Leseprobe aus:

Ian Stewart

Unglaubliche Zahlen

Mehr Informationen zum Buch finden Sie auf rowohlt.de.

Ian Stewart

UNGLAUBLICHE ZAHLEN

Aus dem Englischen von
Monika Niehaus und Bernd Schuh

Rowohlt Taschenbuch Verlag

Deutsche Erstausgabe
Veröffentlicht im Rowohlt Taschenbuch Verlag,
Reinbek bei Hamburg, Juli 2016

Die englische Originalausgabe erschien 2015 bei
W. W. Profile Books Ltd., London, unter dem Titel
«Professor Stewart's Incredible Numbers»

Redaktion Heiner Höfener
Umschlaggestaltung ZERO Werbeagentur, München,
nach der Originalausgabe von Profile Books, Gestaltung Steve Panton
Innentypografie Daniel Sauthoff
Satz Minion PostScript (InDesign) bei
Pinkuin Satz und Datentechnik, Berlin
Druck und Bindung CPI books GmbH, Leck, Germany
ISBN 978 3 499 63153 5

INHALT

Vorwort

Zahlen haben mich schon immer fasziniert. Schon lange vor Schulbeginn brachte mir meine Mutter Lesen und Rechnen bei. Als ich schließlich nach meinem ersten Schultag nach Hause kam, soll ich mich angeblich beklagt haben, dass wir «gar nicht *gelernt*» hätten! Ich hege den Verdacht, dass meine Eltern mich auf diesen schwierigen Tag vorbereitet hatten, indem sie mir erzählten, dass ich in der Schule eine Menge interessanter Dinge lernen würde, und ich hatte mir ihre Propaganda ein wenig zu sehr zu Herzen genommen. Aber bald erfuhr ich vieles über Planeten und Dinosaurier und den Bau von Gipstieren. Und mehr über Zahlen.

Zahlen üben noch immer einen Zauber auf mich aus, und noch immer lerne ich mehr über sie. Nun weise ich stets darauf hin, dass es in der Mathematik um vieles geht, nicht nur um Zahlen; beispielsweise geht es auch um Formen, Muster und Wahrscheinlichkeiten – aber Zahlen ziehen sich wie ein roter Faden durch das ganze Thema. Und jede Zahl ist einzigartig, ein Individuum. Einige spezielle Zahlen ragen aus der Menge der übrigen hervor und spielen offenbar in verschiedenen Gebieten der Mathematik eine zentrale Rolle. Die bekannteste dieser Superzahlen ist wohl π (Pi), auf die wir zunächst im Zusammenhang mit Kreisen stoßen, doch sie zeigt eine bemerkenswerte Tendenz, plötzlich bei Problemen aufzutauchen, die offenbar überhaupt nichts mit Kreisen zu tun haben.

Die meisten Zahlen können keine derartige Prominenz für sich beanspruchen, doch selbst bei der bescheidensten Zahl lässt sich in der Regel irgendein ungewöhnliches Merkmal finden. In *Per Anhalter durch die Galaxis* ist die Zahl 42 die Antwort auf die große Frage «nach dem Leben, dem Universum und dem ganzen Rest». Douglas Adams erklärte, er habe diese Zahl gewählt, weil eine kurze Umfrage unter seinen Freunden erbracht habe, dass sie total langweilig ist. Tatsächlich stimmt das nicht, wie wir im letzten Kapitel noch sehen werden.

Die Gliederung des Buches richtet sich nach den Zahlen selbst, wenn auch nicht immer in numerischer Reihenfolge. Ebenso wie die Kapitel [1], [2], [3] und so weiter gibt es ein Kapitel [0], ein Kapitel [42], ein Kapitel [−1] und ein Kapitel [$\frac{22}{7}$], ein Kapitel [π], ein Kapitel [43 252 003 274 489 856 000] und ein Kapitel [$\sqrt{2}$]. Ganz klar schaffte eine ganze Menge potenzieller Kapitel nicht den Sprung vom Zahlenstrahl ins Buch. Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen Zusammenfassung der Hauptthemen, die darin behandelt werden. Machen Sie sich keine Sorgen, wenn Ihnen die Zusammenfassung gelegentlich kryptisch erscheint oder wenn darin pauschale Behauptungen ohne jeden Beweis aufgestellt werden: All das wird sich klären, wenn Sie weiterlesen.

Der Aufbau ist einfach: Jedes Kapitel konzentriert sich auf eine interessante Zahl und erklärt, *warum* sie interessant ist. So ist 2 beispielsweise interessant, weil sich die Unterscheidung zwischen gerade und ungerade durch die ganze Mathematik und Naturwissenschaft zieht, 43 252 003 274 489 856 000 ist interessant, weil es genau so viele Möglichkeiten gibt, Rubiks Würfel neu anzuordnen.

