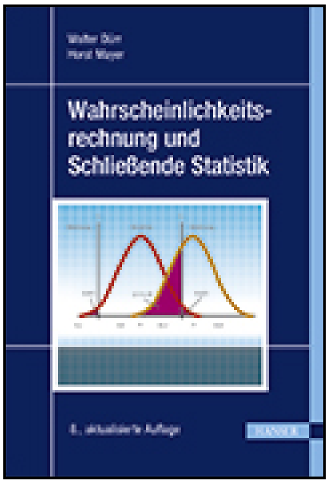
HANSER



Walter Dürr, Horst Mayer

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

ISBN (Buch): 978-3-446-45162-9

Dürr • Mayer

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

Walter Dürr / Horst Mayer

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik

8., aktualisierte Auflage

mit 49 Abbildungen, 127 Beispielen, 121 Aufgaben und Kontrollfragen sowie einem Glossar

HANSER

Autoren

Prof. Dr. Walter Dürr
Fachhochschule Dortmund

Prof. Dr. Horst Mayer (†)
Fachhochschule Darmstadt

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-45162-9

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Mirja Werner
Herstellung: Katrin Wulst
Einbandrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Binden: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort der Autoren

Statistische Methoden sind heute in vielen Bereichen zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel geworden. Naturwissenschaftler, Ingenieure, Psychologen, Soziologen, Wirtschaftswissenschaftler u. v. a. wenden statistische Methoden in Wissenschaft und Praxis an. Eine Grundausbildung umfasst in der Regel die Gebiete Beschreibende Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließende Statistik. Über gewisse Vorkenntnisse aus der Beschreibenden Statistik sollten Leserinnen und Leser verfügen.

Das vorliegende Buch beschränkt sich bewusst auf Sach- und Lehrinhalte, deren Vermittlung im Rahmen einer Grundausbildung ohne weiteres möglich ist. Lernziele, viele Beispiele, Aufgaben und Kontrollfragen einschließlich deren Lösungen sowie ein Glossar der wichtigsten Inhalte und Begriffe sollen den Lernprozess unterstützen.
Das Buch wendet sich an Studierende von Fachhochschulen, Gesamthochschulen und Universitäten, aber auch an Praktiker, die in ihrer beruflichen Tätigkeit Einsatzmöglichkeiten für statistische Methoden sehen.

Dortmund/Darmstadt, Mai 1980 — Walter Dürr — Horst Mayer

Vorwort zur 8. Auflage

Das Buch wurde auch für die 8. Auflage kritisch durchgesehen, Hinweise von Lesern und Studierenden sind von den Autoren dankbar aufgegriffen worden. Für die satztechnische Unterstützung und seine sachkundigen Beiträge sind die Autoren Herrn Dipl.-Betriebswirt Markus Hinners zu besonderem Dank verpflichtet.
Das Buch bewährt sich nunmehr seit vielen Jahren in der Lehrpraxis, konzeptionelle und inhaltliche Änderungen wurden daher nicht vorgenommen. Auch moderne Systeme zur Datenanalyse und Statistik sowie Managementkonzepte, die man häufig mit Begriffen wie DATA MINING und DATA WAREHOUSE sowie RISIKOMANAGEMENT und RISIKOCONTROLLING verbindet, enthalten immer auch Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wie hier dargestellt.

