



Walter Dürr, Horst Mayer

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

ISBN (Buch): 978-3-446-45162-9

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-45162-9>

sowie im Buchhandel.

Dürr • Mayer
**Wahrscheinlichkeitsrechnung und
Schließende Statistik**

Walter Dürr / Horst Mayer

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

8., aktualisierte Auflage

mit 49 Abbildungen, 127 Beispielen, 121 Aufgaben
und Kontrollfragen sowie einem Glossar

HANSER

Autoren

Prof. Dr. Walter Dürr
Fachhochschule Dortmund

Prof. Dr. Horst Mayer (†)
Fachhochschule Darmstadt



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-45162-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2017 Carl Hanser Verlag München
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Mirja Werner
Herstellung: Katrin Wulst
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Binden: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort der Autoren

Statistische Methoden sind heute in vielen Bereichen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Naturwissenschaftler, Ingenieure, Psychologen, Soziologen, Wirtschaftswissenschaftler u. v. a. wenden statistische Methoden in Wissenschaft und Praxis an. Eine Grundausbildung umfasst in der Regel die Gebiete Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik. Über gewisse Vorkenntnisse aus der Beschreibenden Statistik sollten Leserinnen und Leser verfügen.

Das vorliegende Buch beschränkt sich bewusst auf Sach- und Lehrinhalte, deren Vermittlung im Rahmen einer Grundausbildung ohne weiteres möglich ist. Lernziele, viele Beispiele, Aufgaben und Kontrollfragen einschließlich deren Lösungen sowie ein Glossar der wichtigsten Inhalte und Begriffe sollen den Lernprozess unterstützen.

Das Buch wendet sich an Studierende von Fachhochschulen, Gesamthochschulen und Universitäten, aber auch an Praktiker, die in ihrer beruflichen Tätigkeit Einsatzmöglichkeiten für statistische Methoden sehen.

Dortmund/Darmstadt, Mai 1980

Walter Dürr Horst Mayer

Vorwort zur 8. Auflage

Das Buch wurde auch für die 8. Auflage kritisch durchgesehen, Hinweise von Lesern und Studierenden sind von den Autoren dankbar aufgegriffen worden. Für die satztechnische Unterstützung und seine sachkundigen Beiträge sind die Autoren Herrn Dipl.-Betriebswirt Markus Hinners zu besonderem Dank verpflichtet.

Das Buch bewährt sich nunmehr seit vielen Jahren in der Lehrpraxis, konzeptionelle und inhaltliche Änderungen wurden daher nicht vorgenommen. Auch moderne Systeme zur Datenanalyse und Statistik sowie Managementkonzepte, die man häufig mit Begriffen wie DATA MINING und DATA WAREHOUSE sowie RISIKOMANAGEMENT und RISIKOCONTROLLING verbindet, enthalten immer auch Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wie hier dargestellt.

Dortmund/Darmstadt, April 2017

Walter Dürr Horst Mayer

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	11
1 Einleitung und Arbeitshinweise	13
1.1 Zur geschichtlichen Entwicklung und zu den Begriffen Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik	13
1.2 Zu diesem Buch	15

Teil I: Wahrscheinlichkeitsrechnung

2 Grundbegriffe	18
2.1 Lernziele	18
2.2 Subjektive, mathematische und statistische Wahrscheinlichkeit	18
2.3 Zufallsexperimente	20
2.4 Ergebnismenge und Ereignisse	21
2.5 Stabilisierung der relativen Häufigkeiten	26
2.6 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie	29
2.7 Laplace-Experimente	31
2.8 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit	33
Aufgaben und Kontrollfragen	39
3 Kombinatorik	41
3.1 Lernziele	41
3.2 Einführende Beispiele	41
3.3 Die Symbole $n!$ und $\binom{n}{k}$	42
3.4 Permutationen von n Elementen.	46
3.5 Kombinationen k -ter Ordnung von n Elementen	47
3.6 Das Urnenmodell	51
Aufgaben und Kontrollfragen	53