Da 42 ein eigenes Kapitel hat, muss sie ebenfalls interessant sein. Nun, zumindest ein *bisschen.*

An dieser Stelle muss ich Arlo Guthries Song *Alice's Restaurant Massacree* erwähnen, eine skurrile musikalische Geschichte, die ausführlich, mit vielen Wiederholungen und in voller Länge von illegaler Müllentsorgung am Straßenrand erzählt. Nach zehn Minuten unterbricht Guthrie sein Lied plötzlich und erklärt: «Aber darüber wollte ich eigentlich gar nicht mit euch sprechen.» Schließlich stellt sich heraus, dass er eben doch genau darüber sprechen wollte, der Müll jedoch Teil einer größeren Geschichte ist. Es ist Zeit für meinen Arlo-Guthrie-Moment: In Wirklichkeit geht es in diesem Buch *gar nicht* um Zahlen.

Die Zahlen dienen als Einstieg, ein Tor, durch das wir in die erstaunliche Welt der Mathematik eintauchen können, die mit ihnen verknüpft ist. *Jede Zahl ist etwas Besonderes.* Wenn man sie als Individuen schätzen lernt, sind sie wie alte Freunde. Jede hat ihre eigene Geschichte zu erzählen. Oft führt diese Geschichte zu einer Menge anderer Zahlen, doch was wirklich zählt, ist die Mathematik, die sie miteinander verknüpft. Die Zahlen sind die Schauspieler in einem Schauspiel, und das eigentlich Wichtige dabei ist das Schauspiel selbst. Aber es gibt kein Drama ohne Schauspieler.

Um dem Buch eine gewisse Struktur zu geben, habe ich es je nach Art der behandelten Zahlen in Abschnitte unterteilt: kleine ganze Zahlen, Brüche, reelle Zahlen, komplexe Zahlen, Unendlichkeit … Von einigen unvermeidlichen Ausnahmen abgesehen, folgt die Entwicklung des Stoffes einer logischen Reihenfolge, sodass frühere Kapitel die Grundlage für spätere bilden, selbst wenn es um ein völlig anderes Thema geht. Dieser Aufbau beeinflusst die Reihenfolge, in der die Zahlen abgehandelt werden, und erfordert ein paar Kompromisse. Das gilt in besonderem Maße für die komplexen Zahlen. Sie kommen sehr früh ins Spiel, weil ich sie brauche, um einige Eigenschaften besser vertrauter Zahlen zu diskutieren. Desgleichen taucht gelegentlich irgendwo Mathematik für Fortgeschrittene auf, weil es die einzig vernünftige Stelle ist, um ein solches Thema zu erwähnen. Wenn Sie auf eine dieser Stellen stoßen und sie schwierig finden, überspringen Sie sie und lesen Sie einfach weiter; Sie können später darauf zurückkommen.

Zahlen sind wirklich unglaublich – nicht in dem Sinne, dass man nichts von dem glauben könnte, was man über sie erfährt, sondern im positiven Sinne: Sie haben definitiv einen Wow-Faktor. Und den kann man erleben, ohne zu rechnen. Man kann verstehen, wie sich Zahlen historisch entwickelt haben, die Schönheit ihrer Muster würdigen, herausfinden, wie sie benutzt werden und über Überraschungen staunen: «Ich hätte nie gedacht, dass 56 so interessant ist!» Aber das ist sie. Wirklich!

Und das gilt auch für all die anderen. Einschließlich 42.

Zahlen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … Was könnte einfacher sein als das? Und doch sind es Zahlen, die der Menschheit vielleicht mehr als alles andere geholfen haben, von den Bäumen herabzusteigen und nach den Sternen zu greifen.

Individuelle Zahlen weisen ihre eigenen typischen Merkmale auf und eröffnen uns den Zugang zu einer Vielzahl mathematischer Themengebiete. Bevor wir sie jedoch eine nach der unteren genauer unter die Lupe nehmen, lohnt sich ein rascher Blick auf drei große Fragen: Wie sind Zahlen entstanden? Wie hat sich das Zahlenkonzept entwickelt? Und was *sind* Zahlen eigentlich?

Die Entstehung der Zahlen

Vor rund 35 000 Jahren, in der Jungsteinzeit, ritzte ein unbekanntes menschliches Wesen 29 Kerben in das Wadenbein (Fibula) eines Pavians. Dieser Knochen wurde in einer Höhle in den Lebombo-Bergen in Swasiland gefunden und wird dementsprechend als Lebombo-Knochen bezeichnet. Vermutlich handelt es sich um einen Zählstab («Kerbholz»): ein Artefakt, das Zahlen als eine Reihe von Einkerbungen festhält: |, ||, ||| und so weiter. Ein Mondmonat umfasst 29,5 Tage, daher könnte es sich um einen primitiven Mondkalender – oder um die Aufzeichnung des weiblichen Menstruationszyklus – handeln. Oder um eine zufällige Sammlung von Kerben, was das angeht. Eine Art Knochenkritzelei.

