

DUDEN

ABI GENIAL

MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Mit **Original-
prüfungen** und
Musterlösungen
online auf
www.lernhelfer.de

So funktioniert Abi genial

Wissen einprägen mit dem Schnell-Merk-System

- **Kapitelstarter:** Basiswissen zu jedem Kapitel
- **Klar gegliederter Stoff:** schnelles Auffinden und gute Orientierung durch Merkwissen (▶) und Infokästen
- **Topthemen:** Vertiefung des zentralen Lernstoffs
- **Prüfungsratgeber und Prüfungsaufgaben:** alles über Anforderungsbereiche und Operatoren in einem Extrakapitel sowie typische Prüfungsaufgaben zu allen Unterrichtsthemen

Prüfungstraining mit Abitur-Originalklausuren

- **Originalprüfungen mit Lösungen passend zum Buch:** Auf www.lernhelfer.de/abigenial gibt es das exklusive Abi-Genial-Lernpaket für nur 1,- Euro. Darin enthalten sind vier Originalprüfungen mit ausführlichen Musterlösungen als Pdf.

Meilensteine der Mathematik



um 325 v. Chr.

Euklid von Alexandria entwickelt einen axiomatischen Aufbau der Geometrie



1636

Pierre de Fermat konzipiert grundsätzlich die analytische Geometrie

1637

René Descartes führt Koordinatensysteme zur algebraischen Behandlung geometrischer Probleme ein

1755

Funktionen werden zum Gegenstand der Differenzialrechnung bei Leonard Euler



1794

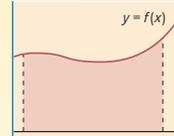
Carl Friedrich Gauß verwendet die mittlere quadratische Abweichung als Streuungsmaß

1831

Carl Friedrich Gauß führt den Begriff der komplexen Zahl ein

1843

William Roward Hamilton definiert das Skalarprodukt

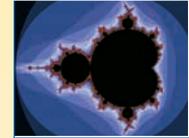


1854

Neufassung des Begriffs des Integrals durch Georg Friedrich Bernhard Riemann

1918

Richard von Mises entwickelt eine statistische Wahrscheinlichkeitstheorie



1975

Benoît Mandelbrot entdeckt universelle Strukturen in nicht linearen dynamischen Systemen



287–212 v. Chr.

Archimedes von Syrakus bestimmt Flächeninhalte an Parabeln und Kreisen, die Oberfläche und das Volumen der Kugel



1654

Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit dem Briefwechsel zwischen Chevalier de Méré und Blaise Pascal zum Glücksspiel

1664–1666

Isaac Newton entwickelt seine Fluxionsrechnung

1673–1676

Gottfried Wilhelm Leibniz entwickelt die Grundlagen der Infinitesimalrechnung



1837

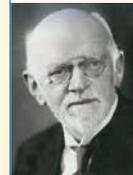
Siméon Denis Poisson gibt Formeln für Erwartungswert und Varianz einer Binomialverteilung an

1812

Pierre Simon Laplace veröffentlicht die Hauptsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung

1888

Giuseppe Peano gibt eine axiomatische Definition des Vektorraums



1899

David Hilbert stellt ein Axiomensystem der Geometrie ohne explizite Definition der Begriffe Punkt und Gerade auf



1995

Andrew Wiles gelingt der Beweis der fermatschen Vermutung

1933

Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff formuliert endgültig ein Axiomensystem zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Duden

ABI GENIAL

MATHEMATIK

DAS SCHNELL-MERK-SYSTEM

Dudenverlag

Berlin

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen 6

Wichtige Definitionen 6

1.1 Darstellung und Beschreibung 8

1.2 Eigenschaften 10

1.3 Verknüpfen und Verketteten 14

TOPTHEMA

Funktionenscharen 16

1.4 Funktionsklassen 18

1.5 Zahlenfolgen 33

2. Gleichungen und Gleichungssysteme 36

Wichtige Definitionen 36

2.1 Quadratische Gleichungen 38

2.2 Wurzelgleichungen 39

2.3 Goniometrische Gleichungen 39

2.4 Exponential- und Logarithmengleichungen 41

2.5 Lineare Gleichungssysteme 42

TOPTHEMA

Gaußsches Eliminationsverfahren 44

3. Differenzialrechnung 48

Wichtige Definitionen 48

3.1 Grenzwertsätze 50

3.2 Stetigkeit von Funktionen 53

3.3 Ableitung einer Funktion 56

3.4 Differenzierungsregeln 57

3.5 Ableitungen elementarer Funktionen 61

3.6 Sätze über differenzierbare Funktionen 62

3.7	Funktionseigenschaften	64
3.8	Kurvendiskussion	71
3.9	Modellierung	72
	TOPTHEMA	
	Extremwertprobleme	76
4.	Integralrechnung	78
	Wichtige Definitionen	78
4.1	Integrale und Integrationsregeln	79
4.2	Bestimmtes Integral	80
4.3	Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	83
4.4	Integrationsmethoden	84
4.5	Berechnen bestimmter Integrale	86
4.6	Uneigentliche Integrale	89
	TOPTHEMA	
	Berechnung von Rotationskörpern	90
5.	Vektoren und Vektorräume	92
	Wichtige Definitionen	92
5.1	Rechnen mit Vektoren	93
5.2	Lagebeziehungen	97
5.3	Komponenten und Koordinaten von Vektoren	99
5.4	Koordinatensysteme	100
	TOPTHEMA	
	Skalar- und Vektorprodukt	102
5.5	Spatprodukt	106
5.6	Vektorräume	107

6.	Matrizen	110
	Wichtige Definitionen	110
	6.1 Spezielle Matrizen	111
	6.2 Rechnen mit Matrizen	112
	6.3 Inverse Matrizen	115
	6.4 Lineare Abbildungen	115
	TOPTHEMA	
	Übergangsmatrizen	116
7.	Analytische Geometrie	120
	Wichtige Definitionen	120
	7.1 Geraden in Ebene und Raum	121
	7.2 Ebenen	126
	TOPTHEMA	
	Ebenen in spezieller Lage	132
	7.3 Schnittwinkel	134
	7.4 Abstände	136
	7.5 Kreise und Kugeln	140
8.	Wahrscheinlichkeitsrechnung	146
	Wichtige Definitionen	146
	8.1 Beschreibung von Zufallsexperimenten	147
	TOPTHEMA	
	Ereignisse und Ereignisverknüpfungen	148
	8.2 Gleichverteilung	153
	8.3 Zählprinzipien	155
	8.4 Urnenmodelle	158
	8.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit	159
	8.6 Zufallsgrößen	161
	8.7 Binomialverteilung	166
	8.8 Weitere Verteilungen	171