4	Zufallsvariable	54
4.1	Lernziele	54
4.2	Allgemeine Bemerkungen	54
4.3	Diskrete Verteilungen. Wahrscheinlichkeitsfunktion.	56
4.4	Stetige Verteilung. Dichtefunktion	60
4.5	Verteilungsfunktion	61
4.6	Erwartungswert und Varianz	66
4.7	Symmetrische Verteilungen	70
	Aufgaben und Kontrollfragen	72
5	Spezielle diskrete Verteilungen	73
5.1	Lernziele	73
5.2	Diskrete Gleichverteilung	73
5.3	Binomialverteilung	74
5.4	Hypergeometrische Verteilung	78
5.5	Poissonverteilung	80
	Aufgaben und Kontrollfragen	83
6	Normalverteilung	84
6.1	Lernziele	84
6.2	Allgemeine Normalverteilung	84
6.3	Standardnormalverteilung	86
6.4	Zentraler Grenzwertsatz	91
	Aufgaben und Kontrollfragen	92
7	Testverteilungen	93
7.1	Lernziele	93
7.2	Allgemeine Bemerkungen	93
7.3	χ^2 -Verteilung	94
7.4	F-Verteilung	95
7.5	Student-Verteilung	96
	Aufgaben und Kontrollfragen	97

8	Approximation von Verteilungen	98
8.1	Lernziele	98
8.2	Allgemeine Bemerkungen	98
8.3	Approximation von diskreten Verteilungen	99
8.4	Approximation von Testverteilungen	101
	Aufgaben und Kontrollfragen	103

Teil II: Schließende Statistik

9	Einführung in die Stichprobentheorie	106
9.1	Lernziele	106
9.2	Aufgaben und Vorteile von Stichprobenuntersuchungen	106
9.3	Methoden zur Gewinnung von Stichproben	108
9.3.1	Der Begriff der Zufallsstichprobe	108
9.3.2	Die einfache Zufallsstichprobe	110
9.3.3	Geschichtete Stichproben	111
9.3.4	Die Klumpenstichprobe	112
9.3.5	Systematische Stichprobenverfahren	113
9.3.6	Die mehrstufige Stichprobe	114
9.4	Stichprobenfunktionen und ihre Wahrscheinlichkeitsverteilungen	114
	Aufgaben und Kontrollfragen	123

10	Schätzverfahren	125
10.1	Lernziele	125
10.2	Schätzfunktionen und Punktschätzungen	125
10.3	Intervallschätzungen	130
10.3.1	Vertrauensintervalle für den Mittelwert μ einer Normalverteilung	131
10.3.2	Vertrauensintervalle für Anteilswerte	139
10.3.3	Vertrauensintervalle für die Varianz σ^2 einer Normalverteilung	142
10.3.4	Die Berechnung des notwendigen Stichprobenumfangs	144
10.3.5	Ergänzungen zur Konstruktion von Vertrauensintervallen	146
	Aufgaben und Kontrollfragen	149

11	Testverfahren	152
11.1	Lernziele	152
11.2	Einführung zur statistischen Testtheorie	152
11.3	Die Vorgehensweise beim Testen von Hypothesen	156
11.4	Fehlermöglichkeiten beim Testen	160
11.5	Parametertests	164
11.5.1	Tests für den Mittelwert μ einer Normalverteilung	164
11.5.2	Tests für einen Anteilswert p	169
11.5.3	Differenzentests für Mittelwerte von Normalverteilungen	172
11.6	Verteilungstests	180
11.7	Unabhängigkeitstests	186
11.8	Rang- und Zeichentests	192
	Aufgaben und Kontrollfragen	199
	Tabellenanhang	203
	Lösungen der Aufgaben und Kontrollfragen	227
	Glossar	252
	Literaturverzeichnis	268
	Stichwortverzeichnis	270

2 Grundbegriffe

2.1 Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel durchgearbeitet haben, sollten Sie

