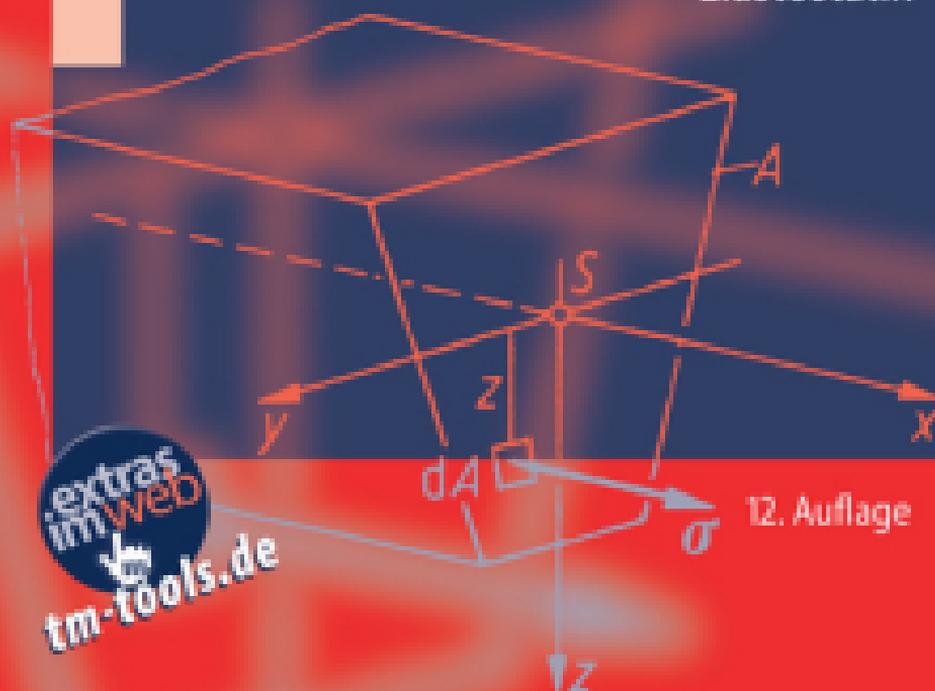


Gross · Hauger

Schröder · Wall

# Technische Mechanik 2

Elastostatik



12. Auflage

extras  
im  
web  
tm-tools.de

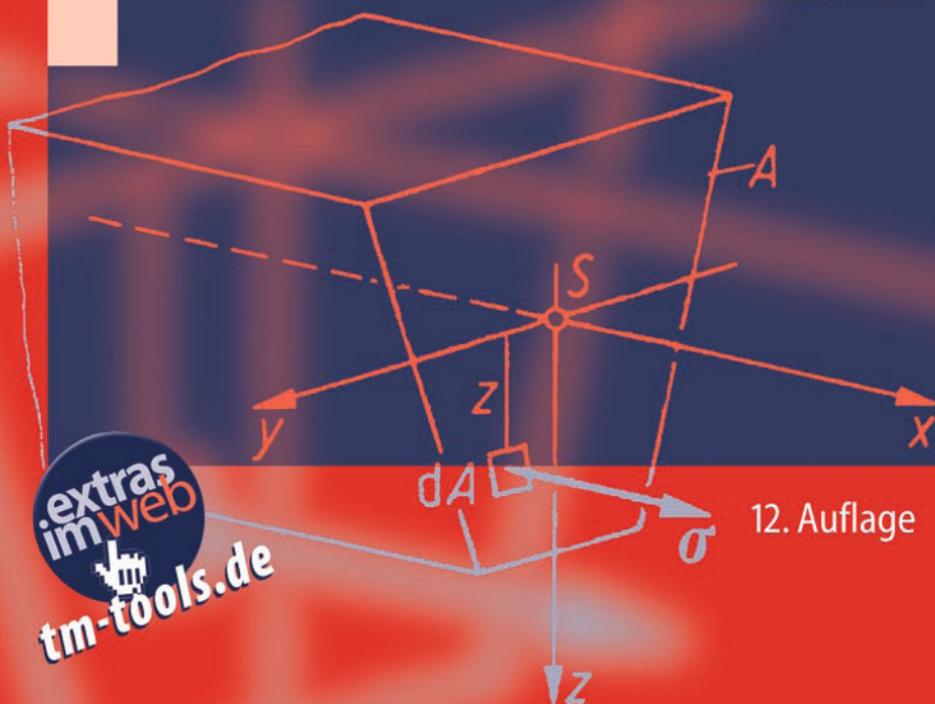


Springer Vieweg

Gross · Hauger  
Schröder · Wall

# Technische Mechanik 2

Elastostatik



12. Auflage

extras  
im web  
tm-tools.de



Springer Vieweg





#### Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross

studierte Angewandte Mechanik und promovierte an der Universität Rostock. Er habilitierte an der Universität Stuttgart und ist seit 1976 Professor für Mechanik an der TU Darmstadt. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die Festkörper- und Strukturmechanik sowie die Bruchmechanik. Hierbei ist er auch mit der Modellierung mikromechanischer Prozesse befasst. Er ist Mitherausgeber mehrerer internationaler Fachzeitschriften sowie Autor zahlreicher Lehr- und Fachbücher.



