Weltner

Leitprogramm Mathematik für Physiker 2

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch

Klaus Weltner

Leitprogramm Mathematik für Physiker 2

Springer Spektrum

Klaus Weltner
Universität Frankfurt
Institut für Didaktik der Physik
Max-von-Laue-Straße 1
60438 Frankfurt, Germany
weltner@em.unifrankfurt.de

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-25162-7 ISBN 978-3-642-25163-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-25163-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Vera Spillner, Birgit Münch
Einbandabbildung: Gezeichnet von Martin Weltner, nachgezeichnet von Kristin Riebe
Einbandentwurf: WMXDesign, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Das Lehrwerk „Mathematik für Physiker" besteht aus zwei gleichgewichtigen Teilen: dem Lehrbuch und den Leitprogrammen. Die Leitprogramme können nur in Verbindung mit dem Lehrbuch benutzt werden. Sie sind eine ausführliche Studienanleitung mit individualisierten Übungen und Zusatzerläuterungen. Das Konzept, der Aufbau und die Ziele der Leitprogramme sind im Lehrbuch Band 1 auf Seite 3 beschrieben und können dort nachgelesen werden. Nur ein Punkt sei genannt: Die Übungen und Aufgaben sind der aktuellen Kompetenz der Studierenden angepasst und können in der Regel richtig gelöst werden. Das führt zu hinreichend vielen Erfolgserlebnissen, und der Lernende gewinnt Selbstvertrauen und stabilisiert seine Lernmotivation.

Die Methodik, das selbständige Studieren durch Leitprogramme der vorliegenden Art zu unterstützen, hat sich in der Praxis seit Jahren bewährt. Vielen Studienanfängern der Physik, aber auch der Ingenieurwissenschaften und der anderen Naturwissenschaften, haben die Leitprogramme inzwischen geholfen, die Anfangsschwierigkeiten in der Mathematik zu überwinden und geeignete Studiertechniken zu erwerben und weiterzuentwickeln. So haben sie dazu beigetragen, Studienanfänger unabhängiger von Personen und Institutionen zu machen. Diese Leitprogramme haben sich als ein praktischer und wirksamer Beitrag zur Verbesserung der Lehre erwiesen. Niemand kann dem Studierenden das Lernen abnehmen, aber durch die Entwicklung von Studienunterstützungen kann ihm seine Arbeit erleichtert werden. Insofern sehe ich in der Entwicklung von Studienunterstützungen einen wirksamen Beitrag zur Studienreform.

Nun eine kurze Bemerkung zum Gebrauch dieses Buches:

Die Anordnung des Buches unterscheidet sich von der Anordnung üblicher Bücher. Es ist ein „verzweigendes Buch". Das bedeutet, beim Durcharbeiten wird nicht jeder Leser jede Seite lesen müssen. Je nach Lernfortschritt und Lernschwierigkeiten werden individuelle Arbeitsanweisungen und Hilfen gegeben.

Innerhalb des Leitprogramms sind die einzelnen Lehrschritte fortlaufend in jedem Kapitel neu durchnumeriert. Die Nummern der Lehrschritte stehen auf dem rechten Rand. Mehr braucht hier nicht gesagt zu werden, alle übrigen Einzelheiten ergeben sich bei der Bearbeitung und werden jeweils innerhalb des Leitprogramms selbst erklärt.

Frankfurt/Main, November 2011 *Klaus Weltner*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 13
Funktionen mehrerer Variablen
Skalare Felder und Vektoren

K. Weltner, *Leitprogramm Mathematik für Physiker 2*.

DOI 10.1007/978-3-642-25163-4_13

1

Einleitung
Der Begriff der Funktion mehrerer Variablen

Der Funktionsbegriff wird für den Fall erweitert, dass mehr als zwei Variable voneinander abhängen. Das ist in der Praxis sehr oft der Fall.
Eine spezifische Arbeitstechnik beim Studium mathematischer und physikalischer Ableitungen ist, eine ähnliche Aufgabe wie die im Text Schritt für Schritt parallel zum Text zu bearbeiten. Führen Sie alle Überlegungen während der Arbeit mit dem Lehrbuch auch für die folgende Funktion durch

$$z = f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

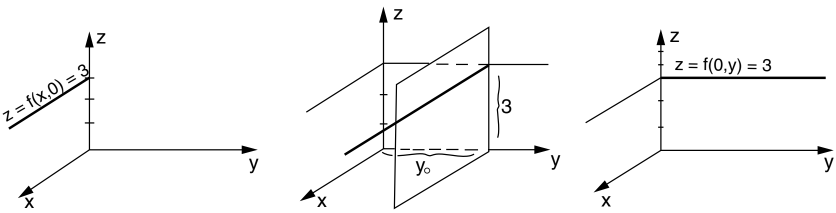
STUDIEREN SIE im Lehrbuch 13.1 Einleitung
13.2 Der Begriff der Funktion mehrerer Variablen
Lehrbuch Seite 7-14