- die Begriffe subjektive, mathematische und statistische Wahrscheinlichkeit sowie die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Umgangssprache gegeneinander abgrenzen und Beispiele aus Ihrem Erfahrungsbereich angeben können;
- die Eigenschaften eines Zufallsexperiments kennen und Beispiele für Zufallsexperimente aus Ihrem Erfahrungsbereich angeben können;
- die Begriffe Ergebnismenge, Elementarereignis, Ereignis und die daraus abgeleiteten Begriffe definieren und anwenden können;
- die Erfahrungstatsache der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten interpretieren und experimentell nachprüfen können;
- die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie und die einfachen Folgerungen aus den Axiomen kennen;
- beurteilen können, ob es sich bei einem konkreten Zufallsexperiment um ein Laplace-Experiment handelt, und die Berechnungsformel für Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten anwenden können;
- die Begriffe "bedingte Wahrscheinlichkeit" und "stochastische Unabhängigkeit" definieren und die entsprechenden Formeln anwenden können;
- die Produktformel verstehen und anwenden können.

2.2 Subjektive, mathematische und statistische Wahrscheinlichkeit

In der Umgangssprache werden die Begriffe "**Wahrscheinlichkeit**" und "**wahrscheinlich**" sehr häufig angewendet, um Aussagen über Sachverhalte zu machen, über die man sich nicht sicher ist. So findet man in der Umgangssprache Sätze folgender Art:

1. Wahrscheinlich ist Klaus glücklich verheiratet.
2. Wahrscheinlich gewinnt Borussia Dortmund ihr nächstes Heimspiel.
3. Wahrscheinlich bestehe ich die nächste Klausur in Statistik.

Eine inhaltliche Präzisierung des Begriffs "Wahrscheinlichkeit" aufgrund solcher Formulierungen und eine zahlenmäßige Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit ist vielfach nicht möglich. Wahrscheinlichkeitsaussagen im umgangssprachlichen Sinn sind nicht Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie und sie werden daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

In den folgenden Sätzen hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff schon einen konkreteren Inhalt:

1. Die Geschäftsleitung schätzt die Wahrscheinlichkeit für eine Umsatzerhöhung im laufenden Jahr gegenüber dem Vorjahr auf 90% ein.
2. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, beträgt $1/6$.
3. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Zwillingsgeburt beträgt $1/82$.

Zu 1.:

Bei Wahrscheinlichkeitsaussagen dieser Art handelt es sich **um subjektive Wahrscheinlichkeiten**. Das Wort "wahrscheinlich" bringt hier eine subjektive Einschätzung zum Ausdruck, die nicht bzw. nicht ausschließlich mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie oder der Schließenden Statistik belegt wird. Auch Wahrscheinlichkeitsaussagen dieser Art sind vielfach nicht Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zu 2.:

Diese Aussage gründet sich auf die Symmetrieeigenschaft des Würfels und der daraus folgenden Gleichwahrscheinlichkeit der verschiedenen Augenzahlen. Die Wahrscheinlichkeiten sind mathematisch berechenbar und man spricht daher von **mathematischer Wahrscheinlichkeit**.

Zu 3.:

Der angegebene Wert für die Wahrscheinlichkeit ist eine Schätzung, die das Ergebnis der Auswertung von umfangreichem Beobachtungsmaterial ist und eine Näherung für den unbekanntem wahren Wert darstellt. Hier liegt ein Beispiel einer **statistischen Wahrscheinlichkeit** vor. Der analoge Begriff aus der Beschreibenden Statistik ist "relative Häufigkeit". Diese grundlegende Analogie geht in viele der nachfolgenden Ausführungen ein. Es sei verwiesen auf die Kapitel 2.5, 2.6 und 10 und hier insbesondere 10.3.2.

Insbesondere Aussagen, in denen mathematische oder statistische Wahrscheinlichkeiten Verwendung finden, sind Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie und Schließenden Statistik. Hierbei handelt es sich um Wahrscheinlichkeiten, die von allen Menschen bei gleicher Kenntnislage gleich hoch eingeschätzt werden. Mathematische und statistische Wahrscheinlichkeiten nennt man auch **objektive Wahrscheinlichkeiten**.

2.3 Zufallsexperimente

Das Werfen eines Würfels kann man als Beispiel einer Klasse von Experimenten ansehen, die man **Zufallsexperimente** nennt. Der Begriff "Wahrscheinlichkeit" wird im Folgenden stets im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten verwendet.