Dortmund/Darmstadt, April 2017 — Walter Dürr — Horst Mayer

Inhaltsverzeichnis

Teil II: Schließende Statistik

2 Grundbegriffe

2.1 Lernziele

Wenn Sie dieses Kapitel durchgearbeitet haben, sollten Sie

- die Begriffe subjektive, mathematische und statistische Wahrscheinlichkeit sowie die Verwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in der Umgangssprache gegeneinander abgrenzen und Beispiele aus Ihrem Erfahrungsbereich angeben können;
- die Eigenschaffen eines Zufallsexperiments kennen und Beispiele für Zufallsexperimente aus Ihrem Erfahrungsbereich angeben können;
- die Begriffe Ergebnismenge, Elementarereignis, Ereignis und die daraus abgeleiteten Begriffe definieren und anwenden können;
- die Erfahrungstatsache der Stabilisierung der relativen Häufigkeiten interpretieren und experimentell nachprüfen können;
- die Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie und die einfachen Folgerungen aus den Axiomen kennen;
- beurteilen können, ob es sich bei einem konkreten Zufallsexperiment um ein Laplace-Experiment handelt, und die Berechnungsformel für Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten anwenden können;
- die Begriffe "bedingte Wahrscheinlichkeit" und "stochastische Unabhängigkeit" definieren und die entsprechenden Formeln anwenden können;
- die Produktformel verstehen und anwenden können.

2.2 Subjektive, mathematische und statistische Wahrscheinlichkeit

In der Umgangssprache werden die Begriffe **"Wahrscheinlichkeit"** und **"wahrscheinlich"** sehr häufig angewendet, um Aussagen über Sachverhalte zu machen, über die man sich nicht sicher ist. So findet man in der Umgangssprache Sätze folgender Art:

1. Wahrscheinlich ist Klaus glücklich verheiratet.
2. Wahrscheinlich gewinnt Borussia Dortmund ihr nächstes Heimspiel.
3. Wahrscheinlich bestehe ich die nächste Klausur in Statistik.

Eine inhaltliche Präzisierung des Begriffs "Wahrscheinlichkeit" aufgrund solcher Formulierungen und eine zahlenmäßige Quantifizierung der Wahrscheinlichkeit ist vielfach nicht möglich. Wahrscheinlichkeitsaussagen im umgangssprachlichen Sinn sind nicht Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie und sie werden daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

In den folgenden Sätzen hat der Wahrscheinlichkeitsbegriff schon einen konkreteren Inhalt:

1. Die Geschäftsleitung schätzt die Wahrscheinlichkeit für eine Umsatzerhöhung im laufenden Jahr gegenüber dem Vorjahr auf 90% ein.
2. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, beträgt 1/6.
3. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Zwillingsgeburt beträgt 1/82.

Zu 1.:
Bei Wahrscheinlichkeitsaussagen dieser Art handelt es sich **um subjektive Wahrscheinlichkeiten**. Das Wort "wahrscheinlich" bringt hier eine subjektive Einschätzung zum Ausdruck, die nicht bzw. nicht ausschließlich mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie oder der Schließenden Statistik belegt wird. Auch Wahrscheinlichkeitsaussagen dieser Art sind vielfach nicht Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Zu 2.:
Diese Aussage gründet sich auf die Symmetrieeigenschaft des Würfels und der daraus folgenden Gleichwahrscheinlichkeit der verschiedenen Augenzahlen. Die Wahrscheinlichkeiten sind mathematisch berechenbar und man spricht daher von **mathematischer Wahrscheinlichkeit**.

Zu 3.:
Der angegebene Wert für die Wahrscheinlichkeit ist eine Schätzung, die das Ergebnis der Auswertung von umfangreichem Beobachtungsmaterial ist und eine Näherung für den unbekannten wahren Wert darstellt. Hier liegt ein Beispiel einer **statistischen Wahrscheinlichkeit** vor. Der analoge Begriff aus der Beschreibenden Statistik ist "relative Häufigkeit". Diese grundlegende Analogie geht in viele der nachfolgenden Ausführungen ein. Es sei verwiesen auf die Kapitel 2.5, 2.6 und 10 und hier insbesondere 10.3.2.

Insbesondere Aussagen, in denen mathematische oder statistische Wahrscheinlichkeiten Verwendung finden, sind Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie und Schließenden Statistik. Hierbei handelt es sich um Wahrscheinlichkeiten, die von allen Menschen bei gleicher Kenntnislage gleich hoch eingeschätzt werden. Mathematische und statistische Wahrscheinlichkeiten nennt man auch **objektive Wahrscheinlichkeiten**.

