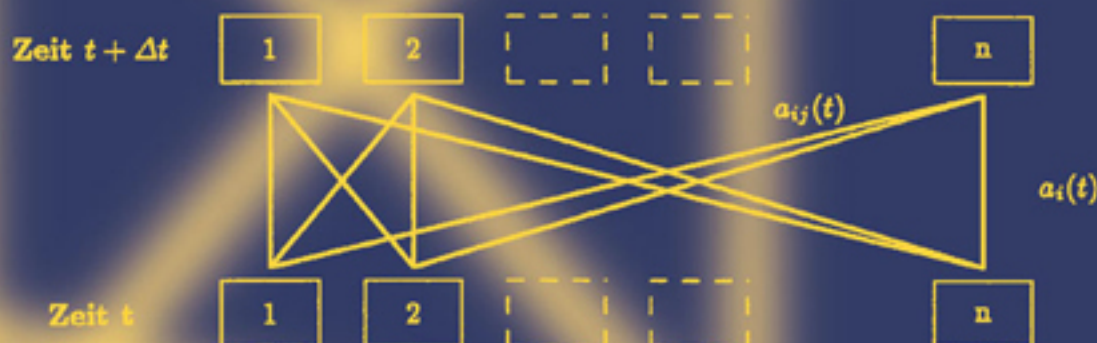


# Michael Koller

# Stochastische Modelle in der Lebensversicherung



2., aktualisierte Auflage

 Springer

# Springer-Lehrbuch



Michael Koller

# Stochastische Modelle in der Lebensversicherung

2. Auflage

 Springer

Prof. Dr. Michael Koller  
AVIVA Plc  
St Helen's, 1 Undershaft  
EC3P 3DQ London  
United Kingdom  
mikoller@ethz.ch

Zusätzliches Material zu diesem Buch kann von <http://extra.springer.com> heruntergeladen werden.

ISSN 0937-7433  
ISBN 978-3-642-11251-5 e-ISBN 978-3-642-11252-2  
DOI 10.1007/978-3-642-11252-2  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 60G35, 62J20, 60J10, 60J27, 60J65, 60K30, 60J70

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

*Für Luisa, Giulia und Anna*



# Vorwort

Das vorliegende Buch entstand aus einer Vorlesung über Versicherungsmathematik, welche ich im Sommersemester 1995 an der ETH Zürich gehalten habe. Es soll dem Leser moderne Methoden der Lebensversicherungsmathematik nahelegen, welche dann in der Praxis angewendet werden können.

Dieses Buch richtet sich somit sowohl an den fortgeschrittenen Studenten wie auch an Versicherungsmathematiker aus der Praxis und versucht, die Brücke zwischen Theorie und Praxis zu schlagen. Um dieses Ziel zu erreichen, werden die benötigten theoretischen Hilfsmittel zur Verfügung gestellt und die relevanten Sätze bewiesen. Damit sich die Theorie in die Praxis übertragen lässt, werden sowohl das diskrete als auch das zeitstetige Markovmodell betrachtet. Ersteres führt zu einfacheren Beweisen und lässt sich eins zu eins in die Praxis übertragen. Das zeitstetige Modell wird verwendet, um die Realität genauer abzubilden. Zudem zeichnet sich diese Theorie durch ihre mathematischen Aussagen aus, welche einen tiefen Einblick in das Wesen der Lebensversicherungsmathematik ermöglichen.

Um die Theorie besser in die Praxis umsetzen zu können, ist das Buch mit vielen Beispielen versehen, so dass der Leser die Methoden selber anwenden kann. Für die Beispiele wurde Microsoft Excel verwendet. So ist es möglich, dass der Praktiker die Problemstellungen in der Sprache der Markovmodelle formulieren und lösen kann. Um das Verständnis zu vertiefen, findet der Leser ebenfalls viele Übungen, welche sowohl theoretischer als auch praktischer Natur sind.