Im Jahr 1937 fand Karl Absolon in der damaligen Tschechoslowakei einen weiteren Zählstab, einen Wolfsknochen mit 55 Kerben. Dieser Knochen ist rund 30 000 Jahre alt.

Nicht lange danach (1960) entdeckte der belgische Geologe Jean de Heinzelin de Braucourt zwischen den Überresten einer winzigen Fischersiedlung, die von einem Vulkanausbruch verschüttet worden war, das eingekerbte Wadenbein eines Pavians. Die Siedlung befand sich dort, wo sich heute Ishango befindet, an der kongolesisch-ugandischen Grenze. Der Knochen ist rund 20 000 Jahre alt.

Die einfachste Interpretation ist auch in diesem Fall, dass der Ishango-Knochen als Zählstab gebraucht wurde. Einige Anthropologen gehen einen Schritt weiter und meinen Elemente einer arithmetischen Struktur zu erkennen, wie Multiplikation, Division und Primzahlen; andere glauben, es handele sich um einen sechsmonatigen Mondkalender, und noch andere sind überzeugt, die Kerben seien nur angebracht worden, um einen sicheren Griff an einem Knochenwerkzeug zu garantieren und hätten keinerlei mathematische Bedeutung.

Abbildung 1: Vorder- und Rückseite des Ishango-Knochens im belgischen Museum für Naturwissenschaften in Brüssel.

Die ganze Sache bietet Stoff für reizvolle Spekulationen. Auf dem Knochen finden sich drei Reihen von Kerben. Die Kerben in der mittleren Reihe sind in Gruppen von 3, 6, 4, 8, 10, 5 und 7 Strichen angeordnet. Zweimal 3 ist 6, zweimal 4 ist 8 und zweimal 5 ist 10; die Reihenfolge des letzten Paares ist jedoch vertauscht, und 7 passt überhaupt nicht ins Muster. Die Reihe links weist 11, 13, 17 und 19 Kerben auf: die Primzahlen zwischen 10 und 20. Die Reihe rechts liefert die ungeraden Zahlen 11, 21, 19 und 9. Die Reihe der Kerben auf der linken Seite addiert sich wie diejenige auf der rechten Seite zu 60.

Ein Problem bei der Deutung derartiger Muster ist, dass es schwerfällt, in einer beliebigen Reihe kleiner Zahlen *kein* Muster zu finden. Beispielsweise sind in Tabelle 1 die Flächen von zehn Inseln auf den Bahamas aufgelistet, nämlich Nummer 11 bis 20, was ihre Gesamtgröße angeht. Um die Liste zu mischen, habe ich die Inseln alphabetisch sortiert. Ich versichere Ihnen: Das war mein erster Versuch. Zugegeben, ich hätte diese Liste durch eine andere ersetzt, wenn ich damit nicht hätte zeigen können, was ich zeigen wollte – aber es funktionierte, und so bin ich dabei geblieben.

Name	**Fläche in Quadratmeilen**
Berry	12
Bimini	9
Crooked Island	93
Little Inagua	49
Mayaguana	110
New Providence	80
Ragged Island	14
Rum Cay	30
Samana Cay	15
San Salvador Island	63

Tabelle 1

Was fällt uns bei diesem «Zahlenmuster» auf? Es gibt eine ganze Menge kurzer Folgen mit gemeinsamen Merkmalen:

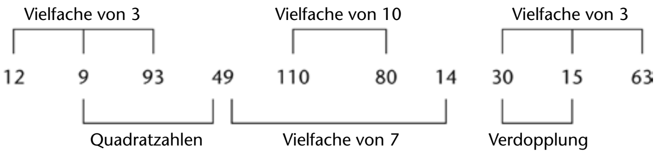

Abbildung 2: Einige offensichtliche Muster in den Flächen der Bahama-Inseln.

Zunächst einmal ist die ganze Liste wundervoll symmetrisch. An beiden Enden findet sich ein Tripel von Vielfachen von 3. In der Mitte steht ein Paar Vielfache von 10, das zwei Vielfache von 7 trennt. Zudem treten zwei Quadrate auf, $9 = 3^2$ und $49 = 7^2$ – beides Quadrate von *Primzahlen.* Ein weiteres benachbartes Paar besteht aus 15 und 30, eine Zahl die Verdopplung der anderen. In der Folge 9–93–49 weisen alle Zahlen die Ziffer 9 auf. Die Zahlen werden abwechselnd größer und kleiner, mit Ausnahme von 110–80–14. Oh, und ist Ihnen aufgefallen, dass *keine* dieser zehn Zahlen eine Primzahl ist?