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ----------------------▷ 2

25

Leider Irrtum. Gehen wir Schritt für Schritt vor, um die Fläche zu gewinnen:

1. Schritt:	2. Schritt:	3. Schritt:
Schnitt mit der x-z-Ebene	Schnitt mit der Ebene parallel zur x-z-Ebene	Schnitt mit der y-z-Ebene
Bedingung $y = 0$	Im Abstand y_0	Bedingung $x = 0$
$z = f(x, y = 0) = 3$	$z = f(x, y_0) = 3$	$z = f(0, y) = 3$



----------------------▷ 26

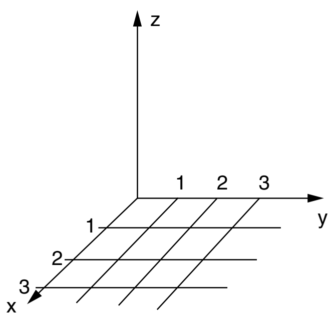
49

$$\vec{A}(1,\ 0,\ 0) = \frac{(0,\ 1,\ 0)}{\sqrt{1}} = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{A}(1,\ 1,\ 0) = \frac{(1,\ 1,\ 0)}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1,\ 0)$$

$$\vec{A}(0,\ 1,\ 0) = \frac{(1,\ 0,\ 0)}{\sqrt{1}} = (1,\ 0,\ 0)$$

Zeichnen Sie die Vektoren ein.



----------------------▷ 50

2

Haben Sie die Rechnung im Text parallel durchgeführt für die Funktion

$$z = f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}?$$

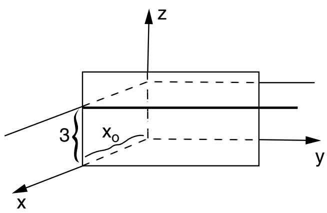
Ja ▷ 4

Nein ▷ 3

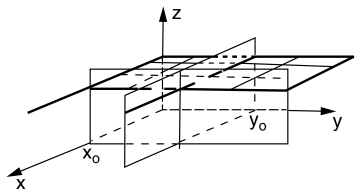
26

4. Schritt: Schnitt mit einer Ebene parallel zur y-z-Ebene im Abstand x_0

$$z = f(x_0, y) = 3$$

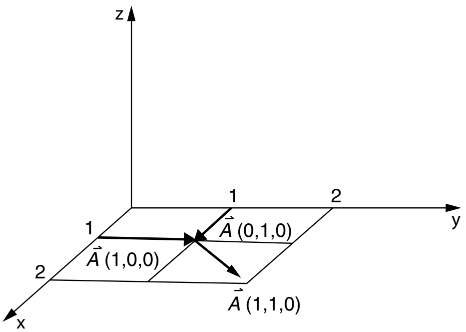


5. Schritt: Wir bringen die Schnittkurven in eine Skizze zusammen und nehmen weitere Schnittkurven hinzu.
Das ergibt die Skizze im Lehrschritt 24.



▷ 27

50



Berechnen Sie den Betrag dieser drei Vektoren. Sie werden sehen, dass sie den Betrag 1 haben.

▷ 51

3

Eigentlich sehr schade.

Die Technik, eine Aufgabe parallel zum Text zu rechnen, ist nur scheinbar unbequem. Natürlich dauert es dann länger. Aber Sie gewinnen ein sichereres Verständnis. Das spart Zeit in der Zukunft.