2.3 Zufallsexperimente

Das Werfen eines Würfels kann man als Beispiel einer Klasse von Experimenten ansehen, die man **Zufallsexperimente** nennt. Der Begriff "Wahrscheinlichkeit" wird im Folgenden stets im Zusammenhang mit Zufallsexperimenten verwendet.

Definition 2.1

Ein Experiment heißt **Zufallsexperiment**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Das Experiment wird nach einer **genau festgelegten Vorschrift** durchgeführt.
2. Das Experiment kann unter den gleichen Bedingungen **beliebig oft wiederholt** werden.
3. Es sind **mehrere Ergebnisse** des Experiments möglich. Sämtliche überhaupt möglichen Ergebnisse des Experiments können vor Durchführung des Experiments angegeben oder zumindest abgeschätzt werden.
4. Es kann nicht mit Sicherheit angegeben werden, welches Ergebnis sich bei Durchführung des Zufallsexperiments einstellen wird (das Ergebnis hängt vom **Zufall** ab).

Besonders anschauliche Beispiele für Zufallsexperimente findet man im Bereich der Glücksspiele (z. B. Lotto, Skat, Roulette). Aber auch in vielen anderen Lebensbereichen lassen sich Beispiele für zufallsabhängige Vorgänge finden, die zumindest näherungsweise als Zufallsexperimente beschrieben werden können.

Beispiel 2.1

Beispiele für Zufallsexperimente sind:

- Das Werfen einer Münze.
- Das Werfen eines Würfels.
- Die zufällige Entnahme einer Glühbirne aus einer Produktion und die Ermittlung der Brenndauer.
- Die Behandlung eines zufällig ausgewählten Patienten mit einem neuen Medikament und die Feststellung des Heilerfolges.
- Die Gewinnung einer Zufallsstichprobe (Random-Auswahl), z. B. in Markt- und Wahlforschung.

Im Gegensatz zu den Zufallsexperimenten stehen determinierte Experimente in den Naturwissenschaften. Bei diesen Experimenten sind die Versuchsausgänge (theoretisch) reproduzierbar, d. h. unter denselben Versuchsbedingungen stellt sich stets dasselbe Versuchsergebnis ein.

Obwohl das Ergebnis eines Zufallsexperiments vom Zufall abhängt, zeigen sich bei häufiger Wiederholung des Experiments gewisse Gesetzmäßigkeiten, die sich mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie beschreiben lassen.

2.4 Ergebnismenge und Ereignisse

Ausgehend von dem Begriff des Zufallsexperiments wird nun schrittweise das Denkmodell der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Symbolik und Sprechweise der Mengenlehre zu benutzen.

Definition 2.2

Die einzelnen sich gegenseitig ausschließenden Möglichkeiten für den Ausgang eines Zufallsexperiments heißen **Ergebnisse** oder **Elementarereignisse**.

Beispiel 2.2

Beispiele für Ergebnisse und Elementarereignisse sind:

1. Beim Werfen eines Würfels erhält man die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse *1, 2, 3, 4, 5, 6.*
2. Beim Werfen einer Münze erhält man die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse *Wappen* und *Zahl.*

Definition 2.3

Die Gesamtheit aller Ergebnisse bzw. Elementarereignisse eines Zufallsexperiments fasst man zur **Ergebnismenge M** des Zufallsexperiments zusammen.

In der Ergebnismenge M muss zu jedem Versuchsergebnis, das in der Realität vorkommen kann, ein zugeordnetes Element vorhanden sein. Umgekehrt verlangt man jedoch nicht, dass auch jedem Element der Ergebnismenge ein Versuchsergebnis entspricht.

Beispiel 2.3

Beispiele für Ergebnismengen sind:

1. Für das Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels* erhält man die Ergebnismenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Für das Zufallsexperiment *Werfen einer Münze* erhält man die Ergebnismenge $M = \{\text{Wappen}, \text{Zahl}\}$.

3. Für das Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln,* wobei die Würfel unterschieden werden, erhält man die Ergebnismenge
   $M = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, 6), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, 6), \ldots, (6, 6)\}$.
   Diese Ergebnismenge hat 36 Elemente.