Genug gesagt. Ein weiteres Problem mit dem Ishango-Knochen ist, dass praktisch keine Möglichkeit besteht, an zusätzliche Informationen zu gelangen, die eine dieser Interpretationen stützen könnten. Die Einkerbungen auf dem Knochen sind jedoch zweifellos faszinierend. Das sind Zahlenrätsel immer. Daher wollen wir uns ein weniger umstrittenes Beispiel ansehen.

Vor rund 10 000 Jahren benutzten Menschen im Nahen Osten Tonfiguren, sogenannte Tokens (Zählsteine), um Zahlen wiederzugeben, vielleicht zum Zweck der Besteuerung oder als Eigentumsbeleg. Die ältesten Beispiele stammen aus Tepe Asiab und Ganj-i-Dareh Tepe, zwei Örtlichkeiten im iranischen Zagros-Gebirge. Die Tokens waren kleine, unterschiedlich geformte Tonklumpen, von denen einige symbolische Markierungen trugen. Eine mit + gekennzeichnete Kugel symbolisierte ein Schaf, siebe solche Tokens sieben Schafe. Um nicht allzu viele Tokens herstellen zu müssen, stand ein anderer Typ Token für 10 Schafe. Ein wiederum anderer Typ repräsentierte 10 Ziegen, und so weiter. Die Archäologin Denise Schmandt-Besserat erkannte, dass die Tokens für die Grundnahrungsmittel der damaligen Zeit standen: Getreide, Tiere, Ölkrüge.

Um 4000 v. Chr. wurden die Tokens wie Perlen auf eine Schnur gezogen. Da es jedoch leicht war, die Zahlen durch Hinzufügen oder Wegnehmen von Tokens zu verändern, kam es zur Einführung von Sicherheitsmaßnahmen. Die Tokens wurden in Ton gewickelt, der anschließend gebacken wurde. Ein Streit über Zahlen ließ sich jederzeit lösen, indem man die Tonhülle aufbrach. Um unnötige Scherben zu vermeiden, schrieben die Bürokraten im alten Mesopotamien ab 3500 v. Chr. Symbole auf die Hülle, die die darin enthaltenen Tokens auflisteten.

Irgendwann erkannte ein heller Kopf, dass die Symbole die Tokens überflüssig machten. Das Ergebnis war ein System geschrie-

Abbildung 3: Gesiegelte Tonbulle und Zählsteine, Uruk-Periode, aus Susa.

bener Zahlensymbole, das den Weg für alle folgenden Systeme zur Zahlennotation und möglicherweise auch für die Schrift ebnete.

In diesem Buch geht es nicht primär um Geschichte, daher werde ich auf spätere Notationssysteme zu sprechen kommen, wenn sie im Zusammenhang mit speziellen Zahlen auftauchen. Beispielsweise beschäftigt sich Kapitel 10 mit antiken und modernen Dezimalschreibweisen. Wie der große Mathematiker Carl Friedrich Gauß jedoch einmal bemerkte, zählen nicht Schreibweisen, sondern Ideen. Die sich anschließenden Themen ergeben mehr Sinn, wenn man sie im Kontext des sich wandelnden Zahlenkonzepts der Menschheit betrachtet. Daher werden wir mit einem kurzen Ausflug durch die wichtigsten Zahlensysteme und einige wichtige Fachbegriffe beginnen.

Das ständig wachsende Zahlensystem

Wir neigen dazu, Zahlen als etwas Festes und Unwandelbares anzusehen: als ein Merkmal der natürlichen Welt. Tatsächlich handelt es sich jedoch um menschliche Erfindungen – wenn auch zugegebenermaßen um sehr nützliche, denn sie symbolisieren wichtige Aspekte der Natur. Zum Beispiel, wie viele Schafe jemand besitzt oder wie alt das Universum ist. Die Natur überrascht uns immer wieder, indem sie uns vor neue Fragen stellt, deren Beantwortung manchmal neue mathematische Konzepte verlangt. Manchmal gibt die innere Logik der Mathematik einen Hinweis auf neue, potenziell nützliche Strukturen. Und von Zeit zu Zeit haben diese Hinweise und Probleme Mathematiker dazu veranlasst, das Zahlensystem zu erweitern und neue Arten von Zahlen zu erfinden.

Wir haben gesehen, dass Zahlen zunächst entwickelt und gebraucht wurden, um Dinge zu zählen. In der Frühzeit der griechischen Antike startete die Liste der Zahlen mit 2, 3, 4 und so weiter: 1 war etwas Besonderes, keine «richtige» Zahl. Später, als diese

Übereinkunft wirklich dumm auszusehen begann, wurde auch 1 in den Rang einer echten Zahl erhoben.