Definition 2.1

Ein Experiment heißt **Zufallsexperiment**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Experiment wird nach einer **genau festgelegten Vorschrift** durchgeführt.
2. Das Experiment kann unter den gleichen Bedingungen **beliebig oft wiederholt** werden.
3. Es sind **mehrere Ergebnisse** des Experiments möglich. Sämtliche überhaupt möglichen Ergebnisse des Experiments können vor Durchführung des Experiments angegeben oder zumindest abgeschätzt werden.
4. Es kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, welches Ergebnis sich bei Durchführung des Zufallsexperiments einstellen wird (das Ergebnis hängt vom **Zufall** ab).

Besonders anschauliche Beispiele für Zufallsexperimente findet man im Bereich der Glücksspiele (z. B. Lotto, Skat, Roulette). Aber auch in vielen anderen Lebensbereichen lassen sich Beispiele für zufallsabhängige Vorgänge finden, die zumindest näherungsweise als Zufallsexperimente beschrieben werden können.

Beispiel 2.1

Beispiele für Zufallsexperimente sind:

- Das Werfen einer Münze.
- Das Werfen eines Würfels.
- Die zufällige Entnahme einer Glühbirne aus einer Produktion und die Ermittlung der Brenndauer.
- Die Behandlung eines zufällig ausgewählten Patienten mit einem neuen Medikament und die Feststellung des Heilerfolges.
- Die Gewinnung einer Zufallsstichprobe (Random-Auswahl), z. B. in Markt- und Wahlforschung.

Im Gegensatz zu den Zufallsexperimenten stehen determinierte Experimente in den Naturwissenschaften. Bei diesen Experimenten sind die Versuchsausgänge (theoretisch) reproduzierbar, d. h. unter denselben Versuchsbedingungen stellt sich stets dasselbe Versuchsergebnis ein.

Obwohl das Ergebnis eines Zufallsexperiments vom Zufall abhängt, zeigen sich bei häufiger Wiederholung des Experiments gewisse Gesetzmäßigkeiten, die sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreiben lassen.

2.4 Ergebnismenge und Ereignisse

Ausgehend von dem Begriff des Zufallsexperiments wird nun schrittweise das Denkmodell der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Symbolik und Sprechweise der Mengenlehre zu benutzen.

Definition 2.2

Die einzelnen sich gegenseitig ausschließenden Möglichkeiten für den Ausgang eines Zufallsexperiments heißen **Ergebnisse** oder **Elementarereignisse**.

Beispiel 2.2

Beispiele für Ergebnisse und Elementarereignisse sind:

1. Beim Werfen eines Würfels erhält man die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
2. Beim Werfen einer Münze erhält man die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse *Wappen* und *Zahl*.

Definition 2.3

Die Gesamtheit aller Ergebnisse bzw. Elementarereignisse eines Zufallsexperiments fasst man zur **Ergebnismenge M** des Zufallsexperiments zusammen.

In der Ergebnismenge M muss zu jedem Versuchsergebnis, das in der Realität vorkommen kann, ein zugeordnetes Element vorhanden sein. Umgekehrt verlangt man jedoch nicht, dass auch jedem Element der Ergebnismenge ein Versuchsergebnis entspricht.

Beispiel 2.3

Beispiele für Ergebnismengen sind:

1. Für das Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels* erhält man die Ergebnismenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
2. Für das Zufallsexperiment *Werfen einer Münze* erhält man die Ergebnismenge $M = \{\text{Wappen}, \text{Zahl}\}$.
3. Für das Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln*, wobei die Würfel unterschieden werden, erhält man die Ergebnismenge $M = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \dots, (2, 6), \dots, (6, 6)\}$. Diese Ergebnismenge hat 36 Elemente.

4. Für das Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln*, wobei die Würfel nicht unterschieden werden, erhält man die Ergebnismenge $M = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,2), (2,3), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\}$. Diese Ergebnismenge hat 21 Elemente.
5. Für das Zufallsexperiment *pro Sekunde emittierte α -Teilchen einer radioaktiven Substanz* erhält man die Ergebnismenge $M = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
6. Für das Zufallsexperiment *Messen der Lebensdauer einer der Produktion zufällig entnommenen Glühbirne* erhält man die Ergebnismenge $M = \{t \mid t \geq 0\}$.