9. **Beschreibende und beurteilende Statistik** 176

Wichtige Definitionen 176

9.1 Beschreibende Statistik 177

9.2 Beurteilende Statistik 181

TOPTHEMA

Testkonstruktion und -durchführung 187

Prüfungsratgeber und Prüfungsaufgaben 188

1 **MIND-MAP** Der Prüfungsstoff 188

2 **Die Prüfungsklausur** 190

2.1 Inhalt und Aufbau einer Klausur 190

2.2 Die Operatoren 191

3 **Thematische Prüfungsaufgaben** 195

3.1 Funktionen 195

3.2 Gleichungen und Gleichungssysteme 198

3.3 Differenzialrechnung 200

3.4 Integralrechnung 203

3.5 Vektoren und Vektorräume 205

3.6 Matrizen 207

3.7 Analytische Geometrie 210

3.8 Wahrscheinlichkeitsrechnung 212

3.9 Beschreibende und beurteilende Statistik 214

Anhang: Zeichen, Symbole und Abkürzungen 216

Register 219

1 Funktionen

Wichtige Definitionen

Abbildungen

Eine **Abbildung** ordnet den Elementen einer Menge D durch eine Vorschrift Elemente einer Menge W zu. Eine solche Abbildung (Zuordnung) nennt man

■ **mehrdeutig**, wenn mindestens einem $x \in D$ **mehr als ein** $y \in W$ zugeordnet wird,

■ **eindeutig**, wenn jedem $x \in D$ **genau ein** $y \in W$ zugeordnet wird,

■ **eineindeutig**, wenn außerdem noch zu jedem $y \in W$ **genau ein** $x \in D$ gehört.

Mehrdeutige Abbildung f_1 :

Jeder ganzen Zahl wird die Zahl zugeordnet, für die sie Teiler ist, also $1 \rightarrow 1$; $1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 2$; ...

Eindeutige Abbildung f_2 :

Jeder ganzen Zahl wird ihr Quadrat zugeordnet, also $0 \rightarrow 0$; $\pm 1 \rightarrow 1$; $\pm 2 \rightarrow 4$; $\pm 3 \rightarrow 9$; ...

Eineindeutige Abbildung f_3 :

Jeder reellen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet, also $0 \rightarrow 0$; $1 \rightarrow 2$; $0,5 \rightarrow 1$; $\pi \rightarrow 2\pi$ usw. Zu jeder reellen Zahl gehört auch *genau eine* reelle Zahl, die halb so groß ist.

Produktmengen

Eine Abbildung ist beschreibbar als Teilmenge der Produktmenge $D \times W$.

Die **Produktmenge** $D \times W$ ist die Menge aller geordneten Paare, deren erste Komponente ein Element aus D und deren zweite Komponente ein Element aus W ist.

$D = \mathbb{Z}$; $W = \mathbb{N}$

$D \times W = \{(0; 0), (0; 1), \dots, (-1; 0), (-1; 1), (-1; 2), \dots, (1; 0), (1; 1), (1; 2), \dots, (-2; 0), (-2; 1), (-2; 2), \dots\}$.

Abbildung f_2 von oben ist eine Teilmenge von $D \times W$.

$f_2 = \{(0; 0), (-1; 1), (1; 1), (-2; 4), (2; 4), \dots\}$

Funktionen

Eine **Funktion** f ist eine eindeutige Zuordnung (Abbildung) der Elemente zweier Mengen. Jedem Element x aus der Definitionsmenge D_f (dem **Definitionsbereich**) wird dabei genau ein Element y aus einer Wertemenge W_f (dem **Wertebereich**) zugeordnet.

Kurzform:

$f: x \mapsto y$ oder $f: x \mapsto f(x)$

Die Elemente $x \in D_f$ heißen **Argumente** von f , die zugeordneten Elemente $y \in W_f$ bzw. $f(x) \in W_f$ heißen **Funktionswerte**.

Die Gleichung $y = f(x)$ heißt **Funktionsgleichung** der Funktion f .

Reelle Funktionen

Sind Definitions- und Wertebereich Mengen reeller Zahlen, so spricht man von **reellen Funktionen**.

Eine Funktion kann auch zwei oder mehr unabhängige Variablen besitzen.

Bei zwei unabhängigen Variablen besteht der Definitionsbereich aus geordneten Paaren reeller Zahlen und der Wertebereich ist \mathbb{R} oder eine Teilmenge von \mathbb{R} . Man schreibt dann z.B. $z = f(x, y)$.

Messung der Lufttemperatur T zu bestimmten Uhrzeiten

Uhrzeit	4	6	8	20	22	24
T in °C	-3	-2	0	0	-1	-2

Hier gilt:

$D_f = \{4; 6; 8; 20; 22; 24\}$ $W_f = \mathbb{Z}$
(bei ganzzahliger Messung)
 $f = \{(4; -3), (6; -2), (8; 0), (20; 0), (22; -1), (24; -2)\}$

Jeder reellen Zahl wird ihre dritte Potenz zugeordnet.

Hier gilt:

$D_f = \mathbb{R}$; $W_f = \mathbb{R}$
 $f = \{(x; y) \mid y = x^3 \text{ und } x \in \mathbb{R}\}$,
also $f = \{(0; 0), (-2; -8), (0,5; 0,125), \dots\}$, $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Für den Flächeninhalt A eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b (jeweils auf Maßzahlen bezogen) gilt:

$A(a, b) = a \cdot b$.

Der Definitionsbereich von A ist die Menge $\{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}^+\}$, der Wertebereich ist \mathbb{R}^+ . Jedem Paar von Seitenlängen wird eindeutig ein Flächeninhalt zugeordnet.