Der nächste große Schritt vorwärts bei der Erweiterung des Zahlensystems bestand in der Einführung von Brüchen. Brüche sind von Nutzen, wenn man eine Ware unter mehreren Leuten verteilen möchte. Wenn drei Leute zwei Scheffel Getreide gleichmäßig unter sich aufteilen wollen, erhält jeder $\frac{2}{3}$ eines Scheffels.

Abbildung 4: *Links*: Ägyptische Hieroglyphen für $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. Mitte: Wadjet-Auge. *Rechts*: Davon abgeleitete Hieroglyphen für Brüche.

Die alten Ägypter stellten Brüche auf dreierlei Weise dar. Sie hatten spezielle Hieroglyphen für $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$. Zudem benutzten sie verschiedene Teile des Horus- oder Wadjet-Auges, um 1, geteilt durch die ersten sechs Potenzen von 2, darzustellen. Und schließlich entwickelten sie Symbole für andere Stammbrüche, bei denen eine 1 im Zähler, aber eine beliebige natürliche Zahl im Nenner steht, beispielsweise $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ und so weiter. Alle anderen Brüche drückten sie als Summe verschiedener Stammbrüche aus, zum Beispiel:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Wir wissen nicht, warum sie nicht $\frac{2}{3}$ als $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ schrieben, aber sie taten es einfach nicht.

Die Zahl null wurde erst viel später eingeführt, wahrscheinlich, weil man sie zunächst einfach nicht brauchte. Wenn man keine Schafe hat, muss man sie auch nicht zählen oder auflisten. Null wurde zunächst als Symbol verwandt und nicht als richtige Zahl angesehen. Als aber (siehe Kapitel [−1]) chinesische und hinduistische Mathematiker negative Zahlen einführten, musste man auch 0 als Zahl betrachten. Beispielsweise ist $1 + (-1) = 0$, und die Summe von zwei Zahlen kann sicherlich nichts anderes als ebenfalls eine Zahl sein.

Mathematiker bezeichnen das System der Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

als *natürliche Zahlen*, und wenn wir negative Zahlen mit einbeziehen, erhalten wir die *ganzen Zahlen*

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Brüche, Null und negative Zahlen bilden gemeinsam die *rationalen Zahlen.*

Eine Zahl ist *positiv*, wenn sie größer ist als null, und *negativ*, wenn sie kleiner ist als null. Daher fällt jede Zahl (sei es eine ganze Zahl oder eine rationale Zahl) in genau eine dieser drei Kategorien: positiv, negativ oder null.

Die Zählzahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

sind die positiven ganzen Zahlen. Diese Übereinkunft führt zu einer recht holprigen Terminologie: Die natürlichen Zahlen

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$$

werden häufig als *nichtnegative ganze Zahlen* bezeichnet. Tut mir leid.

Lange Zeit kam das Zahlenkonzept über Brüche nicht hinaus. Die alten Griechen bewiesen jedoch, dass das Quadrat eines Bruches niemals genau gleich 2 sein kann. Später wurde dies als «die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational» ausgedrückt, das heißt, $\sqrt{2}$ ist nicht rational. Die Griechen formulierten diesen Sachverhalt etwas umständlicher, aber sie wussten, dass $\sqrt{2}$ existieren musste: Dem Satz des Pythagoras zufolge entspricht sie der Länge der Diagonalen eines Quadrats mit der Seite 1. Daher werden weitere Zahlen gebraucht; mit rationalen allein kommen wir nicht aus. Die Griechen fanden eine komplizierte geometrische Methode, um irrationale Zahlen zu handhaben, doch diese Methode war nicht völlig zufriedenstellend.

Der nächste Schritt in Richtung auf ein modernes Zahlenkonzept wurde durch die Einführung des Dezimalkommas (,) bzw. im angelsächsischen Raum des Dezimalpunktes (.) und die Dezimalschreibweise möglich. Dadurch ließen sich irrationale Zahlen mit sehr hoher Genauigkeit darstellen. Beispielsweise ist

$$\sqrt{2} \sim 1{,}4142135623$$

auf zehn Dezimalstellen korrekt (hier und im übrigen Text bedeutet das Proportionalzeichen ~ «ist annähernd gleich»). Dieser Ausdruck ist nicht exakt: Sein Quadrat beträgt tatsächlich

$$1{,}99999999979325598129$$

Eine bessere Näherung, auf 20 Dezimalstellen korrekt, ist

$$\sqrt{2} \sim 1{,}41421356237309504880$$

aber auch sie ist nicht völlig exakt. Man kann eine unendlich lange Dezimalentwicklung jedoch tatsächlich logisch exakt begründen. Natürlich lassen sich solche Ausdrücke nie vollständig ausschreiben, aber man kann die Idee dahinter skizzieren, sodass sie sinnvoll sind.

