Mit der Sprache der Mathematik vertraut werden

1

In diesem Kapitel ...

- Die Terminologie und Grundsätze der Mathematik einführen
- Den Aufbau von Sätzen und Gleichungen miteinander vergleichen, um mehr Klarheit zu erhalten
- Bilder zum besseren Verständnis nutzen
- Tabellen und Diagramme zum Ordnen der Informationen heranziehen

Vor langer Zeit beschlossen einige Mathematiker, ihre umständliche Wortsprache durch einfache Symbole und Zeichen zu ersetzen. Das Problem bei dieser Idee bestand darin, dass eine komplett neue Sprache erfunden wurde und Sie heute vor der Aufgabe stehen, diese kryptische Symbolsprache der Mathematik in unsere gewohnte Wortsprache und umgekehrt übersetzen zu müssen. Die Rechenoperationen werden mit Zeichen wie +, –, × und ÷ gekennzeichnet. In algebraischen Gleichungen werden Buchstaben und spezielle Buchstaben- und Ziffernfolgen verwendet, um die Beziehungen zwischen bestimmten Symbolen zu beschreiben.

In diesem Kapitel werde ich Ihre bereits vorhandenen Grundkenntnisse der mathematischen Sprache wieder auffrischen. Ich wiederhole für Sie das Vokabular aus Algebra und Geometrie und zeige Ihnen Beispiele mit den entsprechenden Symbolen und Rechenoperationen.

Ein und dieselbe Sprache sprechen

Worte in der Mathematik sind stets sehr präzise. Die Worte bedeuten immer dasselbe, egal wo oder von wem sie gelesen werden. Solch streng präzise Bezeichnungen mögen auf gewisse Weise einschränkend erscheinen, aber diese Form der Genauigkeit ist auch notwendig – schließlich wollen Sie sicher sein, dass Sie sich auf die Bedeutung einer mathematischen Gleichung oder eines mathematischen Ausdrucks immer fest verlassen können, egal wann Sie damit arbeiten.

In der Mathematik beschreibt zum Beispiel der Begriff *rational* einen bestimmten Zahlen- oder Funktionstyp. Eine Person wird *rational* genannt, wenn sie oder er sich stets kontrolliert und logisch verhält. Eine Zahl ist dann rational, wenn sie sich ähnlich ebenfalls ordentlich und strukturiert verhält. Wenn Sie also den Begriff rational benutzen, um eine Zahl zu beschreiben und wenn die Person, der sie das erklären ebenfalls weiß, was eine rationale Zahl ist, müssen Sie nicht erst langatmig und umfassend erklären, was Sie eigentlich meinen. In diesem Fall sprechen Sie beide ein und dieselbe Sprache.

Zahlen definieren

Zahlen werden anhand ihrer Eigenschaften definiert. Eine Zahl kann dabei mehr als nur einer Klassifizierung zugeordnet werden. Die Zahl *2* ist zum Beispiel sowohl *ganzzahlig, gerade,* als auch eine *Primzahl*. Es ist immer hilfreich zu wissen, wie Zahlen klassifiziert werden, besonders wenn Sie es mit einer Aufgabe zu tun haben, für deren Lösung ein ganz bestimmter Zahlentyp gesucht wird.

Zahlen benennen

Alle Zahlen haben eigene Namen, die Sie im Alltag verwenden. Wenn Sie zum Beispiel eine Telefonnummer notieren, die Ihnen jemand diktiert, hören Sie *null-eins-drei-null-neun-acht-sieben-drei-drei* und schreiben entsprechend 0130-98733. Andere Bezeichnungen weisen hingegen auf die Klassifizierung von Zahlen hin.

- ✔ **Natürliche Zahlen (zählbar):** Alle beim Zählen verwendeten positiven Zahlen von 1 bis unendlich: 1, 2, 3, 4, 5…
- ✔ **Ganze Zahlen:** Alle positiven und negativen ganzen Zahlen inklusive Null: … –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3…
- ✔ **Rationale Zahlen:** Alle Zahlen der Form $\frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen sind und q niemals Null sein kann: zum Beispiel $\frac{3}{4}, \frac{19}{8}, -\frac{5}{21}, \frac{24}{6}$ und so weiter.
- ✔ **Gerade Zahlen:** Alle Zahlen, die ohne Rest durch 2 teilbar sind: …–4, –2, 0, 2, 4, 6…
- ✔ **Ungerade Zahlen:** Alle Zahlen, die nur mit Rest durch 2 teilbar sind: …–3, –1, 1, 3, 5, 7…
- ✔ **Primzahlen:** Diese natürlichen Zahlen sind nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilbar: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29…
- ✔ **Zusammengesetzte Zahlen:** Alle Zahlen, die keine Primzahlen sind; alle natürliche Zahlen, die ohne Rest auch durch andere Zahlen als 1 und sich selbst teilbar sind: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15…