1.1 Darstellung und Beschreibung

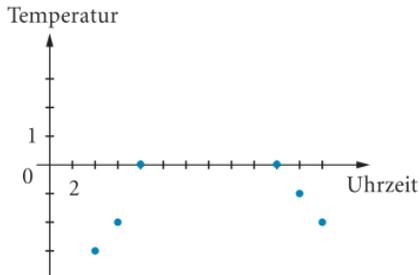
Für die Darstellung und Beschreibung reeller Funktionen kommen vor allem folgende Varianten in Frage:

- Angabe der (geordneten) **Paare** einander zugeordneter Elemente aus Definitions- und Wertebereich (nur möglich bei endlicher Paaranzahl);
- Beschreibung der Zuordnungsvorschrift in Worten (**Wortvorschrift**; verbale Beschreibung);
- Angabe einer die Zuordnung vermittelnden **Funktionsgleichung** $y = f(x)$ ($f(x)$ heißt dann **Funktionsterm**);
- Darstellung der einander zugeordneten Elemente in einer **Wertetabelle** (bei endlicher Paarzahl);
- Beschreibung durch **grafische Darstellungen**, z.B. durch ein Pfeildiagramm oder durch Deuten der Zahlenpaare als die Koordinaten von Punkten in einem Koordinatensystem, wodurch man einen Graphen der Funktion erhält.

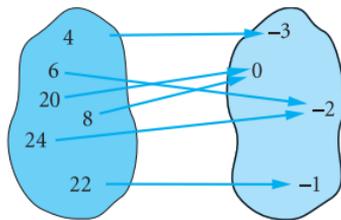
Darstellung und Beschreibung von Funktionen															
Variante	Beispiel Temperaturmessung														
Paarangabe	$(4; -3), (6; -2), (8; 0), (20; 0), (22; -1), (24; -2)$														
Wortvorschrift	Jedem Messzeitpunkt wird die gemessene Lufttemperatur zugeordnet														
Funktionsgleichung	(Angabe ist in diesem Falle nicht möglich)														
Wertetabelle	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Uhrzeit</th> <td>4</td> <td>6</td> <td>8</td> <td>20</td> <td>22</td> <td>24</td> </tr> <tr> <th>T in °C</th> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>0</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>-2</td> </tr> </thead> </table>	Uhrzeit	4	6	8	20	22	24	T in °C	-3	-2	0	0	-1	-2
Uhrzeit	4	6	8	20	22	24									
T in °C	-3	-2	0	0	-1	-2									

Darstellung und Beschreibung von Funktionen (Forts.)

grafische
Darstellung



Pfeildiagramm



Parameterdarstellung

Bei der Parameterdarstellung von Funktionen wird sowohl die Variable x als auch die Variable y jeweils durch eine Gleichung beschrieben, die einen (gemeinsamen) Parameter t als unabhängige Variable enthält. Es gilt also: $x = f_1(t)$ und $y = f_2(t)$.

Beispiel: Es sei $x = f_1(t) = \frac{1}{3}t$ und $y = f_2(t) = 6t$ mit $D_{f_1} = D_{f_2} =]-\infty; \infty[$ bzw. $-\infty < t < \infty$. Dann erhält man folgende Wertetabellen:

Wertetabelle für f_1 und f_2						
t	-9	-6	-3	0	3	6
$x = f_1(t) = \frac{t}{3}$	-3	-2	-1	0	1	2
$y = f_2(t) = 6t$	-54	-36	-18	0	18	36

1.2 Eigenschaften

Monotonie

Definition

Eine Funktion f heißt in einem Intervall I von D_f

monoton fallend,

monoton wachsend,

wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Gilt sogar

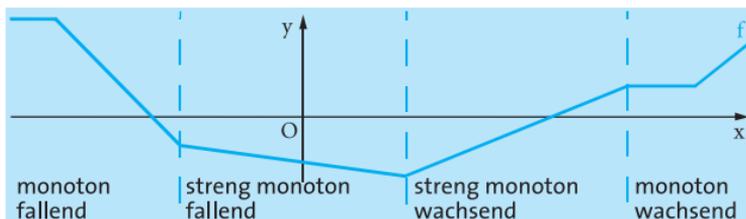
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

so heißt f

streng monoton fallend.

streng monoton wachsend.



Beschränktheit

Definition

Eine Funktion f heißt

nach oben beschränkt,

nach unten beschränkt,

wenn es eine Zahl $s_o \in \mathbb{R}$ gibt,

wenn es eine Zahl $s_u \in \mathbb{R}$ gibt,

sodass für alle $x \in D_f$ gilt:

$$f(x) \leq s_o$$

$$f(x) \geq s_u$$

Man nennt dann

s_o **obere Schranke** von f .

s_u **untere Schranke** von f .

Symmetrie

Gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f heißt

gerade Funktion,

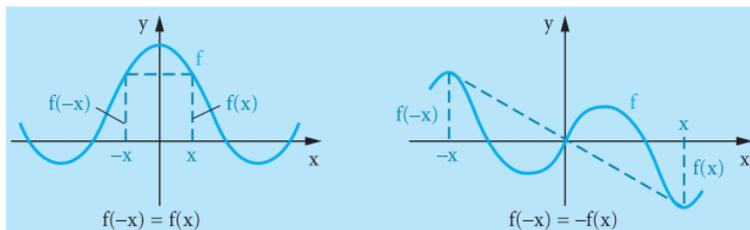
ungerade Funktion,

wenn mit der Zahl x stets auch $-x$
zum Definitionsbereich D_f von f gehört und wenn gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

- Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse.
- Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.



Beispiele: $f_1(x) = x^2$ ist eine gerade Funktion, denn

$$f_1(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_1(x).$$

$f_2(x) = x^3$ ist eine ungerade Funktion, denn

$$f_2(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f_2(x).$$

$f_3(x) = x^2 - x$ ist weder gerade noch ungerade, denn

$$f_3(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x, \text{ also verschieden von } f_3(x) \text{ und } -f_3(x).$$

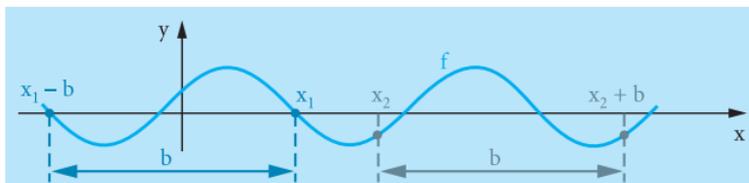
Periodizität

Definition

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn es eine Zahl $b > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in D_f$ gilt: $f(x + b) = f(x)$ ($x + b \in D_f$). Die kleinste derartige Zahl b wird **Periode** von f genannt.

Für eine periodische Funktion f mit $f(x + b) = f(x)$ gilt also:

- Im Abstand b wiederholen sich die Funktionswerte.
- Die Abschnitte des Graphen von f über den Intervallen $[x; x + b]$, $[x + b; x + 2b]$, $[x - 3b; x - 2b]$, ... aus D_f sind kongruent.