Dezimalzahlen mit unendlich vielen Stellen (einschließlich solcher, die aufhören, die man sich aber durch unendlich viele Nullen fortgesetzt vorstellen kann), werden als *reelle Zahlen* bezeichnet, teilweise deshalb, weil sie direkt mit Messungen von Parametern in der realen Welt wie Länge oder Gewicht korrespondieren. Je präziser die Messung, desto mehr Dezimalstellen benötigt man; um einen exakten Wert zu erhalten, braucht man unendlich viele. Es klingt vielleicht paradox, dass «reell» durch ein unendliches Symbol definiert ist, das sich nicht vollständig ausschreiben lässt. Negative reelle Zahlen sind ebenfalls erlaubt.

Bis zum Anbruch des 18. Jahrhunderts wurden keine weiteren mathematischen Konzepte als echte Zahlen betrachtet. Doch schon im 15. Jahrhundert fragten sich einige Mathematiker, ob es womöglich einen neuen Zahlentyp gab: die Quadratwurzel aus –1: Das heißt eine Zahl, die, mit sich selbst multipliziert, –1 ergibt. Auf den ersten Blick scheint das eine verrückte Idee zu sein, denn das Quadrat einer jeden reellen Zahl ist positiv oder null. Wie sich herausstellte, handelte es sich jedoch um eine gute Idee, die –1 mit einer Quadratwurzel zu versehen. Leonhard Euler führte dafür schließlich das Symbol i ein. Das ist der Anfangsbuchstabe von «imaginär» (englisch imaginary, französisch imaginaire, lateinisch imaginarius), und diese Zahl wurde so benannt, um sie von den guten alten reellen Zahlen zu unterscheiden. Leider führte dies zu einer Menge unnötigem Mystizismus – Gottfried Leibniz bezeichnete i einst als «Amphibium zwischen Sein und Nichtsein» –, was eine Schlüsseltatsache verschleierte, nämlich: Sowohl reelle als auch imaginäre

Zahlen haben genau denselben logischen Status. Beide sind Kinder unseres Geistes, menschliche Konzepte, die die Realität abbilden, aber nicht selbst real sind.

Die Existenz von i ist notwendig, um eine ganze Reihe anderer neuer Zahlen einzuführen, die man braucht, um zu rechnen – Zahlen wie 2 + 3i. Diese Zahlen heißen *komplexe Zahlen*, und sie haben sich in den letzten Jahrhunderten in Mathematik und Naturwissenschaften als unverzichtbar erwiesen. Diese seltsame, aber zutreffende Tatsache ist den meisten Menschen neu, denn in der Schulmathematik trifft man nur selten auf komplexe Zahlen. Nicht etwa, weil sie unwichtig wären, sondern weil die dahinter stehenden Vorstellungen zu komplex und die Anwendungen für die Schule zu fortgeschritten sind.

Für die wichtigsten Zahlensysteme benutzen Mathematiker Phantasiesymbole. Ich werde diese Symbole nicht wieder benutzen, doch Sie sollten sie zumindest einmal gesehen haben:

$\mathbb{N}$ = die Menge aller natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Z}$ = die Menge aller ganzen Zahlen –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …
$\mathbb{Q}$ = die Menge aller rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$ = die Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{C}$ = die Menge aller komplexen Zahlen

Diese Systeme passen ineinander wie russische Puppen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

wobei das mengentheoretische Symbol $\subset$ bedeutet «ist enthalten in». Machen Sie sich klar, dass jede ganze Zahl auch rational ist; zum Beispiel entspricht die ganze Zahl 3 auch dem Bruch $\frac{3}{1}$. Wir schreiben sie gewöhnlich nicht so, aber beide Schreibweisen entsprechen derselben Zahl. Ebenso ist jede rationale Zahl auch reell, und jede reelle Zahl ist auch komplex. Ältere Systeme werden in neuere inkorporiert, nicht von ihnen ersetzt.

Selbst die komplexen Zahlen stehen nicht am Ende der Erweiterung des Zahlensystems, das Mathematiker im Laufe vieler Jahrhunderte aufgebaut haben. So gibt es zum Beispiel Quaternionen $\mathbb{H}$ und Oktonionen $\mathbb{O}$ (siehe Kapitel [4]). Es ist jedoch nützlicher, diese Zahlen algebraisch statt arithmetisch zu betrachten. Daher will ich mit der Erwähnung einer paradoxeren Zahl schließen – Unendlich. Philosophisch unterscheidet sich Unendlich von den konventionellen Zahlen und gehört nicht zu einem der Standard-Zahlensysteme von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen. Dennoch lungerte sie an den Rändern herum, zahlenartig, aber doch keine Zahl im eigentlichen Sinn. Bis Georg Cantor unseren Ausgangspunkt, Zählen, neu bestimmte und nicht nur zeigte, dass Unendlich eine Zahl im Sinn von Zählen ist, sondern auch, dass es Unendlichkeiten *unterschiedlicher Größe* gibt. Dazu gehören $\aleph_0$, die «Anzahl» oder «Mächtigkeit» der natürlichen Zahlen, und $\mathfrak{c}$, die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Welche größer ist. Um *wie viel* größer, darüber wird gestritten, denn das hängt davon ab, welches Axiomensystem man zur Formalisierung der Mathematik benutzt.