Zahlen in Beziehung setzen

Zahlen der gleichen oder auch verschiedener Kategorien können oftmals auch auf anderen Wegen miteinander in Beziehung gesetzt werden, um Aufgaben zu lösen. Wenn Sie zum Beispiel die *Vielfachen von Fünf* bestimmen möchten, müssen Sie dazu Zahlen aus den Bereichen der ganzen, geraden und auch ungeraden Zahlen wählen – Zahlen aus verschiedenen Kategorien bilden hier eine neue eigene Gruppe.

- ✔ **Fortlaufende Zahlen:** Eine Auflistung von Zahlen von klein nach groß mit gleich großen Abständen: 22, 33, 44, 55… sind zum Beispiel fortlaufende Vielfache von 11.
- ✔ **Vielfache:** Alle Zahlen mit einem gemeinsamen Multiplikator: 21, 28 und 63 sind zum Beispiel Vielfache von 7.

Geometrisch denken

Geometrische Formen tauchen häufig in mathematischen Anwendungen auf – und auch im wahren Leben. Geometrische Formen können benannt, klassifiziert und charakterisiert werden. Außerdem können geometrische Figuren auf verschiedene Arten ausgemessen und berechnet werden. Bei ebenen Figuren können die Längen der einzelnen Seiten, der Umfang und auch der Flächeninhalt bestimmt werden. Dreidimensionale Figuren besitzen eine Oberfläche und ein Volumen. Sie finden alle Formeln, die Sie zur Berechnung geometrischer Figuren benötigen, auf der Schummelseite, sowie in den Kapiteln 18, 19 und 20 zusammengefasst. In diesem Kapitel erkläre ich Ihnen hingegen, was die einzelnen Messgrößen bedeuten.

Den Umfang umarmen

Der *Umfang* ist ein lineares Maß, das mit Längeneinheiten wie Zentimeter, Dezimeter, Meter, und Kilometer berechnet werden kann. Der Umfang ist auch ein Abstandsmaß – er beschreibt die Weglänge ausgehend von einem Punkt um die Außenkante einer ebenen Form herum, bis man erneut auf diesen Punkt trifft. Der Umfang einer flachen geometrischen Form, die aus mehreren Linien zusammengesetzt ist, entspricht der Summe der Seitenlängen aller Einzellinien. Ein Kreis besitzt ebenfalls einen Umfang, der immer etwas größer ist als der dreifache Kreisdurchmesser. In Abbildung 1.1 sehen Sie verschiedene geometrische Figuren und die dazugehörigen Umfänge.

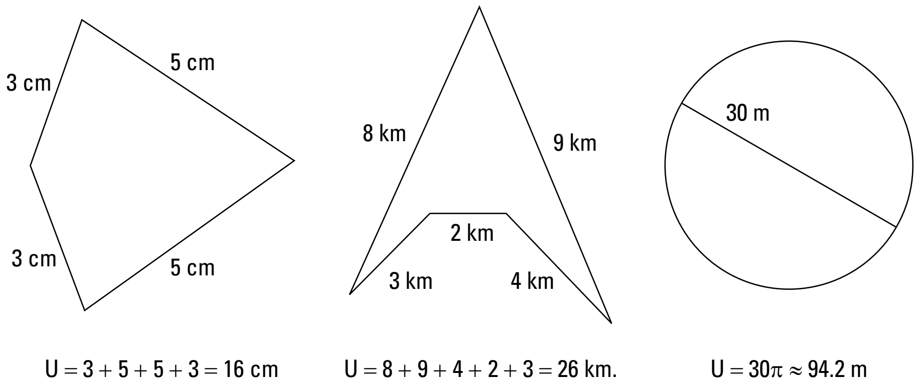

Abbildung 1.1: Addieren Sie die Längen der einzelnen Kanten einer Figur, um den Umfang zu berechnen

