170, 172, 215
    Normal-, 164, 174, 193, 215
    Poisson-, 157, 168, 172, 218, 219
    Rechteck-, 163, 190
    Standard-Neville-, 170, 216
    Standard-Normal-, 165
    Stichproben-, 188, 189
    Weibull-, 168
Verteilungsdichte, 187
Verteilungsfunktion, 148, 150, 154–157, 161, 163, 164, 167, 168, 170, 174, 177, 186, 189, 194, 196, 198, 201, 203, 206–208, 211
    empirische, 185
    stetige, 160, 162
Verzinsung
    geometrische, 89, 107, 118, 120
    jahrliche, 90
    lineare, 85, 86
    stetige, 96–98
    taggenaue, 93
    unterjahrige, 93, 95, 96
    unterjahrige geometrische, 124
    unterjahrige lineare, 124
    wechselnde, 91
vollkommener Brunnen, 80
Vollstandigkeitsrelation, 151, 152, 160, 178
Volumen, 28, 29
vorschussig, 85, 87–89, 120, 122, 123, 125, 129

Wahrscheinlichkeit, 140–143, 148, 149, 154–158, 166, 168, 172, 173, 177, 188, 189, 191, 194, 195, 203, 204, 212
    -diagramm, 149, 150, 154–157
    bedingte, 144, 145, 169
    Intervall-, 151, 159, 175, 211
    Irrtums-, 194, 196, 197, 199, 203, 205–209, 211–213
    Sicherheits-, 209
    totale, 146, 147
Wasserrinne, 42
Widerstandsmoment, 40

Zinsen, 85, 86, 88, 89, 99, 104, 105, 120
    Haben-, 85
    Soll-, 85
Zinsfaktor, 122, 124, 126, 128, 130, 133
Zinsfus
    interner, 108, 110
Zinsintensitat, 97
    aquivalente, 97
Zinsperiode, 85, 86, 89–94, 99, 107, 108, 125
Zinssatz, 85–87, 89–91, 93, 97, 99, 107, 108, 118, 120, 121, 124, 131
    aquivalenter unterjahriger, 95
    effektiver, 87, 94–97, 118, 119
    Haben-, 119
    Kalkulations-, 107
    Soll-, 119
    unterjahriger, 95
Zirkulation, 36, 37
Zufallsvariable, 147, 148, 154–157, 160, 161, 163, 164, 167, 168, 170, 172, 173, 176, 177, 181, 186, 189, 195, 196, 198, 199, 203, 211, 212, 214, 215, 217, 218
    diskrete, 147, 149–151, 158, 191
    standardisierte, 161
    stetige, 147, 158, 159, 162