Aber lassen wir diese Probleme erst einmal beiseite, bis wir genügend intuitives Verständnis für gewöhnlichere Zahlen gewonnen haben. Was mich zu meiner dritten Frage bringt.

Was ist eigentlich eine Zahl?

Das klingt nach einer einfachen Frage, und das ist sie auch. Aber die Antwort ist nicht so einfach.

Wir alle wissen, wie man Zahlen gebraucht. Wir alle wissen, wie sieben Kühe oder sieben Schafe oder sieben Stühle aussehen. Wir alle können bis sieben zählen. Aber was ist sieben?

Es ist nicht das Symbol 7. Das ist willkürlich gewählt und sieht je nach Kultur anders aus. Im Arabischen sieht die Sieben so aus: ٧, im Chinesischen hingegen so: 七 oder in formeller Schreibweise so: 柒.

Es ist auch nicht das deutsche Wort «sieben». Im Französischen heißt es sept, im Englischen seven.

Um die Mitte des 19. Jahrhunderts erkannten ein paar logisch denkende Mathematiker, dass zwar alle Welt seit Jahrtausenden unbekümmert mit Zahlen hantiert, aber niemand wusste, um was es sich dabei eigentlich handelt. Daher sprachen sie die Frage aus, die niemals hätte gestellt werden dürfen: Was *ist* eine Zahl?

Die Frage ist schwieriger zu beantworten, als es auf den ersten Blick scheinen mag. Eine Zahl ist kein Ding, das man jemand anderem in der realen Welt zeigen kann. Es ist eine Abstraktion, ein geistiges Konzept, das sich von der Realität ableitet, aber nicht wirklich *real* ist.

Das klingt vielleicht verwirrend, gilt aber nicht nur für Zahlen. Ein vertrautes Beispiel ist «Geld». Wir alle wissen, wie man etwas bezahlt und Wechselgeld zurückbekommt, und wir tun dies – das nehmen wir zumindest an –, indem wir Geld austauschen. Daher stellen wir uns Geld als die Münzen und Geldscheine in unserer Brieftasche oder unserem Portemonnaie vor. Aber so einfach ist die Sache nicht. Wenn wir eine Kreditkarte benutzen, wechseln weder Münzen noch Scheine von einer Hand in die andere. Vielmehr wandern elektronische Signale durch das Telefonsystem zur Kreditkartengesellschaft und weiter zu unserer Bank, und die Zahlen auf mehreren Bankkonten – unserem, dem des Geschäfts, des Kreditkartenunternehmens – verändern sich. Eine britische 5-Pfund-Note trug früher die Aufschrift «Ich verspreche, dem Besitzer bei Vorlage die Summe von fünf Pfund zu zahlen». Es handelt sich also nicht um Geld, sondern um ein Versprechen, Geld zu zahlen.

Vor langer Zeit konnten Sie mit einer solchen Banknote zur Bank gehen und sie gegen Gold eintauschen, was als echtes Geld angesehen wurde. Heutzutage tut die Bank nicht mehr, als sie gegen eine andere 5-Pfund-Note einzutauschen. Aber auch Gold war eigentlich kein richtiges Geld, sondern lediglich dessen physische Manifestation. Das wird schon dadurch bewiesen, dass der Goldpreis schwankt.

Ist Geld also eine Zahl? Ja, aber innerhalb eines ganz bestimmten juristischen Kontextes. Wenn Sie 1 000 000 Euro auf ein Stück Papier schreiben, werden Sie dadurch noch lange nicht zum Millionär. Was Geld zu *Geld* macht, ist eine Reihe von gesellschaftlichen Übereinkünften, was Zahlen auf Zahlungsmitteln bedeuten und wie wir sie gegen Güter oder andere Zahlungsmittel eintauschen. Wichtig ist, was wir mit Zahlungsmitteln tun, nicht, was sie sind. Geld ist eine Abstraktion.