Das Buch behandelt neben der Modellierung klassischer Lebensversicherungsdeckungen mit Markovketten auch die Berechnung höherer Momente und Verteilungsfunktionen von Deckungskapitalien. In den späteren Kapiteln des Buches werden fondsgebundene Lebensversicherungstypen und die Anwendung stochastischer Zinsmodelle in der Lebensversicherung betrachtet. Hierbei ist besonders auf die Behandlung von ganzen Versicherungsportefeuilles hinzuweisen. Mit Aussagen über Portefeuilles kann die Risikoexposition des Lebensversicherers gemessen werden. Das Buch endet mit einem Kapitel



über die technische Analyse. Hier werden sowohl die klassischen Konzepte wie Spar- und Risikoprämien als auch modernere Konzepte wie das Profit-Testing und die Berechnung des Embedded Value behandelt. Es ist an dieser Stelle zu erwähnen, dass einige Resultate dieses Buches über die Berechnung der Barwerte von Portefeuilles und des Embedded Value mit Hilfe eines Markovmodells erstmals in schriftlicher Form veröffentlicht werden.

Ich möchte an dieser Stelle auch die Gelegenheit wahrnehmen, verschiedenen Personen zu danken. Hierbei wären vor allem viele meiner Kollegen zu nennen, welche Vorversionen dieses Buches gelesen und den einen oder anderen Tippfehler gefunden haben. Meinen besonderen Dank möchte ich gerne an die Professoren Hans Bühlmann und Josef Kupper und die Drs. Angelika May, Klemens Binswanger und Hans-Jörg Furrer richten. Zudem möchte ich auch meinem Arbeitgeber der Rentenanstalt/Swiss Life und Herrn Professor Paul Embrechts für die Unterstützung danken.

Herrliberg, im November 1999

*Michael Koller*

Inzwischen sind zehn Jahre vergangen und die Welt ist nicht stehen geblieben. Das Ziel der vorliegenden zweiten Auflage dieses Buches ist es auf der einen Seite die Fehler zu eliminieren, welche in den letzten Jahren gefunden wurden und das Buch entsprechend den Entwicklungen anzupassen. Hierbei ist vor allem Solvency 2 zu erwähnen. Die hier anzuwendenden Bewertungsmethoden stützen sich auf eine marktnahe Bewertung. In der Folge habe ich die entsprechenden Konzepte deutlicher im Buch dargestellt. Ich möchte an dieser Stelle die Gelegenheit wahrnehmen speziell meiner Ehefrau und meinen beiden Kindern zu danken, welche mich all diese Jahre begleitet und unterstützt haben. Zudem all meinen Kollegen bei den verschiedenen Arbeitgebern (Swiss Life, Swiss Re, Partner Re und Aviva) von welchen ich viel lernen konnte.

Herrliberg, im November 2009

*Michael Koller*

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Ein allgemeines Lebensversicherungsmodell</b> .....	1
1.1 Einleitung und Fragestellung .....	1
1.2 Beispiele .....	2
1.2.1 Lebensversicherungstypen .....	2
1.2.2 Finanzierungsarten .....	5
1.3 Das Versicherungsmodell .....	5
<b>2. Stochastische Prozesse</b> .....	9
2.1 Definitionen .....	9
2.2 Markovketten mit abzählbarem Zustandsraum .....	13
2.3 Kolmogorovsche Differentialgleichungen .....	17
2.4 Beispiele .....	21
<b>3. Der Zins</b> .....	25
3.1 Einleitung .....	25
3.2 Definitionen .....	25
3.3 Arten der Betrachtungsweise für den Zinsprozess .....	27
3.4 Der Zins als stochastische Variable .....	31
3.4.1 Diskrete Zinsmodelle .....	31
3.4.2 Stetige Zinsmodelle .....	32
<b>4. Zahlungsströme und das Deckungskapital</b> .....	35
4.1 Einleitung und Fragestellung .....	35
4.2 Beispiele .....	35
4.3 Grunddaten .....	36