Eine Fläche zusammenfügen

Die *Fläche* oder der *Flächeninhalt* einer geometrischen Figur ist eine zweidimensionale Größe. Über die Fläche können Sie beschreiben, wie viele Quadrate definierter Größe in eine geometrische Figur hineinpassen. Und wenn eine Figur kein Quadrat ist oder auch keine rechten Winkel besitzt, müssen Sie die Quadrate zurechtstutzen und die Bruchstücke hinterher wieder zusammenfügen – so erhalten Sie schließlich auch den Flächeninhalt von nicht-quadratischen Figuren. Es ist ähnlich wie beim Fliesenverlegen – auch dort müssen Sie meist einige der Fliesen zurechtschneiden, damit der Boden schließlich vollständig gefliest ist, auch in den schiefen Ecken. Zum Glück gibt es Formeln, die Ihnen die schwierige Arbeit des Wiederzusammensetzens der Fliesen-Bruchstücke bei der Berechnung von Flächeninhalten erleichtern.

In Abbildung 1.2 sehen Sie ein Dreieck, das eine Fläche von genau 12 Quadrateinheiten einnimmt. Versuchen Sie doch einmal herauszufinden, wie sich die vielen Bruchstücke zu diesen zwölf gleich großen Quadraten wieder zusammensetzen lassen. Wenn Ihnen das zu schwierig ist, können Sie den Flächeninhalt des Dreiecks aber auch einfacher mit der passenden Formel berechnen.

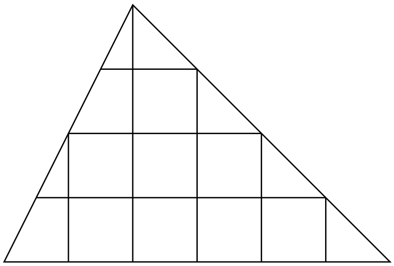

Abbildung 1.2: Wie viele Quadrate befinden sich in dem Dreieck?

An die Oberfläche kommen

Die Oberfläche eines dreidimensionalen Körpers ist die Summe der Teilflächen all seiner Seiten. Ein Körper mit vier Seiten besteht zum Beispiel aus vier dreieckigen Teilflächen, also müssen Sie die Flächeninhalte dieser vier Teilflächen addieren, um die gesamte Oberfläche des Körpers zu erhalten. Und wie berechnen Sie die Flächeninhalte der vier Seitenflächen? Dafür benutzen Sie am besten die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks dieser speziellen Form – oder zählen Sie doch wieder Quadrate! In Abbildung 1.3 sehen Sie drei der sechs Seitenflächen eines rechteckigen Prismas und wie jede Seite mit einer bestimmten Anzahl von Quadrateinheiten ausgefüllt werden kann.

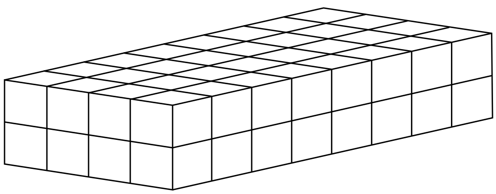

Abbildung 1.3: Wie viel Papier werden Sie wohl brauchen, um dieses Paket komplett einzuwickeln?

Das Prisma in Abbildung 1.3 besitzt eine Oberfläche, die der Gesamtfläche von 112 Quadrateinheiten entspricht. So viele Quadrate bedecken also insgesamt die sechs Teilflächen des dreidimensionalen Körpers. Aber Sie haben recht – das Rechnen mit Formeln ist natürlich viel einfacher als mühsames Quadratezählen.

Das Volumen bezwingen

Das *Volumen* eines Körpers stellt eine dreidimensionale Einheit dar. Wenn Sie ein Volumen berechnen, bestimmen Sie, wie viele Würfeleinheiten (denken Sie an Zuckerstückchen oder Spielwürfel) in eine Figur hinein passen. Bei Körpern mit schrägen Seiten müssen Sie die Würfel auch hier in Scheiben schneiden, kürzen oder auf andere Art passend zurecht stutzen, damit schließlich alle Würfel in der Figur Platz finden. Abbildung 1.4 soll Ihnen verdeutlichen, wie Sie mit Hilfe mehrerer aneinandergelegter Würfeleinheiten das Volumen eines Körpers bestimmen können – aber alternativ stehen Ihnen für diese Aufgabe natürlich auch wieder praktische Formeln zur Verfügung, die Ihnen die Arbeit deutlich erleichtern.