Umkehrbarkeit und Umkehrfunktionen

Definition

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt umkehrbar, wenn die durch sie vermittelte Zuordnung f **umkehrbar eindeutig** ist.

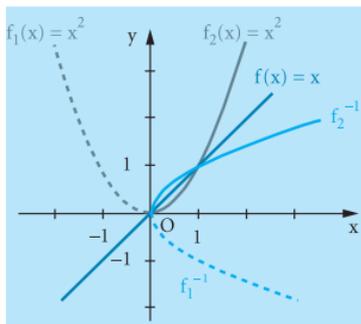
Zu jedem Element $y \in W_f$ gehört also auch genau ein $x \in D_f$. Das heißt: Für alle $x_1 \in D_f$ folgt aus $x_1 \neq x_2$ stets $f(x_1) \neq f(x_2)$. Die Umkehrfunktion von f (auch inverse Funktion genannt) wird mit f^{-1} bezeichnet. Es ist $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Die **Gleichung der Umkehrfunktion** von f gewinnt man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst (so dies möglich ist) und die Bezeichnungen y und x vertauscht. Die Graphen einer Funktion $y = f(x)$ und ihrer Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ liegen spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.

Beispiel: Die Funktion g mit der Gleichung $y = 3x - 5$, $D_g = \mathbb{R}$ ist umkehrbar und hat die Gleichung $g^{-1}: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$. Die Funktion $f(x) = x^2$ vermittelt hingegen keine eindeutige Zuordnung: Jedem y -Wert (Ausnahme: 0) sind zwei x -Werte zugeordnet. Zerlegt man jedoch f in die beiden Funktionen $f_1: y = x^2$, $D_{f_1} =]-\infty; 0]$, und $f_2: y = x^2$, $D_{f_2} = [0; \infty[$,

dann existieren deren Umkehrungen. Aus $y = x^2$ folgt $|x| = \sqrt{y}$, woraus man $-x = \sqrt{y}$ bzw. $x = \sqrt{y}$ erhält. Vertauschen von x und y liefert die Gleichungen der Umkehrfunktionen

$$f_1^{-1}: y = -\sqrt{x}, f_2^{-1}: y = \sqrt{x}.$$



Nullstellen

Definition

Eine Zahl $x_0 \in D_f$ heißt **Nullstelle von f** , wenn $f(x_0) = 0$ gilt.

In der grafischen Darstellung ist eine Nullstelle einer Funktion die Abszisse eines Schnittpunkts des Funktionsgraphen mit der x -Achse. Eine Funktion kann genau eine, mehrere oder keine Nullstelle bzw. Schnittpunkte mit der x -Achse besitzen.

Abschnittsweise definierte Funktionen

Definition

Abschnittsweise definierte Funktionen werden in den Abschnitten ihres Definitionsbereiches durch unterschiedliche Zuordnungsvorschriften bzw. Funktionsterme definiert.

Beispiel: Die Zuordnung „Briefgewicht (m in g) \rightarrow Beförderungsgebühr (p in Euro)“ stellt eine Funktion $p = f(m)$ dar:

$$p(m) = \begin{cases} 0,55 & \text{für } 0 < m \leq 20 \\ 0,90 & \text{für } 20 < m \leq 50 \\ 1,45 & \text{für } 50 < m \leq 500 \\ 2,20 & \text{für } 500 < m \leq 1000 \end{cases}$$

1.3 Verknüpfen und Verketteten

Verknüpfen

Aus bekannten Funktionen können durch **Verknüpfen** der entsprechenden Funktionsgleichungen (kurz: der Funktionen) mithilfe der Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division neue Funktionen gebildet werden.

Summe, Differenz, Produkt, Quotient

Die Funktionen f mit $y = f(x)$ und g mit $y = g(x)$ auf den Definitionsmengen D_f und D_g bilden folgende Verknüpfungen:

Summe $s = f + g$ mit $s(x) = f(x) + g(x)$, $D_s = D_f \cap D_g$

Differenz $d = f - g$ mit $d(x) = f(x) - g(x)$, $D_d = D_f \cap D_g$

Produkt $p = f \cdot g$ mit $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $D_p = D_f \cap D_g$

Quotient $q = \frac{f}{g}$ mit $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $D_q = D_f \cap D_g \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$

Der Definitionsbereich einer durch Verknüpfung entstandenen Funktion ist in Abhängigkeit von den Definitionsbereichen der Ausgangsfunktion und der Verknüpfungsart zu bestimmen.

Beispiel: Für die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x - 1$ mit $D_f = D_g = \mathbb{R}$ wird das Produkt $f \cdot g$ beschrieben durch $p(x) = x^2 \cdot (x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Für den Quotienten $\frac{f}{g}$ erhält man $q(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

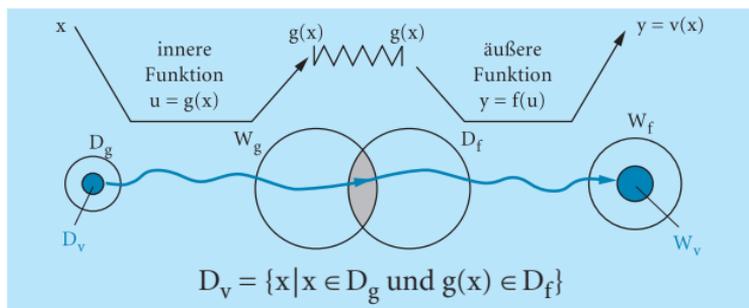
Verketteten

Eine weitere Möglichkeit, aus gegebenen Funktionen neue Funktionen zu bilden, stellt das **Nacheinanderausführen** bzw. **Verketteten** zweier Zuordnungsvorschriften dar.

Verkettung, äußere und innere Funktion

Die Funktion v mit $v(x) = f(g(x))$ heißt **Verkettung** von f und g . Man schreibt $v = f \circ g$ (gesprochen: f nach g). Die Funktion f nennt man **äußere Funktion**, die Funktion g **innere Funktion** der verketteten Funktion v . Die Verkettung v ist definiert für alle x , für welche die Funktionswerte von g (also $g(x)$) zum Definitionsbereich von f gehören.