4. Für das Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln,* wobei die Würfel nicht unterschieden werden, erhält man die Ergebnismenge
   M = {(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,2), (2,3), ..., (2,6), ..., (6,6)}.
   Diese Ergebnismenge hat 21 Elemente.

5. Für das Zufallsexperiment *pro Sekunde emittierte α-Teilchen einer radioaktiven Substanz* erhält man die Ergebnismenge M = {0, 1, 2, 3, ...}.

6. Für das Zufallsexperiment *Messen der Lebensdauer einer der Produktion zufällig entnommenen Glühbirne* erhält man die Ergebnismenge $M = \{t \mid t \geq 0\}$.

Bei der Betrachtung von Zufallsexperimenten wird man sich nicht nur für Elementarereignisse interessieren, sondern auch für Zusammenfassungen von Elementarereignissen, die mengentheoretisch Teilmengen der Ergebnismenge M sind.

Definition 2.4

Eine Teilmenge A der Ergebnismenge M heißt **Ereignis**. Man sagt, **"das Ereignis A ist eingetreten"**, wenn das Ergebnis a des Zufallsexperiments ein Element von A ist. Kurz: $a \in A$ heißt, "das Ereignis A ist eingetreten".

Beispiel 2.4

1. Beim Zufallsexperiment *Werfen eines Würfels* mit der Ergebnismenge
   M = {1, 2, 3, 4, 5, 6} bilden die Teilmengen A = {2, 4, 6} und B = {1, 3, 5} die Ereignisse *gerade Augenzahl* und *ungerade Augenzahl.*

2. Beim Zufallsexperiment *Werfen mit zwei Würfeln*, wobei die Würfel unterschieden werden, mit der Ergebnismenge
   M = {(1,1), (1,2), ..., (1,6), (2,1), (2,2), ..., (2,6), ..., (6,6)} bildet die Teilmenge
   A = {(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)} das Ereignis *Augensumme* $\geq$ *10.*

3. Beim Zufallsexperiment *Messen der Lebensdauer einer der Produktion zufällig entnommenen Glühbirne* mit der Ergebnismenge $M = \{t \mid t \geq 0\}$ bildet die Teilmenge $A = \{t \mid t \geq 100\}$ das Ereignis *Brenndauer mindestens 100 Zeiteinheiten.*

Anmerkung:

Die Ergebnisse bzw. Elementarereignisse eines Zufallsexperiments entsprechen sowohl den Elementen als auch den einelementigen Teilmengen der Ergebnismenge M des Zufallsexperiments, d. h. $a \in M$ und $\{a\} \subset M$ sind beides zulässige Schreibweisen für ein Ergebnis bzw. Elementarereignis des Zufallsexperiments.

Neben den Elementarereignissen gibt es noch das **sichere Ereignis** und das **unmögliche Ereignis** als besondere Ereignisse.

Definition 2.5

Die Menge M ist als Teilmenge von M auch ein Ereignis; nämlich das **sichere Ereignis**, das immer eintritt.
Die leere Menge $\varnothing$ ist als Teilmenge von M auch ein Ereignis; nämlich das **unmögliche Ereignis**, das niemals eintritt.

Die Beziehungen, die zwischen Mengen bestehen können, und die Verknüpfungen von Mengen lassen sich auf Ereignisse übertragen.

Definition 2.6

1. Das Ereignis $\overline{A} \subset M$, das genau dann eintritt, wenn $A \subset M$ nicht eintritt, heißt das **zu A komplementäre Ereignis**.

2. Man bezeichnet die folgenden Ereignisse als **zusammengesetzte Ereignisse**:

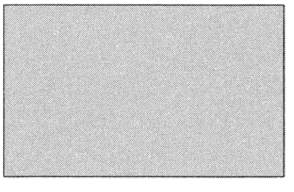
   a) $\mathbf{A \cap B}$, das genau dann eintritt, wenn sowohl A als auch B eintreten.
   b) $\mathbf{A \cup B}$, das genau dann eintritt, wenn A oder B (oder beide zugleich) eintreten.