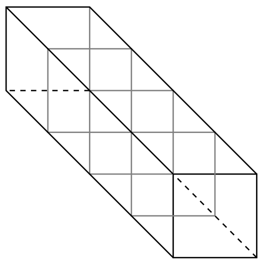

Abbildung 1.4: Würfel in Reih und Glied

Formeln formulieren

Die meisten Menschen haben eine Schwäche für Geld – auf die ein oder andere Weise. Schließlich regiert Geld die Welt und ist als universelles Zahlmittel für die Dinge des alltäglichen und nicht so alltäglichen Lebens unerlässlich. Finanzformeln helfen bei der Berechnung von Aufgaben, die sich um Geld drehen.

Man kann Finanzformeln in zwei Gruppen unterteilen: so gibt es Formeln für Zinsberechnungen und Formeln zur Einkommensberechnung. Bei Zinsberechnungen spielt immer ein bestimmter Prozentsatz eine Rolle, der erst in eine Dezimalzahl umgewandelt werden muss, bevor er in die Formel eingesetzt werden kann. Dafür müssen Sie lediglich das Komma um zwei Stellen in der Prozentzahl nach links verschieben. 3,4 % entspricht dann zum Beispiel 0,034 und 67 % (oder zur Sichtbarmachung des Kommas 67,0 %) wäre umgerechnet 0,67.

Bei den Zinsformeln sind zwei Arten von Gleichungen zu unterscheiden: einfache Zinsformeln und Zinseszinsformeln. Die einfache Zinsformel lautet $Z = Krt$. Das Z steht für die Zinsen, die Sie mit einem bestimmten Geldbetrag verdienen – bzw. für die Zinsen, die Sie jemandem schulden. K beschreibt einen bestimmten Geldbetrag, das sogenannte Kapital – also das Geld, das Sie investieren oder borgen wollen. Das r steht für die Zinsrate – also, wie oben erklärt, die vom Prozentsatz abgeleitete Dezimalzahl. Und t ist schließlich die Laufzeit und wird für gewöhnlich in Jahren angegeben.

Morgen, Morgen, oh wär' doch schon Morgen…«

Wenn gestern der Tag nach Mittwoch ist und wenn morgen der Tag vor Sonntag ist, welchen Tag haben wir dann heute?

Antwort: Freitag.

Zinseszins bedeutet, dass die Zinsrate auf mehrere untergeordnete Zeitabschnitte aufgeteilt wird (alle drei Monate, zweimal pro Jahr, täglich, usw.), dann der Zinsertrag zunächst für einen Zeitabschnitt berechnet und zum Ausgangskapital addiert wird. Diese neue Summe dient dann als neuer Kapitalbetrag für die Berechnung der Zinsen des nächsten Zeitabschnitts und so weiter. Wie Sie sich vielleicht denken können, fällt der Gewinn bei Zinseszinsberechnungen höher aus als bei einfachen Zinsformeln. Die Formel zur Berechnung des Zinseszins lautet

$$K = K_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Das K steht dabei für den gesamten Geldbetrag – also das Ausgangskapital K_0 plus alle anfallenden Zinsbeträge. Die Variablen r und t haben dieselbe Bedeutung wie in der Formel zur einfachen Zinsberechnung, also r = Zinsrate und t = Zeit. Die Variable n steht für die Häufigkeit pro Jahr, mit der ein Zinseszinsbetrag berechnet wird. Die meisten Banken verzinsen vierteljährlich, sodass in diesen Fällen $n = 4$ gilt.

Rechenarten interpretieren

Was wäre die Mathematik ohne Rechenoperationen? Die Grundrechenarten sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Dann kommen noch Potenzieren und Wurzelziehen hinzu. Es gibt auch noch weitere Rechenarten, aber für die Lektüre dieses Buches genügt es, wenn Sie mit diesen sechs Grundrechenarten etwas anfangen können.

Ergebnisse benennen

Jede Rechenart besitzt ihr eigenes Ergebnis, und es ist schlicht bequemer die verschiedenen Ergebnisbezeichnungen zu kennen, als sich in ausschweifenden Erklärungen zu verlieren, um zu beschreiben, was bei einer Aufgabe eigentlich herauskommen soll. So sparen Sie Worte, Platz, Zeit und Tinte. Im Folgenden sind die gebräuchlichsten Ergebnisbezeichnungen aufgelistet.