Eine Verkettung der äußeren Funktion f mit der inneren Funktion g zur Funktion $v = f \circ g$ bedeutet demnach, dass man Funktionswerte $g(x)$ der inneren Funktion g zu Argumenten der äußeren Funktion f macht. Eine Verkettung ist nur dann möglich, wenn die Schnittmenge aus dem Definitionsbereich von f und dem Wertebereich von g nicht leer ist.



Beispiel: Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = \sin x$ und $g(x) = 2x$. Um die Verknüpfung $f \circ g$ zu erhalten, wendet man in einem ersten Schritt auf einen Wert x aus dem Definitionsbereich von g die Zuordnungsvorschrift g „Verdopple!“ an und erhält so den Funktionswert $g(x) = 2x$.

In einem zweiten Schritt wird auf den Wert $g(x)$ die Zuordnungsvorschrift f „Sinuswert bilden!“ angewendet. Man erhält: $f(2x) = \sin 2x$.

Durch die Verknüpfung $f \circ g$ ist somit die neue Funktion v mit $v(x) = \sin 2x$ entstanden.

- **CAS** Die Ecken $A(5/5/0)$, $B(-5/5/0)$, $C(-5/-5/0)$ und $D(5/-5/0)$ bilden die Grundfläche eines Würfels. Verbindet man die Kantenmitten der Deckfläche des Würfels mit den Ecken der Grundfläche, so entsteht ein Würfelstumpf. Stellen Sie zwei angrenzende Seitenflächen des Würfelstumpfes grafisch dar und zeigen Sie, dass für deren Schnittwinkel $\psi = 131,8^\circ$ gilt. (↑S. 135)

Anforderungsbereich III

- Im Rahmen einer Flughafenerweiterung muss eine neue Startbahn gebaut werden, für die eine Schar von geradlinigen Flugrouten durch die Gleichung

$$g_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 5-k \\ 1 \end{pmatrix}; k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 9, r \in \mathbb{R}^{\geq 0}$$

zur Verfügung steht. Ein Turm und ein Sendemast mit $A(-10/2/0)$ und $B(-6/-3,5/0)$ müssen in der Einflugschneise berücksichtigt werden. Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar g_k in einer Ebene E liegen, und bestimmen Sie deren Gleichung. Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der Erdoberfläche, die als x_1 - x_2 -Ebene anzusetzen ist. Interpretieren Sie die Aufstiegswinkel der einzelnen Flugrouten. (↑S. 135)

- Gegeben seien im \mathbb{R}^3 der Punkt $P(3/1/-1)$ sowie die Ebene

$$E: \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \quad \text{und die Kugel} \quad K: \vec{x} - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 23 = 0.$$

Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene T , die K in P berührt. (↑S. 145)

- **CAS** Zwei Lautsprecher, die als bauidentisch angenommen werden, erzeugen in der x - y -Ebene zwei Felder von

Kreiswellen, die sich überlagern und deren Erregerpunkte F_1 und F_2 sind. Mit $r_1 = \overline{PF_1}$, $r_2 = \overline{PF_2}$ und der Wellenlänge λ gilt für die Zonen der Wellenauslöschung

$$|r_1 - r_2| = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}; n \in \mathbb{N}, \text{ für die maximalen Wellenampli-}$$

tuden gilt $|r_1 - r_2| = n\lambda; n \in \mathbb{N}$. Veranschaulichen Sie die Hyperbeln und ermitteln Sie die Hyperbelgleichungen in kartesischen Koordinaten für die maximalen Wellenamplituden. (↑S. 136 ff.)

3.8 Prüfungsaufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Anforderungsbereich I

- Ein Glückskeisel mit 12 gleich großen Sektoren wird um die eigene Achse gedreht und bleibt genau auf einer Sektorante stehen. Benennen Sie die Art des Zufallsexperiments, geben Sie die Ereignismenge Ω an und geben Sie die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse an. (↑S. 146, 153)
- In einem Lager wird die Ware stichprobenartig überprüft. Mit einem Lieferanten besteht der Vertrag, dass die Ware ohne weitere Untersuchung zurückgeschickt werden kann, wenn bei der Kontrolle von 8 beliebig ausgewählten Stücken 3 oder mehr nicht in Ordnung sind. Geben Sie an, auf wie viele Weisen Prüfstücke entnommen werden können, wenn 65 Produkte geliefert werden. (↑S. 156)
- CAS Zeichnen Sie die Graphen der gaußschen Integralfunktion Φ im Intervall $[-3;3]$ und die Punkte der standardisierten kumulierten Binomialverteilung mit $n = 1000$ und $p = 0,4$. (↑S. 174)
- Was versteht man unter einer „Zufallsgröße“? (↑S. 161)
- Bestimmen Sie den Erwartungswert der Augenzahl beim einfachen Würfeln mit einem Hexaeder. (↑S. 163)

Anforderungsbereich II

- Drei Lokalzeitungen A, B, C haben insgesamt einen Marktanteil von 35 %, 20 % und 45 %, der Abonnementanteil liegt bei Zeitung A bei 15 %. Zeitung B mit 55 % und Zeitung C mit 65 % sind hier allerdings viel stärker. Ermitteln Sie den Anteil der Abonnenten unter den Zeitungslesern. (↑S. 154)
- CAS Bei einem Fußballspiel sind 60 % der Zuschauer im Stadion Fans der Heimmannschaft. Unter diesen Fans werden etwa 4 % als gewaltbereit eingeschätzt, bei den Fans der gegnerischen Mannschaft gilt der Anteil als doppelt so hoch. Ermitteln Sie die Erwartungswerte und den Graphen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn die Zufallsvariable die Zugehörigkeit zu einer Fußballmannschaft bei einer Kontrollgruppengröße von 70 Fans beschreibt. (↑S. 162f.)