3. Zwei Ereignisse A und B heißen **unverträglich** , wenn sie nicht beide zugleich eintreten können, d. h. $A \cap B = \varnothing$

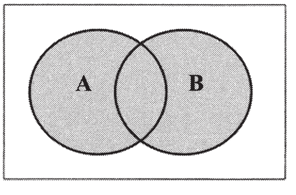
4. **Die Differenz** $\mathbf{A \setminus B}$ der Ereignisse A und B tritt genau dann ein, wenn A aber nicht B eintritt.

Ähnlich wie in der Mengenlehre lassen sich die Beziehungen zwischen Ereignissen und Verknüpfungen von Ereignissen mit Hilfe von **VENN-Diagrammen** veranschaulichen.

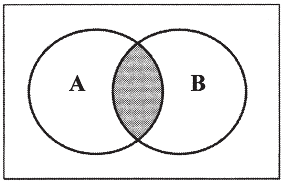
1. Ergebnismenge M = Gesamtheit aller Ergebnisse des Zufallsexperiments.



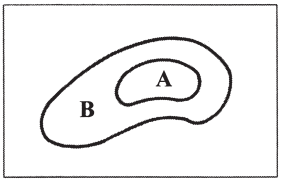
2. Ereignis A oder B = $A \cup B$,
d. h. A oder B tritt ein oder beide Ereignisse treten gleichzeitig ein.



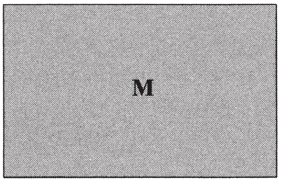
3. **Ereignis A und B = A∩B,**
   d. h. A und B treten
   gleichzeitig ein.



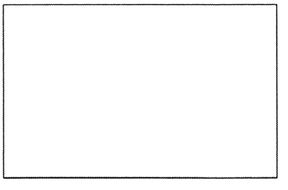
4. **A⊂B,** d. h. das Eintreten
   von A hat das Eintreten
   von B zur Folge.



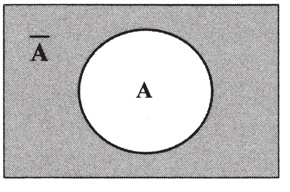
5. **Sichere Ereignis M⊂M,**
   d. h. M tritt immer ein.



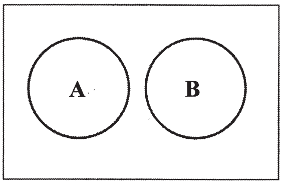
6. **Unmögliches Ereignis** ∅,
   d. h. ∅ tritt niemals ein.



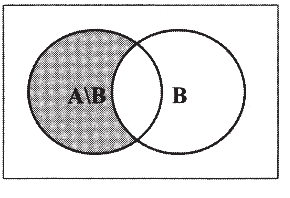
7. **Ereignis nicht** $\mathbf{A = \overline{A}}$**,**
   d. h. $\overline{A}$ tritt genau dann ein,
   wenn A nicht eintritt.



8. **A∩B =** ∅, d. h. A und B
   können nicht gleichzeitig
   eintreten (A und B sind
   unverträglich).



9. **Differenz der Ereignisse**
   A und B = A\B, d. h. A
   tritt ein, aber B tritt nicht ein.



Beispiel 2.5

Man betrachtet das Zufallsexperiment Werfen eines Würfels mit der Ergebnismenge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und den Ereignissen $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{3, 6\}$, $D = \{1\}$.
Dann gilt:

1. D ist ein Elementarereignis.
2. $B = \overline{A}$ ist das Ereignis *nicht A*.
3. $A \cap C = \{6\}$ ist das Ereignis *A und C*.
4. $A \cup C = \{2, 3, 4, 6\}$ ist das Ereignis *A oder C*.
5. $A \cap D = \emptyset$, d. h. A und D sind unverträgliche Ereignisse.
6. $A \setminus C = \{2, 4\}$ ist die Differenz von A und C.
7. $D \subset B$, d. h. D hat das Eintreten von B zur Folge.
8. $A \cup B = M$ ist das sichere Ereignis.