Bei der Betrachtung von Zufallsexperimenten wird man sich nicht nur für Elementarereignisse interessieren, sondern auch für Zusammenfassungen von Elementarereignissen, die mengentheoretisch Teilmengen der Ergebnismenge M sind.

Definition 2.4

Eine Teilmenge A der Ergebnismenge M heißt **Ereignis**. Man sagt, "**das Ereignis A ist eingetreten**", wenn das Ergebnis a des Zufallsexperiments ein Element von A ist. Kurz: $a \in A$ heißt, "das Ereignis A ist eingetreten".

Beispiel 2.4

1. Beim Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels* mit der Ergebnismenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bilden die Teilmengen $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{1, 3, 5\}$ die Ereignisse *gerade Augenzahl* und *ungerade Augenzahl*.
2. Beim Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln*, wobei die Würfel unterschieden werden, mit der Ergebnismenge $M = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\}$ bildet die Teilmenge $A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ das Ereignis *Augensumme ≥ 10* .
3. Beim Zufallsexperiment *Messen der Lebensdauer einer der Produktion zufällig entnommenen Glühbirne* mit der Ergebnismenge $M = \{t \mid t \geq 0\}$ bildet die Teilmenge $A = \{t \mid t \geq 100\}$ das Ereignis *Brenndauer mindestens 100 Zeiteinheiten*.

Anmerkung:

Die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse eines Zufallsexperiments entsprechen sowohl den Elementen als auch den einelementigen Teilmengen der Ergebnismenge M des Zufallsexperiments, d. h. $a \in M$ und $\{a\} \subset M$ sind beides zulässige Schreibweisen für ein Ergebnis bzw. Elementarereignis des Zufallsexperiments.

Neben den Elementarereignissen gibt es noch das **sichere Ereignis** und das **unmögliche Ereignis** als besondere Ereignisse.

Definition 2.5

Die Menge M ist als Teilmenge von M auch ein Ereignis; nämlich das **sichere Ereignis**, das immer eintritt.

Die leere Menge \emptyset ist als Teilmenge von M auch ein Ereignis; nämlich das **unmögliche Ereignis**, das niemals eintritt.

Die Beziehungen, die zwischen Mengen bestehen können, und die Verknüpfungen von Mengen lassen sich auf Ereignisse übertragen.

Definition 2.6

1. Das Ereignis $\bar{A} \subset M$, das genau dann eintritt, wenn $A \subset M$ nicht eintritt, heißt das **zu A komplementäre Ereignis**.

2. Man bezeichnet die folgenden Ereignisse als **zusammengesetzte Ereignisse**:

a) $A \cap B$, das genau dann eintritt, wenn sowohl A als auch B eintreten.

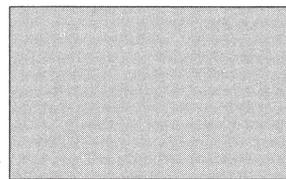
b) $A \cup B$, das genau dann eintritt, wenn A oder B (oder beide zugleich) eintreten.

3. Zwei Ereignisse A und B heißen **unverträglich**, wenn sie nicht beide zugleich eintreten können, d. h. $A \cap B = \emptyset$

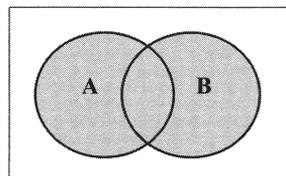
4. **Die Differenz** $A \setminus B$ der Ereignisse A und B tritt genau dann ein, wenn A aber nicht B eintritt.

Ähnlich wie in der Mengenlehre lassen sich die Beziehungen zwischen Ereignissen und Verknüpfungen von Ereignissen mit Hilfe von **VENN-Diagrammen** veranschaulichen.

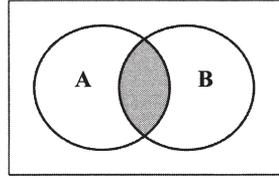
1. **Ergebnismenge M** = Gesamtheit aller Ergebnisse des Zufallsexperiments.