Anforderungsbereich III

- In einer Untersuchung soll festgestellt werden, ob Personen, die sich an Wahlen nicht beteiligt haben, dies auch zugeben. Die Wahlbeteiligung bei der letzten Wahl betrug 87 %. Es wird eine Stichprobe vom Umfang 1350 durchgeführt. Ermitteln Sie, mit welchem Stichprobenergebnis Sie rechnen können. (↑S. 168)
- Begründen Sie, dass standardisierte Binomialverteilungen näherungsweise standard-normalverteilt sind. (↑S. 174)
- CAS Interpretieren Sie zur Fragestellung „Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 28 Schülern in einer Klasse mindestens zwei denselben Geburtstag haben?“ das Ergebnis Ihrer Simulation und der theoretischen Wahrscheinlichkeit. (↑S. 171 ff.)
- Beweisen Sie mithilfe der Ungleichung

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}; \quad a > 0$$
 die Ungleichung von Tschebyscheff. (↑S. 164)

3.9 Prüfungsaufgaben zu beschreibender und beurteilender Statistik

Anforderungsbereich I

- Bei einer Warenkontrolle können Fehler unterlaufen: Die produzierte Ware kann den verlangten Qualitätsbedingungen genügen oder nicht. Beschreiben Sie Fehler 1. und 2. Art. (↑S. 182)
- Bei einem verdeckt laufenden Glücksrad sind entweder 8 Sektoren weiß und 12 schwarz oder umgekehrt. Nennen Sie geeignete Entscheidungsregeln für $p = 0,4$ und $n = 100$ und geben Sie α und β an.
- **CAS** Erfassen Sie die Daten des Reaktionstests „Fallendes Lineal“ in einer Matrix, beschreiben Sie die Ausgänge des Versuchs mithilfe von Lageparametern und nutzen Sie ein Histogramm zur grafischen Veranschaulichung. (↑S. 178 f.)

Anforderungsbereich II

- Bestimmen Sie den Annahmehereich der Nullhypothese $H_0 : p = \frac{1}{5}$ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha = 0,02$ bei einem Stichprobenumfang $n = 100$. (↑S. 182)
- Ein Autohersteller wirbt für seine Fahrzeuge damit, dass mehr als die Hälfte auf den Straßen von dieser Marke produziert würden. Während einer Testfahrt werden 102 Autos gezählt, von denen 87 von der betreffenden Firma produziert wurden. Erläutern Sie, ob dieses Testergebnis die Firmenwerbung unterstützt. (↑S. 185)
- **CAS** Ein Liebespaar steht in stockdunkler Nacht vor einer Waldhütte. Die Verliebten wählen blindlings Schlüssel an ihrem Schlüsselbund aus, um die Hütte aufzuschließen, da sie abgelenkt sind, und merken sich nicht, welche Schlüssel sie bereits ausprobiert haben. Ermitteln Sie, wie oft das Paar im Mittel probieren muss, bis es den passenden Schlüssel

gefunden hat, indem Sie ein entsprechendes Programm schreiben. (↑S. 179)

Anforderungsbereich III

- Eine repräsentative Umfrage ergab für einen Politiker einen Sympathiewert von 42 %. Kann man mit der Irrtumswahrscheinlichkeit $\alpha=0,05$ damit rechnen, dass unter 100 zufällig befragten anderen Personen der Sympathieanteil auf 25 % sinkt? (↑S. 185)
- Bei einem Würfel bestehen Zweifel, ob es sich um einen Laplace-Würfel handelt. Es wird ein Test mit 250 Würfeln durchgeführt, bei dem 49-mal die Zahl 1 fällt. Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % schließen, dass der Würfel kein Laplace-Würfel ist? (↑S. 185)
- CAS Schreiben Sie ein Programm, das zu einer Zufallsstichprobe vom Umfang n einer Population die empirische Varianz $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ berechnet und die Treffsicherheit von s^2 untersucht. (↑S. 180)

Zeichen	Bedeutung
Mengen	
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $\{0; 1; 2; 3; \dots\}$
\mathbb{N}^+	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$\{a; b; \dots\}$	Menge mit den Elementen a, b, ...
(a_1, \dots, a_n)	geordnetes n-Tupel
$\{x \mid x = \dots\}$	Menge aller x, für die gilt ...
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b
$]a; b[$	offenes Intervall von a bis b
$]a; b]$	linksoffenes Intervall von a bis b (ohne a, mit b)
$[a; b[$	rechtsoffenes Intervall von a bis b (mit a, ohne b)
$\emptyset, \{\}$	leere Menge
\in	Element von
\notin	nicht Element von
\subseteq	Teilmenge von
\subset	echte Teilmenge von
$A \cup B$	A vereinigt mit B (Vereinigungsmenge)
$A \cap B$	A geschnitten B (Durchschnittsmenge)
$A \setminus B$	A ohne B (Differenzmenge)
$A \times B$	A kreuz B (Produktmenge)
\bar{A}	Komplementärmenge zu A
$\mathcal{P}(A)$	Potenzmenge von A

Zeichen	Bedeutung
Spezielle Zahlen	
i	imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)
e	eulersche Zahl $e = 2,71828\dots$
π	Kreiszahl $\pi = 3,14159\dots$

Analysis	
f, g, \dots	Funktionssymbol
D_f	Definitionsbereich von f
W_f	Wertebereich von f
$f(x), g(a)$	Funktionswertsymbol
(a_n)	Zahlenfolge (mit dem allgemeinen Glied a_n)
$\Delta x, \Delta y, \dots$	„Delta x “, „Delta y “, ... (Differenz zweier Werte)
dy	Differenzial
$\frac{dy}{dx}$	„ dy nach dx “ (Differenzialquotient von f)
$\frac{d^2y}{dx^2}$	„ d zwei y nach dx Quadrat“ (zweiter Differenzialquotient von f)
$f'(x), f''(x), \dots, f^{(4)}(x)$	„ f Strich“, „ f zwei Strich“, ..., „ f vier Strich von x “ (Ableitungen 1., ..., 4. Ordnung)
$\lim_{x \rightarrow \dots} \dots$	Limes von ... für x gegen ... (Grenzwert)
$\sum_{k=1}^n a_k$	Summe aller a_k für k gleich 1 bis n
$\int f(x) dx$	(unbestimmtes) Integral (über) $f(x) dx$
$\int_a^b f(x) dx$	(bestimmtes) Integral von a bis b (über) $f(x) dx$
$F(x) \Big _a^b$	Stammfunktion $F(x)$ von a bis b

Zeichen	Bedeutung
Lineare Algebra	
A, B, \dots	Matrix A , Matrix B , ...
A^{-1}	inverse Matrix zu A
A^T	transponierte Matrix zu A
$\det A, A $	Determinante von A
\vec{a}, \overline{AB}	Vektoren
$ \vec{a} $	Betrag von \vec{a}
$\vec{a} \circ \vec{b}$	Skalarprodukt von \vec{a} und \vec{b}
$(\vec{a} \times \vec{b})$	Vektorprodukt von \vec{a} und \vec{b}
$\sphericalangle(\vec{a}; \vec{b})$	Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b}
\vec{a}^0	Einheitsvektor von \vec{a}