- ✔ **Summe:** Das Ergebnis der Addition.
- ✔ **Differenz:** Das Ergebnis der Subtraktion.
- ✔ **Produkt:** Das Ergebnis der Multiplikation.
- ✔ **Verdopplung:** Das Ergebnis einer Multiplikation mit zwei.
- ✔ **Verdreifachung:** Das Ergebnis einer Multiplikation mit drei.

- **Quotient:** Das Ergebnis der Division.
- **Hälfte:** Das Ergebnis einer Division durch zwei.

Variablen bestimmen

Eine *Variable* ist etwas Veränderliches. In der Mathematik wird eine Variable als Buchstabe dargestellt – meist wird ein Buchstabe vom Ende des Alphabets gewählt – und steht *immer* für eine (unbekannte) *Zahl*. Wenn Sie zum Beispiel eine Aufgabe über das Alter von Tim und Tobias lösen wollen, können Sie das *Alter* von Tim mit x bezeichnen, nicht aber Tim selbst.

Wenn Sie eine Aufgabe lösen, ist es ratsam, sich Notizen darüber zu machen, welche Variable wofür stehen soll, damit Sie es später einfacher haben, eine passende Gleichung zu formulieren.

Symbole und Worte koordinieren

Eine besondere Herausforderung vieler Textaufgaben besteht in ihren Unmengen von *Worten*! Sie müssen zuerst die Worte in Symbole und Gleichungen umwandeln, wenn Sie auf die richtige Lösung kommen wollen. Wenn Sie das geschafft haben, wird plötzlich alles viel einfacher! In Tabelle 1.1 sind einige typische Bedeutungen von Worten in der Symbolsprache der Mathematik zusammen mit Beispielen aufgeführt.

Worte	Symbol	Beispiel
ist, sind	=	Tobias ist doppelt so alt wie Tina: $x = 2y$, wobei x für das Alter von Tobias und y für Tinas Alter steht.
und, gesamt	+	Sechs Dutzend und vier Sechserpack Eier: $12x + 6y$, wobei x für die Anzahl der Dutzend steht und y für die Anzahl der Sechserpacks; jede Variable wird mit dem dazugehörigen Zahlenwert multipliziert (Dutzend = 12, Sechserpack = 6).
weniger, geringer	–	Torben arbeitet 3 h weniger als Tim: $x = y - 3$, wobei x die Stundenanzahl beschreibt, die Torben gearbeitet hat und y für die Arbeitsstunden von Tim steht.
von, mal	×	Die Hälfte von Claras Geld: $\frac{x}{2}$, wobei x für Claras Geldbetrag steht.
Verhältnis	÷	Das Verhältnis von Euros zu Cents: $\frac{x}{y}$, wobei x für die Anzahl der Euros und y für die Anzahl der Cents steht.
ungefähr, annähernd, etwa, ca.	≈	Der Bruch $\frac{22}{7}$ entspricht annähernd dem Wert 3,14: $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$

Tabelle 1.1: Was Worte in der Sprache der Mathematik bedeuten

Ein Bild zeichnen

Es ist ungemein hilfreich bei der Lösung einer Sachaufgabe, wenn Sie sich dazu ein Bild zeichnen können. Die meisten Menschen sind sehr visuell veranlagt – sie verstehen Dinge oft besser, wenn sie etwas dazu aufschreiben und/oder eine veranschaulichende Zeichnung zu Papier bringen können.

Beziehungen veranschaulichen

Die Worte in einer Sachaufgabe stellen die Verbindungen oder die Beziehungen der einzelnen Teile einer Situation dar. Eine Zeichnung kann Ihnen dabei helfen, diese Verbindungen zu sehen und gibt Ihnen wertvolle Hinweise dazu, wie Sie der Lösung näher kommen können.

Betrachten Sie zum Beispiel eine Sachaufgabe, die mit den folgen Worten beginnt: »Ein Flugzeug fliegt mit 600 km/h nach Osten, während ein anderes Flugzeug mit 500 km/h nach Norden fliegt…«« Natürlich benötigen Sie noch weitere Informationen, um Frage und Lösung für diese Aufgabe bestimmen zu können, aber lassen Sie mich nur anhand dieses Beispiels erklären, wie Sie die Aufgabe mit einer Zeichnung zu Papier bringen können. Schauen Sie dazu auch Abbildung 1.5 an, in der zwei mögliche Szenarien zur Lösung der Aufgabe dargestellt sind.