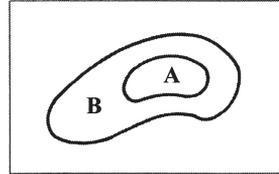
2. **Ereignis A oder B** $= A \cup B$, d. h. A oder B tritt ein oder beide Ereignisse treten gleichzeitig ein.



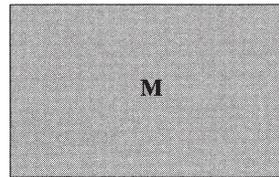
3. **Ereignis A und B** $= A \cap B$,
d. h. A und B treten
gleichzeitig ein.



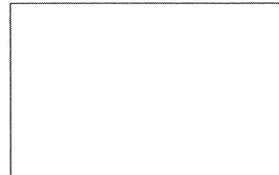
4. $A \subset B$, d. h. das Eintreten
von A hat das Eintreten
von B zur Folge.



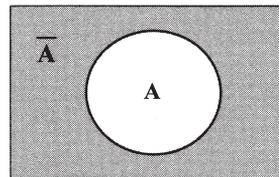
5. **Sichere Ereignis** $M \subset M$,
d. h. M tritt immer ein.



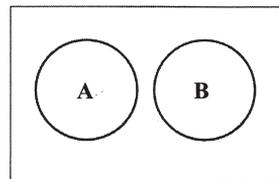
6. **Unmögliches Ereignis** \emptyset ,
d. h. \emptyset tritt niemals ein.



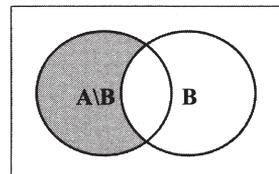
7. **Ereignis nicht A** $= \bar{A}$,
d. h. \bar{A} tritt genau dann ein,
wenn A nicht eintritt.



8. $A \cap B = \emptyset$, d. h. A und B
können nicht gleichzeitig
eintreten (A und B sind
unverträglich).



9. **Differenz der Ereignisse
A und B** $= A \setminus B$, d. h. A
tritt ein, aber B tritt nicht ein.



Beispiel 2.5

Man betrachtet das Zufallsexperiment Werfen eines Würfels mit der Ergebnismenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und den Ereignissen $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 6\}$, $D = \{1\}$. Dann gilt:

1. D ist ein Elementarereignis.
2. $B = \overline{A}$ ist das Ereignis *nicht A*.
3. $A \cap C = \{6\}$ ist das Ereignis *A und C*.
4. $A \cup C = \{2, 3, 4, 6\}$ ist das Ereignis *A oder C*.
5. $A \cap D = \emptyset$, d. h. A und D sind unverträgliche Ereignisse.
6. $A \setminus C = \{2, 4\}$ ist die Differenz von A und C .
7. $D \subset B$, d. h. D hat das Eintreten von B zur Folge.
8. $A \cup B = M$ ist das sichere Ereignis.

Beispiel 2.6

Man betrachte das Zufallsexperiment *Messen der Geschwindigkeit x in km/h* bei Autos. Von Interesse seien die Ereignisse

$$A = \{x \mid 0 < x \leq 110\} \text{ und } B = \{x \mid x \geq 80\}.$$

Als Messergebnisse seien aufgetreten:

$$x_1 = 50, x_2 = 115, x_3 = 95.$$

Dann gilt:

- x_1 : Das Ereignis A ist eingetreten.
- x_2 : Das Ereignis B ist eingetreten. Das Ereignis A ist nicht eingetreten, d. h. das Ereignis \overline{A} ist eingetreten.
- x_3 : Beide Ereignisse (A und B) sind eingetreten, d. h. es ist das zusammengesetzte Ereignis $A \cap B = \{x \mid 80 \leq x \leq 110\}$ eingetreten.

Beispiel 2.7

Beim Roulettspielen setzt ein Spieler auf *gerade* und *oberes Drittel*. Die entsprechenden Ereignisse sind dann

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 36\} \text{ und } B = \{1, 2, 3, \dots, 12\}.$$

Der Spieler hofft darauf, dass das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, d. h. er ist interessiert an dem zusammengesetzten Ereignis

$$A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 12, 14, 16, \dots, 36\}.$$

Stichwortverzeichnis

- Ablehnungsbereich 155, 158
- Abnahmekontrolle 163
- Additionssatz 30
- Alternativhypothese 156
- Annahmebereich 155, 158
- Annahmegrenzen 155, 158
- Anteilswert 126, 139 ff.