Stochastik	
$n!$	n Fakultät
$\binom{n}{p}$	n über p (Binomialkoeffizient)
Ω	Ergebnismenge
\bar{A}	Gegenereignis (komplementäres Ereignis) zu A
2^Ω	Ereignisraum von Ω
$H_n(A)$	absolute Häufigkeit von A
$h_n(A)$	relative Häufigkeit von A
$P(A)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A
$P_B(A)$	bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
EX	Erwartungswert der Zufallsgröße X
D^2X	Streuung der Zufallsgröße X
$B_{n;p}$	Binomialverteilung mit den Parametern n und p

A

Abbildung	6
Ableitung	56 f., 61
abschnittsweise definierte Funktion	13
absolute Häufigkeit	150
Abstand	48, 136 ff.
Achsenabschnitts- gleichung	123, 127
allgemeine Sinusfunktion	26 f.
Alternativtest	183 ff.
arithmetische Zahlenfolge	34 f.
arithmetisches Mittel	179
Arkusfunktion	28 f.
Assoziativgesetz	96, 109
Asymptote	51, 71
Aussage	36
Axiomensystem von Kolmogorow	151

B

Basis	109
Baumdiagramm	147, 154
bayessche Formel	159
bedingte Wahrscheinlichkeit	159 f.
Bernoulli-Experiment	166 f.
Beschränktheit	10
bestimmtes Integral	80 ff.
Betrag	96
Betragsfunktion	31
Binomialverteilung	166 ff.
biquadratische Gleichung	39
Bogenmaß	25

D

Darstellungssatz	99 f.
Definitionsbereich	7, 77
Definitionslücke	23
Determinante	42 f.
Diagonalmatrix	111
Differenzial	81
Differenzialquotient	56
Dimension	109
Diskriminante	21
divergente Folge	48
Dreiecksform	45
Dreiecksmatrix	111
Dreiecksregel	94
3 σ -Regel	165

E

Ebene	126 ff., 132 f., 134, 136, 139, 145
Einheitsmatrix	111
empirisches Gesetz der großen Zahlen	150
ε -Umgebung	47 f.
Ereignis	148 f., 151
Ergebnismenge	146, 152
Erwartungswert	163, 169
Erzeugendensystem	108
eulersche e-Funktion	30
Exponentialfunktion	29 f.
Exponentialgleichung	41
Extrema	64 ff.
Extremwertproblem	72 f.

F

Faktorregel	58, 80, 86
Fehler	182
Flächeninhalt	86 ff.

G

ganzrationale Funktion	18, 70
Ganzteilmfunktion	32
gaußsches	
Eliminierungsverfahren	50 ff.
gebrochenrationale	
Funktion	18, 23, 70
geometrische Reihe	52
geometrische	
Zahlenfolge	35
Gerade	120 ff., 134, 136, 138, 142, 144
Gleichung	36 f.
Gleichungssystem	37, 44 f., 110
Gleichverteilung	153 f.
goniometrische Gleichung	39 f.
Grenzwert	47 ff.
Grundbereich	36
Grundgesamtheit	176

H

Häufigkeit	150
Häufigkeitsverteilung	178
Hauptdiagonale	42
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung	83
hessesche Normalform	124, 128
Histogramm	178
hypergeometrische Verteilung	158
Hypothese	182

I

Integralfunktion	82
Integrand	78, 81
Integrationsgrenzen	81 f.
inverse Matrix	115

K

Kettenregel	59
Kollinearität	97
Kombination	156 f.
Kommutativgesetz	94, 107
Komplanarität	97
Konstantenregel	57
Koordinatensystem	100 f.
Kosinusfunktion	24
Kreis	140 f., 143 f.
Krümmungsverhalten	67 f., 77
Kugel	140 f., 144 f.
Kurvendiskussion	71

L

Laplace-Experiment	153
lineare Abbildung	115 ff.
lineare Abhängigkeit	98
lineare Funktion	19
lineare Gleichung	38
lineare Hülle	108
lineares	
Gleichungssystem	42 ff.
Logarithmengleichung	41
Logarithmusfunktion	30 f.
lokales Minimum	65 ff.
Lösungsmenge	37
Lücke	54

M

Matrix	110 ff.
Matrizenmultiplikation	114
Median	179
Merkmal	176
Mittelwert der Integralrechnung	82

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung	62
mittlere absolute Abweichung	180
Modalwert	179
Monotonie	10, 64

N

Nebenbedingung	76
Nebendiagonale	42
Normalenvektor	105, 124, 127
Normalform	20, 38
Normalparabel	20 f.
Nullelement	107
Nullhypothese	182, 185
Nullmatrix	112
Nullstelle	13, 21, 23, 71
Nullstellensatz von Bolzano	55
Nullvektor	94

O

Orthogonalität	103, 134
Ortsvektor	120
Parallelogrammregel	94
Parameterdarstellung	9
Partialbruchzerlegung	85
Partialsomme	35
partielle Integration	84 f.
Periodizität von Funktionen	11 f.
Permutation	155
Pfad	147
Pfadregeln	154
Polygonzug	178
Population	176
Potenzfunktion	22

Potenzregel	58, 79
Produktmenge	6
Produktregel	59
Prüfungsklausur	190 ff.
Punktrichtungs-gleichung	121 f., 126

Q

quadratische Funktion	20 f.
quadratische Gleichung	38
quadratische Matrix	111
Quotientenregel	59

R

reelle Funktion	7
Regel von Cramer	42 f.
Regel von de l'Hospital	63
Reihe	52
relative Häufigkeit	150
Richtungsvektor	120, 122
Rotationskörper	90

S

Sattelpunkt	69
Satz über die Annahme von Zwischenwerten	55
Satz von Rolle	62
Satz von Weierstraß	55
Sätze über differenzierbare Funktionen	62 f.
Signifikanztest	185 f.
Sinusfunktion	24
Skalarprodukt	102 ff.
Spatprodukt	106
Stammfunktion	78
Standardabweichung	163, 169
stetige Fortsetzung	54