Beispiel 2.6

Man betrachte das Zufallsexperiment *Messen der Geschwindigkeit x in km/h* bei Autos. Von Interesse seien die Ereignisse

$$A = \{x \mid 0 < x \leq 110\} \text{ und } B = \{x \mid x \geq 80\}.$$

Als Messergebnisse seien aufgetreten:

$$x_1 = 50,\ x_2 = 115,\ x_3 = 95.$$

Dann gilt:

x_1: Das Ereignis A ist eingetreten.

x_2: Das Ereignis B ist eingetreten. Das Ereignis A ist nicht eingetreten, d. h. das Ereignis $\overline{A}$ ist eingetreten.

x_3: Beide Ereignisse (A und B) sind eingetreten, d. h. es ist das zusammengesetzte Ereignis $A \cap B = \{ x \mid 80 \leq x \leq 110\}$ eingetreten.

Beispiel 2.7

Beim Roulettspielen setzt ein Spieler auf *gerade* und *oberes Drittel*. Die entsprechenden Ereignisse sind dann

$$A = \{2, 4, 6, ..., 36\} \quad \text{und} \quad B = \{1, 2, 3, ...,12\}.$$

Der Spieler hofft darauf, dass das Ereignis A oder das Ereignis B eintritt, d. h. er ist interessiert an dem zusammengesetzten Ereignis

$$A \cup B = \{1, 2, 3, ..., 12, 14, 16, ..., 36\}.$$

Im folgenden Schema sind die Begriffe dieses Abschnitts zusammengefasst:

Mengenlehre	Interpretation
M	Ergebnismenge
$a \in M$	Ergebnis, Elementarereignis
$A \subset M$	Ereignis
$A \cup B$	Ereignis *A oder B*
$A \cap B$	Ereignis *A und B*
$A \cap B = \varnothing$	Unverträgliche Ereignisse
$A \setminus B$	Differenz der Ereignisse A und B
$\overline{A} = M \setminus A$	Ereignis *nicht A*
$A \subset B$	Ereignis A hat Ereignis B zur Folge
$M \subset M$	Sicheres Ereignis
$\varnothing \subset M$	Unmögliches Ereignis

Abbildung 2.1 Zusammenfassung der Begriffe des Abschnitts 2.4

2.5 Stabilisierung der relativen Häufigkeiten

Nach Einführung der Begriffe "Ergebnismenge" und "Ereignis" besteht ein weiterer Denkschritt darin, den Ereignissen Zahlen zuzuordnen, die ein Maß dafür sein sollen, wie sehr mit dem Eintreten des Ereignisses zu rechnen ist. Das führt zunächst auf die Begriffe **absolute** und **relative Häufigkeit** eines Ereignisses.

Definition 2.7

Ein Zufallsexperiment mit der Ergebnismenge M und den Ereignissen A und B werde n-mal durchgeführt und zwar so, dass die Versuchsausgänge vorangehender Durchführungen keinen Einfluss auf die nachfolgenden Durchführungen haben. Dabei sei das Ereignis A $n(A)$-mal und das Ereignis B $n(B)$-mal eingetreten. Dann heißen $n(A)$ bzw. $n(B)$ die **absolute Häufigkeit** und $h_n(A) = n(A)/n$ bzw. $h_n(B) = n(B)/n$ die **relative Häufigkeit** von A bzw. B bei n Durchführungen.

Satz 2.1

Für die absoluten bzw. relativen Häufigkeiten gelten folgende Beziehungen:

1. $0 \le n(A)$ bzw. $0 \le h_n(A)$
2. $n(M) = n$ bzw. $h_n(M) = 1$
3. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, falls $A \cap B = \varnothing$ bzw. $h_n(A \cup B) = h_n(A) + h_n(B)$, falls $A \cap B = \varnothing$

Stichwortverzeichnis