- Binomialkoeffizient 43
- Binomialverteilung 74 f.
 - , Approximation der 99
 - , Erwartungswert der 76
 - , Parameter der 75
 - , Tabellen der 204 ff.
 - , Varianz der 76
 - , Wahrscheinlichkeitsfunktion der 75

- χ^2 -Verteilung 94, 95
 - , Approximation der 101
 - , Erwartungswert der 95
 - , Freiheitsgrad der 94
 - , Tabelle der 216 f.
 - , Varianz der 95
- χ^2 -Verteilungstest 180 ff.
- χ^2 -Unabhängigkeitstest 186 ff.

- Dichtefunktion 60 f.
- Differenzentest 172
 - , bei abhängigen Stichproben 172 ff.
 - , bei unabhängigen Stichproben 172, 175 ff.

- Elementarereignis 21
- Ereignis 22 f.
 - , komplementäres 23
 - , sicheres 22 f.
 - , unmögliches 22 f.
- Ereignisse 22 ff.
 - , Differenz zweier 23
 - , Durchschnitt zweier 23
 - , unverträgliche 23
 - , Vereinigung zweier 23
 - , zusammengesetzte 23
- Ergebnis 21
- Ergebnismenge 21

- Erwartungswert 66 f.
 - , des Stichprobenmittelwertes 116 ff.

- Fehler 1. Art 157, 160 ff.
- Fehler 2. Art 160 ff.
- F-Verteilung 95, 96
 - , Approximation der 101
 - , Erwartungswert der 95
 - , Parameter der 95, 96
 - , Tabellen der 218 ff.
 - , Varianz der 95

- Galton-Brett 76 f.
- Gleichverteilung 72, 73
 - , diskrete 73, 74
 - , stetige 72
- Grundgesamtheit 107
 - , endliche 147 f., 168
 - , Parameter der 126
 - , praktisch unendliche 109, 146

- Häufigkeit 26
 - , absolute 26, 126
 - , relative 26, 126
- Häufigkeitstabelle, zweidimensionale 187 ff.
- heterograd 139
- hochsignifikant 158
- Homogenitätstest 191
- homograd 139
- Hypergeometrische Verteilung 78 f.
 - , Approximation der 99
 - , Erwartungswert der 80
 - , Parameter der 78
 - , Tabelle der 80
 - , Varianz der 80
 - , Wahrscheinlichkeitsfunktion der 79
- Hypothese 152 ff.

- Indirekter Beweis 159, 160
- Inklusionschluss 121
- Intervall 130
- Intervallschätzung 129 ff.
 - , Genauigkeit der 134
 - , Sicherheit der 134
- Irrtumswahrscheinlichkeit 130 ff.