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| Stetigkeit | 53 f., 71 | Vektorprodukt | 104 f. |
| Stichprobe | 181 | Vektorraum | 107 ff. |
| Streuung | 163, 168, 179 | Verzweigungsregel | 154 |
| Substitution | 84 | Vierfeldertafel | 152 |
| Summe einer Reihe | 52 | Vorzeichenfunktion | 32 |
| Summenregel | 58, 80, 86 | Vorzeichenwechsel- | |
| Symmetrie | 71, 112 | kriterium | 66 |
| Symmetrie von Funktionen | 11 | | |
| T | | | |
| Tangensfunktion | 24 | W | |
| Tangente | 142 | Wahrscheinlichkeit | 151, 184 |
| Tangentialebene | 145 | Wahrscheinlichkeits- | |
| Term | 36 | verteilung | 162 |
| transponierte Matrix | 112 | Wartezeitproblem | 169 |
| transzendente Gleichung | 41 | Wendestelle | 68 f., 71 |
| trigonometrische | | Wertebereich | 7 |
| Funktionen | 24 ff. | Winkelfunktion | 24 ff. |
| tschebyschowsche | | Wurzelfunktion | 22 |
| Ungleichung | 164 | Wurzelgleichungen | 39 |
| | | Wurzelsatz von Vieta | 39 |
| U | | | |
| Übergangsmatrizen | 116 f. | Z | |
| Umkehrfunktion | 12 f. | Zahlenfolge | 33 ff. |
| Umkehrregel | 60 | Zeilenvektor | 112 |
| unbestimmtes Integral | 78 | Zielfunktion | 76 |
| uneigentlicher Grenzwert | 51 | Zufallsexperiment | 146 ff. |
| uneigentliches Integral | 89 | Zufallsgröße | 161 ff. |
| Ungleichung | 36 | Zweipunktgleichung | 122 |
| Unstetigkeitsstelle | 53 | | |
| Unterraum | 108 | | |
| Urnenmodell | 158 | | |
| V | | | |
| Variable | 36 | | |
| Variation | 156 f. | | |
| Vektor | 92 ff. | | |

Bildquellen (Abbildungen Umschlag innen)

Bibliographisches Institut, Berlin (Fermatsche Vermutung, Mandelbrot, Euler, Gauß,); Bibliographisches Institut, Berlin/Archiv Waldmann (Romanesco); Floramedia (Passionsblume); MEV Verlag, Augsburg (Basketball); NASA,ESA, S.Beckwith and The Hubble Heritage Team (Whirlpool-Galaxie); Öffentliche Bibliothek der Universität Basel (Euklid); picture-alliance/Bildarchiv Okapia (logarithmische Spirale, Symmetrie); picture-alliance/Bildarchiv Okapia/Richard Thom (Primzahlen); picture-alliance/akg-images (Minimalfäche); picture-alliance/dpa (Binomialverteilung, Hexagonal); picture-alliance/Keystone Schweiz (Hilbert); picture-alliance/Picture Press (Zufall)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Das Wort **Duden** ist für den Verlag Bibliographisches Institut GmbH als Marke geschützt.

Kein Teil dieses Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

Für die Nutzung des zum Buch zugehörigen Downloadangebots gelten die Allgemeinen Geschäftsbedingungen (AGB) der Websites www.duden.de und www.lernhelfer.de, die jederzeit unter dem entsprechenden Eintrag abgerufen werden können. Alle Rechte vorbehalten. Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet.

4., aktualisierte Auflage

© Duden 2016 D C B A

Bibliographisches Institut GmbH, Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung David Harvie

Redaktion Dr. Ulrich Kilian (redaktionsbüro science & more)

Autoren Prof. Dr. Karlheinz Weber, Michael Bornemann

Herstellung Uwe Pahnke

Typografisches Konzept Horst Bachmann

Umschlaggestaltung Büroocco, Augsburg

Satz Dr. Ulrich Kilian, Stefan Hergenröder (Elstersatz, Wildflecken)

Druck und Bindung Heenemann GmbH & Co. KG,

Bessemersstraße 83–91, 12103 Berlin

Printed in Germany

ISBN 978-3-411-70664-8

Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91205-6

www.lernhelfer.de

ABI GENIAL!



Das Schnell-Merk-System:
erhältlich für die Fächer
Deutsch, Mathematik,
Englisch, Physik, Biologie,
Geschichte, Chemie,
Politik und Wirtschaft

Mit **Original-**
prüfungen und
Musterlösungen
online auf
www.lernhelfer.de



Mathematische Strukturen in Natur und Alltag



Die Whirlpoolgalaxie – eine fast perfekte Spirale.



Eine in der Tierwelt eher selten vorkommende Form der Symmetrie ist die fünfzählige Symmetrie des Seesterns.



Die Blumenkohlzüchtung *Romanesco* zeigt eine fraktale Struktur.



Hexagonale Strukturen wie Bienenwaben oder die Basaltsäulen von Giant's Causeway sind in der Natur ein besonders häufig anzutreffendes Muster.



Singzikaden der Gattung *Magicicada* sind Primzahl-spezialisten: Sie vermehren sich genau alle 13 oder 17 Jahre massenhaft.



Die Passionsblume weist eine komplexe Symmetrie auf.



Die Dächer des Olympiastadions in München sind ein Beispiel für Minimalflächen in der Architektur. Solche Flächen haben zu einer gegebenen Randkurve den kleinsten Flächeninhalt und werden in der Mathematik im Rahmen der Differentialgeometrie behandelt.



Das Gehäuse des Nautilus wächst so, dass im Inneren eine fast perfekte logarithmische Spirale entsteht.

Mathematik – Tophemen

Funktionenscharen	16
Gaußsches Eliminationsverfahren	44
Extremwertprobleme	76
Berechnung von Rotationskörpern	90
Skalar- und Vektorprodukt	102
Übergangsmatrizen	116
Ebenen in spezieller Lage	132
Ereignisse und Ereignisverknüpfungen	148
Testkonstruktion und -durchführung	187

DUDEN

Die geniale Kombination für das erfolgreiche Abitur in Mathematik!

Effektives Lernen mithilfe des „Schnell-Merk-Systems“

und

Gezieltes Prüfungstraining mit passenden Originalprüfungen

- Kompakt zusammengefasster Lernstoff
- Topthemen zur Vertiefung
- Extrakapitel mit Prüfungsratgeber
- Prüfungsfragen aus allen Anforderungsbereichen
- Originalprüfungen mit Lösungen zum Download für 1,- €

Angepasst auf Grund- und Leistungskursthemen.
Für alle Bundesländer geeignet.

ISBN 978-3-411-70664-8
9,99 €(D) · 10,30 €(A)



www.lernhelfer.de