Ob es Ihnen nicht vielleicht doch möglich ist, die folgende Fläche parallel zum Lehrbuch, Abschnitt 13.2, zu skizzieren?

$$z = e^{-(x^2+y^2)}$$

▷ 4

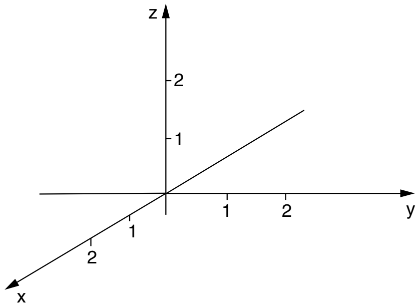
27

Nun geht es weiter:
Gegeben sei die Funktion

$$z = x^2 + y^2$$

Skizzieren Sie die Schnitte mit

a) der x-z-Ebene $y = 0$
b) der y-z-Ebene $x = 0$



▷ 28

51

Nun geht es weiter mit dem 3. Schritt:

Wir berechnen die Vektoren $\vec{A}$ für eine weitere Ebene, z.B. für die Ebene, die im Abstand $z = 1$ parallel zu der x-y-Ebene liegt.

Wir wählen die Punkte

$P_4 = (1,0,1)$, $P_5 = (1,1,1)$ $P_6 = (0,1,1)$

Geben Sie den Vektor für P_4 an: $\vec{A}(1,0,1) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Erinnerung, es war: $\vec{A}(x,y,z) = \dfrac{(y,x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

▷ 52

4

Sehr gut so.

Natürlich ist es mühsamer, statt rasch zu lesen, noch eine Rechnung parallel zum Text durchzuführen. Aber es ist ein weiterer Schritt zur Selbständigkeit.

Hier sind nun Hinweise für die Lösung $z = e^{-(x^2+y^2)}$

Werte gerundet

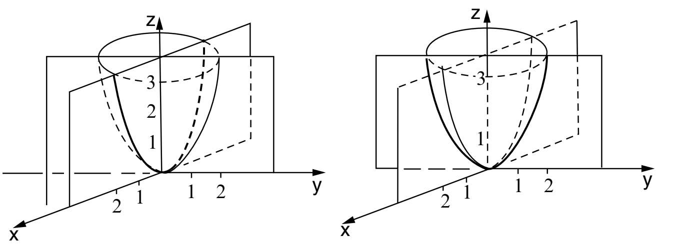
$e^{-1} \approx 0,4$
$e^{-4} \approx 0,02$

Wertematrix

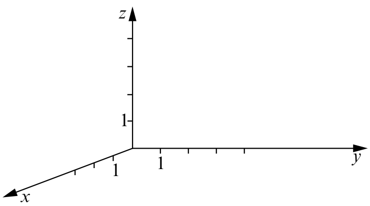
y \ x	0	1	2
0	1	0,4	0,02
1	0,4	0,1	0,007
2	0,02	0,007	0,0003

▷ 5

28



Hinweis:
Die Schnittkurven sind Parabeln.



Skizzieren Sie nun noch die Schnitte mit Parallelen zur x-y-Ebene in den Höhen $z = 1,\ z = 2,\ z = 3,\ z = 4$ für $z = x^2 + y^2$

▷ 29

52

$\vec{A}(1,0,1) = \frac{(0,1,0)}{\sqrt{1}} = (0,1,0)$

Berechnen Sie $\vec{A}$ für die weiteren Punkte

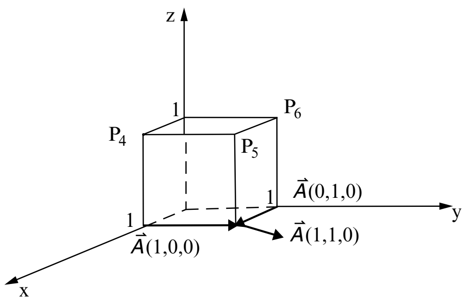
$\vec{A}(1,0,1) = (0,1,0)$

$\vec{A}(1,1,1) = (\ldots\ldots\ldots)$

$\vec{A}(0,1,1) = (\ldots\ldots\ldots)$

Erinnerung: $\vec{A}(x,y,z) = \frac{(y,x,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Zeichnen Sie die Vektoren ein.