- Klumpeneffekt 113
 Klumpenstichprobe 112
 Kombinationen 47 f.
 Konfidenzintervall s. Vertrauensintervall
 Konsumentenrisiko 163
 Korrekturfaktor 147, 148
 Kreuztabelle s. Häufigkeitstabelle
- Laplace-Experimente 31 f.
- Maximum-Likelihood-Methode 129
 Merkmal 122, 187
 Mittelwert 114, 122, 126, 131 ff.
 Multiplikationssatz 35
- Normalverteilung 84 f.
 -, Dichtefunktion der 84
 -, Erwartungswert der 85
 -, Parameter der 84
 -, Reproduktion der 86
 -, Tabellen der 213 ff.
 -, Varianz der 85
 -, Verteilungsfunktion der 84 ff.
 Nullhypothese 154, 156 ff.
- Operationscharakteristik 161
- Parameterschätzung 126
 Parameterstest 153, 164 ff.
 Pascal'sches Dreieck 45
 Permutation 46
 Poissonverteilung 80
 -, Approximation der 99
 -, Erwartungswert der 82
 -, Parameter der 81
 -, Tabelle der 208 ff.
 -, Varianz der 82
 Produzentenrisiko 163
 Punktschätzung 129
- Qualitätskontrolle, statistische 166
 Qualitätsregelkarte 166
 Quotenverfahren 110
- Randhäufigkeit 187, 188
 Rangsumme 194 f.
 Rang-Test 192, 194 f.
 Rangzahlen 194 f.
 Repräsentationsschluss 121
 Risiko 1. Art 160 ff.
- Risiko 2. Art 160 ff.
 Schätzfehler 145
 Schätzfunktion 127 f.
 -, effiziente 128
 -, erwartungstreue 128
 -, konsistente 128
 Schätzung von Parametern 125 f.
 Schätzverfahren 108, 125 ff.
 Schätzwert 126
 Sicherheitswahrscheinlichkeit s.
 Vertrauensniveau
 signifikant 154, 157, 177
 Signifikanzzahl 157 ff.
 Standardabweichung 68
 Standardnormalverteilung 86 f.
 Stetigkeitskorrektur 100
 Stichprobe 107
 -, einfache 110
 -, geschichtete 111
 -, mehrstufige 114
 Stichproben 107
 -, abhängige 172 ff.
 -, unabhängige 172, 175 ff.
 Stichprobenanteilswert 127, 157, 164
 Stichprobenfehler 107
 Stichprobenfunktion 115
 Stichprobenmittelwert 115, 127
 Stichprobenparameter 126
 Stichprobenumfang 107
 -, notwendiger 144 ff.
 Stichprobenuntersuchung 106 ff.
 Stichprobenvarianz 127, 142, 164
- Student-Verteilung 96
 -, Approximation der 102
 -, Erwartungswert der 96
 -, Freiheitsgrad der 96
 -, Tabellen der 222 ff.
 -, Varianz der 96
 Systematische Stichprobenverfahren 113
- Test 152 ff.
 -, einseitiger 156 f., 166 f., 170 f.
 - für den Mittelwert einer Normalverteilung 164 ff.
 - für die Differenz zweier Mittelwerte s. Differenzentest
 - für einen Anteilswert 169 ff.
 -, statistischer 152
 -, verteilungsabhängiger 152, 153

- , verteilungsunabhängiger 152, 153, 192
- , zweiseitiger 156 ff.
- Testgröße 157, 164
- Testverfahren 152
- Testverteilungen 93 ff., 181
- Testwert 158, 180, 187 f.
- Trennschärfe 163
- t-Verteilung s. Student-Verteilung
- Unabhängigkeit, stochastische 33 ff.
- Unabhängigkeitstest 153, 186 ff.
- Urnenmodell 51, 52

- Varianz 68
- Verteilung 56 f.
 - , diskrete 56
 - , geometrische 58
 - , stetige 60
 - , symmetrische 70 ff.
- Verteilungsfunktion 61 f.
- Verteilungstest 153, 180 ff.
- Vertrauensgrenze 130
- Vertrauensintervall 130
 - für den Mittelwert einer Normalverteilung 131 ff.
 - für die Varianz einer Normalverteilung 142 ff.
 - für einen Anteilswert 139 ff.
- Vertrauensniveau 130

- Vorzeichen-Rang-Test von Wilcoxon 194 ff.
- , Tabelle zum 226

- Wahrscheinlichkeit 18, 19
 - , Axiome der 29 f.
 - , bedingte 33 f.
 - , mathematische 19
 - , Monotonie der 30
 - , objektive 19
 - , statistische 19, 126
 - , subjektive 19
- Wahrscheinlichkeitsfunktion 56
- Wirksamkeit eines Tests 180, 192

- YATES-Korrektur 183, 190

- Zeichentest 192 f., 196 f.
- Zentraler Grenzwertsatz 91, 146, 168
- Zufallsauswahl 109 f.
- Zufallsexperiment 20, 115
- Zufallsstichprobe 109 f.
 - , einfache 110 f.
- Zufallstafel 111
- Zufallsvariable 54 ff., 115, 122, 127
 - , diskrete 56 f.
 - , Schreibweise für 55
 - , stetige 60
 - , Merkmal und 55, 122