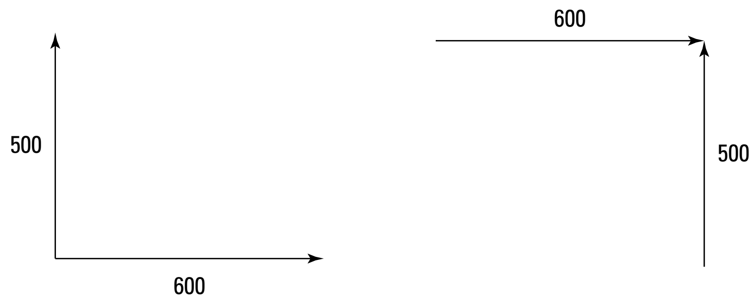

Abbildung 1.5: Die beiden Flugzeuge fliegen voneinander weg oder aufeinander zu

In der Aufgabe fehlen noch die konkreten Angaben dazu, was berechnet werden soll, aber beide Zeichnungen legen Ihnen die Vermutung nahe, dass ein Dreieck gebildet werden könnte, wenn Sie die beiden freien Enden der Linien miteinander verbinden. Rechtwinklige Dreiecke weisen oft auf den Satz des Pythagoras oder auf eine Aufgabe zur Umfangs- oder Flächenberechnung hin. In jedem Fall verdeutlichen Ihnen die Zeichnungen die Situation und machen Interpretationen um vieles leichter.

Ein anderes Beispiel, in dem eine Zeichnung zur Lösungsfindung sehr aufschlussreich sein kann, ist eine Sachaufgabe, in der Sie ein Stück Papier zurecht schneiden müssen. Die Aufgabe beginnt mit den Worten: »Bei einem rechteckigen Blatt Papier sind gleich große Quadrate aus allen Ecken herausgeschnitten…« Sie zeichnen also ein Rechteck und zeigen dann, wie es aussieht, wenn Sie vier gleich große Quadrate aus den Ecken entfernen. Abbildung 1.6 zeigt Ihnen, was gemeint ist.

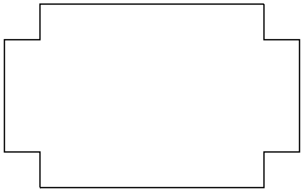

Abbildung 1.6: Schneiden Sie Quadrate aus den Ecken des Rechtecks

Sie sehen anhand der Zeichnung, dass die Seitenkanten des originalen Rechtecks um zweimal eine unbekannte Länge gekürzt sind. Die Zeichnung erleichtert es Ihnen, die Beziehung zwischen dem Ausgangsrechteck und der zurecht geschnittenen Form zu visualisieren.

Ordentlich beschriften

Zeichnungen sind hervorragend dafür geeignet, die Worte in einer Aufgabe sinngebend zu ordnen, aber nicht weniger wichtig sind auch die Beschriftungen, mit denen Sie eine solche Zeichnung versehen müssen. Durch die Beschriftung der verschiedenen Teile – besonders mit Einheiten in cm, km/h und so weiter – verbessern Sie Ihre Chancen, einen Ausdruck oder eine Gleichung zu finden, der/die den Sachverhalt wiedergibt.

Sie lesen zum Beispiel: »Ein trapezförmiges Stück Land ist zwischen den beiden parallelen Seiten 300 m breit, die beiden nicht parallelen Seiten sind jeweils 400 und 500 m lang und die beiden parallelen Seiten haben jeweils eine Länge von 600 und 1200 m.« In dieser Aufgabe sind fünf verschiedene Zahlen enthalten und es ist nun an Ihnen, diese Zahlen sinnvoll zu ordnen. Abbildung 1.7 zeigt, wie Sie die verschiedenen Längenangaben aus der Sachaufgabe heraus sortieren können.

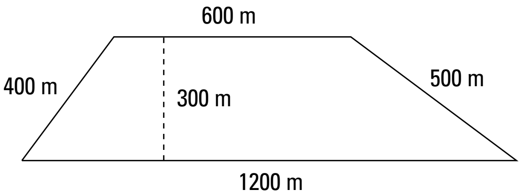

Abbildung 1.7: Das Trapez hat eine Höhe von 300 m

Wer hat den schwarzen Kater gesehen?