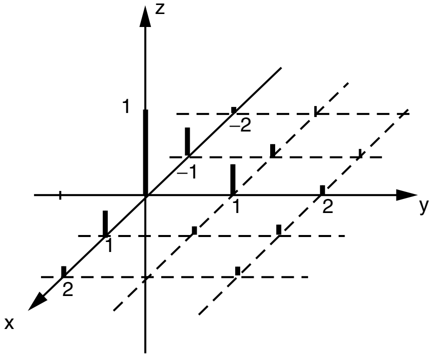


▷ 53

5

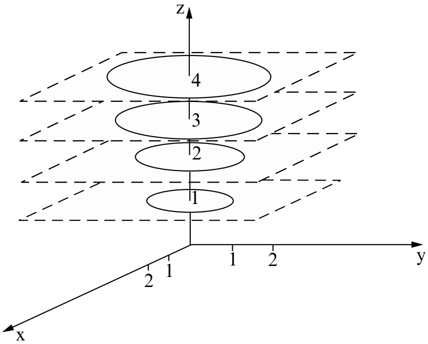
Rechts sind die Werte der Matrix eingetragen.
Skizzieren Sie Schnittlinien für $y = 0,\ y = 1,\ y = 2$

Skizzieren Sie danach Schnittlinien für $x = 0,\ x = 1,\ x = 2$



→ 6

29



Die Schnittkurvenvon $z^2 = x^2 + y^2$ mit $z = \text{const.}$ sind Kreise. Versuchen Sie nun die Fläche zu skizzieren.

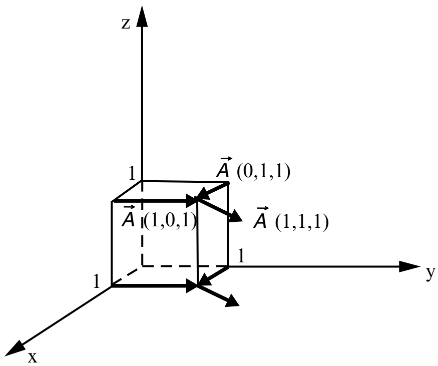
→ 30

53

$\vec{A}(1,0,1) = (0,1,0)$

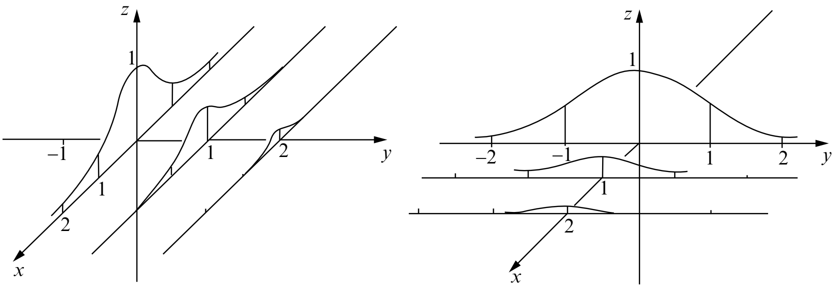
$\vec{A}(1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\vec{A}(0,1,1) = (1,0,0)$



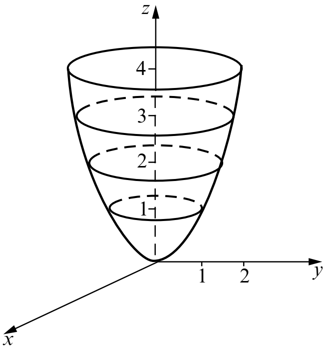
→ 54

6



Es zeichnet sich ab ein Berg mit der Kuppe bei $x = 0$ und $y = 0$. Die Fläche ist der im Lehrbuch behandelten Fläche ähnlich. Im Folgenden wollen wir uns die Technik des Skizzierens von Funktionen mit zwei Veränderlichen systematisch erarbeiten. --------▷ 7

30



Aufgrund der Schnittkurven können wir sagen, dass die Gleichung $z = x^2 + y^2$ ein Paraboloid darstellt.

--------------------▷ 31

54

Gegeben ist wieder $\vec{A}(x, y, z) = \dfrac{(y, x, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

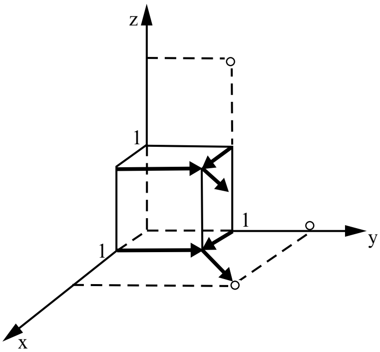
Berechnen und zeichnen Sie noch:

$\vec{A}(2,0,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{A}(2,2,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{A}(0,2,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\vec{A}(0,1,2) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