4.4	Deterministische Zahlungsströme .....	41
4.5	Zufällige Zahlungsströme .....	44
4.6	Deckungskapitalien .....	46
4.7	Rekursionsformeln für die Reserven .....	51
4.8	Berechnung der nötigen Einmaleinlagen .....	53
<b>5.</b>	<b>Differenzen- und Differentialgleichungen .....</b>	<b>61</b>
5.1	Einleitung .....	61
5.2	Die Thieleschen Differentialgleichungen.....	61
5.3	Beispiele zur Thieleschen Differentialgleichung.....	64
5.4	Differentialgleichungen für die höheren Momente .....	68
5.5	Die Verteilungsfunktion des Deckungskapitals .....	76
<b>6.</b>	<b>Beispiele und Probleme aus der Praxis .....</b>	<b>81</b>
6.1	Einleitung .....	81
6.2	Unterjährige Zahlungen .....	81
6.3	Garantierte Renten .....	83
6.4	Rückgewähr .....	85
6.5	Kapitalversicherungen mit stochastischem Zins .....	88
6.6	Invaliditätsversicherungen .....	90
<b>7.</b>	<b>Das Hattendorffsche Theorem .....</b>	<b>95</b>
7.1	Einleitung .....	95
7.2	Die allgemeine Form von Hattendorffs Theorem .....	95
7.3	Hattendorffs Theorem für das Markovmodell.....	98
<b>8.</b>	<b>Fondsgebundene Policen .....</b>	<b>103</b>
8.1	Einleitung .....	103
8.2	Preissysteme .....	105
8.2.1	Definitionen .....	106
8.2.2	Arbitrage .....	109
8.2.3	Stetiger Fall .....	113
8.3	Das ökonomische Modell .....	115

8.4	Die Berechnung der nötigen Einmaleinlagen . . . . .	118
8.4.1	Erlebensfallversicherung . . . . .	118
8.4.2	Todesfallversicherung . . . . .	120
8.5	Die Thielesche Differentialgleichung . . . . .	120
<b>9.</b>	<b>Versicherungen mit stochastischem Zins . . . . .</b>	<b>125</b>
9.1	Einleitung . . . . .	125
9.2	Das Vasicek-Modell . . . . .	125
9.3	Portfeuillebetrachtungen . . . . .	127
9.4	Ein Modell für die Zinsstruktur . . . . .	136
9.5	Die Thielesche Differentialgleichung . . . . .	139
<b>10.</b>	<b>Technische Analyse . . . . .</b>	<b>143</b>
10.1	Klassische technische Analyse . . . . .	143
10.2	Profit-Testing . . . . .	145
10.3	Embedded Value . . . . .	147
10.3.1	Zustandsraum . . . . .	148
10.3.2	Diskontierungsfunktionen . . . . .	149
10.3.3	Definition der Vertragsfunktionen . . . . .	149
10.3.4	Beispiele . . . . .	150
<b>A.</b>	<b>Hinweise zur Theorie der stochastischen Integration . . . . .</b>	<b>157</b>
A.1	Stochastische Prozesse und Martingale . . . . .	157
A.2	Stochastische Integrale . . . . .	159
A.3	Eigenschaften des stochastischen Integrals . . . . .	163
<b>B.</b>	<b>Beispiele . . . . .</b>	<b>169</b>
B.1	Inhalt . . . . .	169
B.1.1	Verzeichnis von C:/markov . . . . .	169
B.1.2	Verzeichnis von C:/markov/alters . . . . .	169
B.1.3	Verzeichnis von C:/markov/gemischt . . . . .	170
B.1.4	Verzeichnis von C:/markov/inval . . . . .	170
B.2	Installation . . . . .	170

<b>C. Sterbewahrscheinlichkeiten Deutschland</b> .....	173
<b>D. Sterbewahrscheinlichkeiten Schweiz</b> .....	177
<b>E. Programm-Code für Markov Berechnung in Java</b> .....	181
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	185
<b>Notation</b> .....	189
<b>Index</b> .....	193

# 1. Ein allgemeines Lebensversicherungsmodell

## 1.1 Einleitung und Fragestellung

Betrachtet man die angebotenen Lebensversicherungsprodukte, stellt man unschwer fest, dass sich diese Produkte durch eine grosse Reichhaltigkeit auszeichnen. Die Unterschiede zwischen den einzelnen Produkten sind für den Laien nur schwer feststellbar. Dies hängt damit zusammen, dass die Lebensversicherungsindustrie eigentlich abstrakte Werte verkauft.