Ein tiefschwarzer Kater schlich über eine Straße – in der gesamten Stadt war die Straßenbeleuchtung abgeschaltet. Nicht eine einzige Laterne hatte seit Stunden mehr geleuchtet. Gerade als der Kater die Mitte der Straße überqueren wollte, raste ein Jeep mit kaputten Scheinwerfern um die Ecke auf den Kater zu. Kurz bevor der Jeep zu der Stelle kam, wo der Kater erschrocken am Boden kauerte, wich er zur Seite aus, um einen Zusammenstoß zu verhindern. Wie konnte der Fahrer des Jeeps den Kater rechtzeitig sehen, um noch ausweichen zu können?

Antwort: Die Situation ereignete sich mitten am Tag. Es war egal, dass die Straßenbeleuchtung aus war – jeder konnte die Straße und den Kater darauf auch ohne Scheinwerfer klar erkennen.

Eine Tabelle oder Graphik erstellen

Eine sehr nette Möglichkeit zur Veranschaulichung einer Sachaufgabe ist es, eine Liste verschiedener Lösungsmöglichkeiten zu erstellen und herauszufinden, was am besten in diese Liste hinein passt oder welches Muster sich herauskristallisiert. Muster weisen oft auf eine Formel oder Gleichung hin; die Werte in der Liste geben manchmal sogar die genaue Antwort vor. Die Erstellung einer Graphik kann Ihnen ebenso wie eine Zeichnung dabei helfen, eine Sachaufgabe zu lösen.

Werte finden

Bei der Erstellung einer Tabelle oder Graphik müssen Sie eine Variable bestimmen, die für einen Teil der Aufgabe steht und nachvollziehen, wie sich das Ergebnis ändert, wenn Sie diese Variable systematisch verändern. Wenn Sie zum Beispiel zwei Zahlen herausfinden wollen, deren Produkt 60 und deren Summe so klein wie möglich ist, nennen Sie die erste dieser beiden Zahlen erst einmal x. Die andere unbekannte Zahl nennen Sie dann $\frac{60}{x}$. Addieren Sie nun die beiden Zahlen, um zu sehen, was dabei herauskommt. In Tabelle 1.2 sehen Sie verschiedene mögliche Werte der beiden Zahlen und deren Summen – wenn Sie beide addieren.

x (die erste unbekannte Zahl)	$\frac{60}{x}$ (die zweite unbekannte Zahl)	Die Summe beider Zahlen
1	60	1 + 60 = 61
2	30	2 + 30 = 32
3	20	3 + 20 = 23
4	15	4 + 15 = 19
5	12	5 + 12 = 17
6	10	6 + 10 = 16
10	6	10 + 6 = 16

Tabelle 1.2: Die kleinstmögliche Summe finden

Das soll genügen, denn von hier an erhält man wieder dieselben Zahlenpaar nur in umgekehrter Reihenfolge. Sofern keine gebrochenen Zahlen erlaubt sind, dann sind die beiden gesuchten Zahlen mit dem Produkt von 60 und der kleinstmöglichen Summe gleich 6 und 10.

Schrittweise vorwärts

Wenn Sie eine Tabelle oder Graphik erstellen, möchten Sie sicherlich so systematisch wie möglich vorgehen, um ja nichts zu übersehen, besonders nicht die richtige Lösung. Nachdem Sie eine Variable bestimmt haben, die eine bestimmte Menge in der Aufgabe repräsentiert, müssen Sie in logischen Schritten weiter vorwärts gehen – einfache, doppelte oder auch halbe Schritte oder was immer Ihnen angemessen erscheint. In der obigen Tabelle 1.2 können Sie sehen, wie ich mich zunächst in Einerschritten vorangetastet habe bis ich zur Zahl 6 kam. Der Nachfolger von 6 ist 7, aber 7 lässt sich nicht mit einer anderen ganzen Zahl zum Produkt von 60 multiplizieren, also habe ich diese Zahl einfach weggelassen. Und auch wenn in der Tabelle diese Denkarbeit nicht dargestellt ist, habe ich das Gleiche auch mit den Zahlen 8 und 9 ausprobiert und auch diese verworfen, da sie einfach nicht zur Aufgabe passten. Wenn Sie es jedoch mit komplizierteren Aufgaben als dieser zu tun haben, kann es gut sein, dass Sie einzelne Rechenschritte lieber nicht auslassen möchten – in diesen Fällen ist es tatsächlich besser, sie alle zu zeigen.