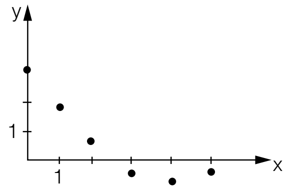


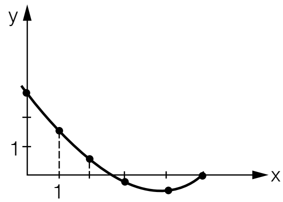
--------------------▷ 55

7

Will man die Kurve für eine Funktion *einer* Veränderlichen skizzieren, kann man bekanntlich zwei Wege gehen.
Weg 1:
Man erstellt sich eine Wertetabelle für $y = f(x)$, überträgt die Punkt in das x-y-Koordinatensystem und legt eine Kurve durch die Punkte.

x	$y = f(x)$
0	$f(0)$
1	$f(1)$
2	$f(2)$
.	.
.	.





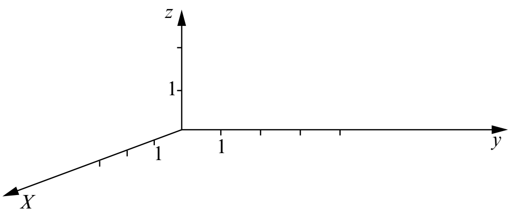
---------------------▷ 8

31

Es soll die folgende Funktion skizziert werden:

$$z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$$

Zeichnen Sie zunächst den Schnitt mit der y-z-Ebene: $z(0, y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

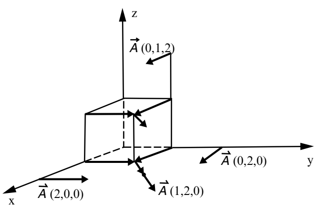


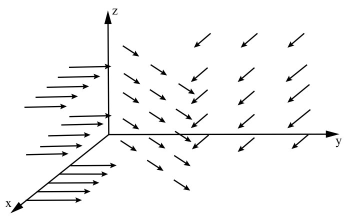
---------------------▷ 32

55

$$\vec{A}(2,0,0) = \frac{1}{2}(0,2,0) = (0,1,0)$$
$$\vec{A}(2,2,0) = \frac{1}{\sqrt{8}}(2,2,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$
$$\vec{A}(0,2,0) = \frac{1}{2}(2,0,0) = (1,0,0)$$
$$\vec{A}(0,1,2) = (1,0,0)$$

Setzen wir das Verfahren fort, erhalten wir das Bild rechts:





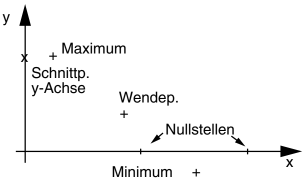
---------------------▷ 56

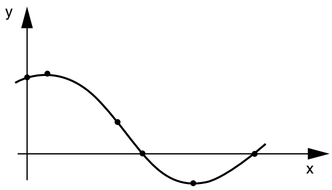
8

Weg 2: Man sucht charakteristische Werte der Funktion wie

Schnittpunkte mit der x-Achse	(indem man y = 0 setzt)
Schnittpunkte mit der y-Achse	(x = 0)
Maxima und Minima	$y' = 0;\ y'' < 0$ bzw. $y'' > 0$)
Asymptoten	$\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$
Wendepunkte	($y'' = 0$)

Polstellen $(y \to \infty)$



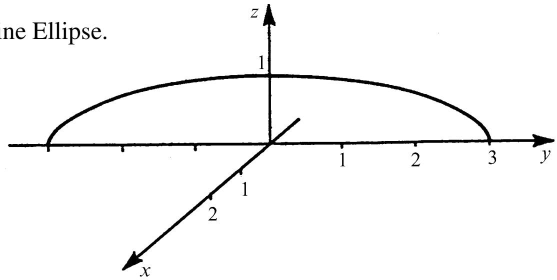


Damit kann die Kurve oft grob skizziert werden.

▷ 9

32

$z(0,y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ Dies ist eine Ellipse.



Zeichnen Sie jetzt den Schnitt mit der x-z-Ebene dazu.

$z(x,0) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

▷ 33

56

Spezielle Vektorfelder

Skizzieren Sie während der Bearbeitung des Abschnittes jeweils die diskutierten Vektorfelder auf Zetteln.

STUDIEREN SIE im Lehrbuch 13.5 Spezielle Vektorfelder
Lehrbuch, Seite 19-22

BEARBEITEN SIE DANACH Lehrschritt ▷ 57