Dasselbe gilt für Zahlen. Aber das reicht als Antwort nicht aus, denn die *gesamte* Mathematik besteht aus Abstraktionen. Daher fragten sich ein paar Mathematiker, welche Art von Abstraktion den Begriff «Zahl» definieren könne. Im Jahr 1884 veröffentlichte der deutsche Mathematiker Gottlob Frege sein Buch *Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, in dem er die fundamentalen Prinzipien formulierte, auf denen Zahlen basieren. Zehn Jahre später ging er einen Schritt weiter und versuchte, diese Prinzipien aus noch grundlegenderen Gesetzen der Logik abzuleiten. Sein Werk *Grundgesetze der Arithmetik* wurde in zwei Bänden veröffentlicht, der erste 1893 und der zweite 1903.

Frege begann mit dem Zählprozess und konzentrierte sich nicht auf die Zahlen, die wir gebrauchen, sondern auf die Dinge, die wir zählen. Wenn ich sieben Tassen auf einen Tisch stelle und sie «1, 2, 3, 4, 5, 6, 7» abzähle, sieht es so aus, als seien die wichtigen Objekte die Zahlen. Frege war anderer Meinung: Er konzentrierte sich auf die Tassen. Zählen funktioniert, weil wir eine Sammlung von Tassen haben, die wir zählen wollen. Bei einer anderen Sammlung könnten wir zu einem anderen Ergebnis kommen. Frege nannte diese Sammlungen *Klassen*. Wenn wir zählen, wie viele Tassen diese bestimmte Klasse enthält, stellen wir eine Übereinstimmung, eine *Korrespondenz* zwischen der Klasse der Tassen und den Zahlensymbolen 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 her.

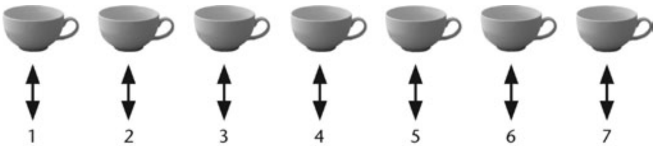

Abbildung 5: Korrespondenz zwischen Tassen und Zahlensymbol.

Das Gleiche gilt für eine Klasse von Untertassen: Auch dort können wir eine entsprechende Übereinstimmung herstellen:

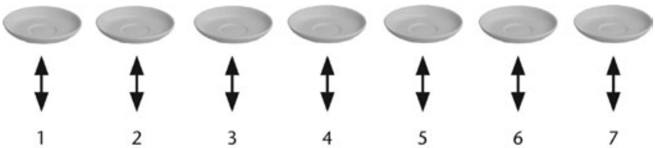

Abbildung 6: Korrespondenz zwischen Untertassen und Zahlensymbol.

Wenn das der Fall ist, können wir daraus den Schluss ziehen, dass die Klasse der Untertassen dieselbe Anzahl von Untertassen enthält, wie die Klasse der Tassen Tassen enthält. Wir wissen sogar, wie viele: sieben.

Das mag so offensichtlich erscheinen, dass es schon ans Banale grenzt, doch Frege erkannte, dass uns dies etwas durchaus Tiefgründiges und Wichtiges sagt: Auf diese Weise können wir nämlich zeigen, dass die Klasse der Untertassen dieselbe Anzahl Untertassen enthält, wie die Klasse der Tassen Tassen enthält, *ohne* die Symbole 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7 zu verwenden und ohne zu wissen, um wie viele Tassen oder Untertassen es sich handelt. Es genügt, eine Korrespondenz zwischen der Klasse der Tassen und der Klasse der Untertassen herzustellen:

Abbildung 7: Eine Korrespondenz zwischen Tassen und Untertassen benötigt keine Zahlensymbole.

Fachsprachlich wird eine derartige Korrespondenz als eineindeutige Zuordnung bezeichnet: Auf jede Tasse kommt genau eine Untertasse, auf jede Untertasse genau eine Tasse. Zählen funktioniert nicht, wenn man Tassen übersieht oder dieselbe Tasse mehrmals zählt. Nennen wir es einfach eine Korrespondenz, während wir diese technische Bedingung im Hinterkopf behalten.

Frege kam zu dem Schluss, die Zuordnung von Klassen mit Hilfe einer Korrespondenz bilde den Kern dessen, was wir mit «Zahl» meinen. Indem man zählt, wie viele Objekte eine Klasse enthält, ordnet man diese Klasse einer Standardklasse zu, deren Vertreter durch konventionelle Symbole wie 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und so weiter symbolisiert werden, je nachdem, welcher Kultur Sie angehören. Frege war jedoch der Meinung, das Zahlenkonzept sollte unabhängig von der Kultur sein, daher entwickelte er einen Weg, der ihm erlaubte, ganz auf willkürliche Symbole zu verzichten. Genauer gesagt erfand er ein universelles Supersymbol, das für jede Kultur identisch war. Dabei handelte es sich jedoch nicht um etwas, das sich niederschreiben ließ: Es war rein gedanklich.