Man kann eine Lebensversicherung immer als Wette auffassen; je nach dem Ausgang dieser Wette bekommt man eine Leistung oder man bezahlt die Versicherungsprämie ohne Gegenleistung der Versicherungsgesellschaft. Aus diesem Sichtwinkel heraus kann man die Lebensversicherungsmathematik als einen Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachten.

Da eine Lebensversicherung sich immer mit geldwerten Leistungen und Prämien befasst, ist sie auch ein Teil des Finanzmarktes und der Ökonomie. In diesem Zusammenhang ist besonders herauszuheben, dass Versicherungstypen, die Leistungen versprechen, welche sich an einem Fonds messen, auch die moderne Finanzmarkttheorie verwenden.

Aus dem Sichtwinkel des Juristen ist eine Lebensversicherung ein mehrseitiger Vertrag, in welchem sich der Versicherungsnehmer und der Versicherer gegenseitig verpflichten.

Wie wir oben gesehen haben, zeichnen sich Versicherungen einerseits durch ihr abstraktes Wesen und andererseits durch ihre Vielfalt aus. Da etwas Abstraktes versprochen wird, ist der Preis einer Versicherung nicht intuitiv klar. Im Gegensatz zu einem Laib Brot kaufen wir vielleicht ein- bis zweimal in unserem Leben eine Lebensversicherung.

Der Charakter einer Lebensversicherung — und hier spreche ich vor allem für die Einzelversicherung — ist durch ein sehr langfristiges Vertragsverhältnis gekennzeichnet. Denken wir zum Beispiel an einen 30jährigen Mann, welcher sich eine Altersrente kauft und nehmen wir weiter an, dass er im neunzigsten Altersjahr stirbt: In diesem Falle beträgt die Vertragsdauer 60 Jahre.

Bedingt durch die Langfristigkeit der Verträge und die dabei eingegangenen Risiken – ich denke hier z.B. an sich ändernde Grundlagen – ist es nötig, den Preis der Versicherung sorgfältig und vorausschauend zu bestimmen.

In diesem Kapitel wollen wir einerseits die klassischen Versicherungstypen kennenlernen und gleichzeitig ein allgemeines Versicherungsmodell vorstellen, mit welchem ein Grossteil der angebotenen Versicherungen tarifiert werden kann.

## 1.2 Beispiele

Als Erstes wollen wir die wichtigsten Typen und Finanzierungsarten, welche in der Lebensversicherungsindustrie Anwendung finden, beschreiben:

### 1.2.1 Lebensversicherungstypen

Das Charakteristikum einer jeden Lebensversicherung ist die Tatsache, dass das versicherte Ereignis eng mit dem Gesundheitszustand des Versicherten verbunden ist. Man unterscheidet zwischen den folgenden grundlegenden Typen:

- Versicherungen auf das Leben oder den Tod,
- Erwerbsunfähigkeitsversicherungen,
- Krankenversicherungen.

Für die Versicherungen auf das Leben oder den Tod ist die charakteristische Eigenschaft der versicherten Person, ob sie zu einem bestimmten Zeitpunkt noch am Leben oder aber tot ist. Es kann weiter nach der Todesursache unterschieden werden. (z.B. eine Todesfallversicherung, welche nur bei Unfalltod fällig wird.) Zu der Familie der Todes- und Erlebensfallversicherungen gehören insbesondere die verschiedenen Typen von Alters- und Hinterbliebenenrenten.

Bei den Erwerbsunfähigkeitsversicherungen ist das entscheidende Kriterium die Frage, ob die versicherte Person zu einem bestimmten Zeitpunkt invalid ist. Eine Besonderheit der Erwerbsunfähigkeitsversicherung ist die Tatsache, dass der Versicherungsnehmer auch nur teilweise (z.B. zu 50%) invalid sein kann.

Bei den Krankenversicherungen hängt die Auszahlung einer Leistung vom Gesundheitszustand ab. Zu dieser Kategorie der Lebensversicherung gehören neben den klassischen Produkten, auch modernere Typen wie Long Term