#### Prof. Dr. Werner Hauger

studierte Angewandte Mathematik und Mechanik an der Universität Karlsruhe und promovierte an der Northwestern University in Evanston/Illinois. Er war mehrere Jahre in der Industrie tätig, hatte eine Professur an der Helmut-Schmidt Universität in Hamburg und wurde 1978 an die TU Darmstadt berufen. Sein Arbeitsgebiet ist die Festkörpermechanik mit den Schwerpunkten Stabilitätstheorie, Plastodynamik und Biomechanik. Er ist Autor von Lehrbüchern und war Mitherausgeber internationaler Fachzeitschriften.



#### Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder

studierte Bauingenieurwesen, promovierte an der Universität Hannover und habilitierte an der Universität Stuttgart. Nach einer Professur für Mechanik an der TU Darmstadt ist er seit 2001 Professor für Mechanik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die theoretische und die computerorientierte Kontinuumsmechanik sowie die phänomenologische Materialtheorie mit Schwerpunkten auf der Formulierung anisotroper Materialgleichungen und der Weiterentwicklung der Finite-Elemente-Methode.



#### Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall

studierte Bauingenieurwesen an der Universität Innsbruck und promovierte an der Universität Stuttgart. Seit 2003 leitet er den Lehrstuhl für Numerische Mechanik an der Fakultät Maschinenwesen der TU München. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem die numerische Strömungs- und Strukturmechanik. Schwerpunkte dabei sind gekoppelte Mehrfeld- und Mehrskalprobleme mit Anwendungen, die sich von der Aeroelastik bis zur Biomechanik erstrecken.

Dietmar Gross · Werner Hauger  
Jörg Schröder · Wolfgang A. Wall

---

# Technische Mechanik 2

## Elastostatik

12., aktualisierte Auflage

 Springer Vieweg

Prof. Dr.-Ing. Dietmar Gross  
Prof. Dr. Werner Hauger  
Festkörpermechanik  
Technische Universität Darmstadt  
Franziska-Braun-Str. 7  
64287 Darmstadt

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall  
Lehrstuhl für Numerische Mechanik  
Technische Universität München  
Boltzmannstraße 15  
85747 Garching

Prof. Dr.-Ing. Jörg Schröder  
Institut für Mechanik  
Universität Duisburg-Essen  
Campus Essen  
Universitätsstraße 15  
45117 Essen

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-40965-3

ISBN 978-3-642-40966-0 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-40966-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983, 1989, 1990, 1993, 1995, 1999, 2002, 2004, 2006, 2009, 2012, 2014

Das Werkeinschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

## Vorwort

Die *Elastostatik* setzt den ersten Band des mehrbändigen Lehrbuches der Technischen Mechanik fort. Sie beschäftigt sich mit den Beanspruchungen und den Verformungen elastischer Körper.

Das Buch ist aus Lehrveranstaltungen hervorgegangen, die von den Autoren für Studierende aller Ingenieur-Fachrichtungen gehalten wurden. Der dargestellte Stoff orientiert sich im Inhalt an den Mechanikkursen, wie sie an deutschsprachigen Hochschulen abgehalten werden. Dabei wurde zugunsten einer ausführlichen Darstellung der Grundlagen auf die Behandlung mancher spezieller Probleme verzichtet.

Auch dieser Band erfordert aktive Mitarbeit des Lesers, da die Mechanik nicht durch reines Literaturstudium zu erlernen ist. Eine sachgerechte Anwendung der wenigen Gesetzmäßigkeiten setzt nicht nur die Kenntnis der Theorie voraus, sondern erfordert auch Übung. Letztere ist nur durch selbständiges Bearbeiten von Aufgaben zu erwerben. Die Beispiele in jedem Kapitel sollen hierfür eine Anleitung geben. Da wir mit den Beispielen die prinzipielle Anwendbarkeit der Grundgesetze zeigen wollen, haben wir bewusst keinen Wert auf Zahlenrechnungen gelegt.

Die freundliche Aufnahme, welche dieses Buch gefunden hat, macht eine Neuauflage erforderlich. Wir haben sie genutzt, um eine Reihe von Verbesserungen und Ergänzungen vorzunehmen.

Die Technische Mechanik 2 geht zu einem bedeutenden Anteil auf unseren verstorbenen Kollegen Prof. Dr. Dr.h.c. Walter Schnell zurück, der auch bis zur sechsten Auflage Mitautor war. Seine Handschrift ist in der vorliegenden Neuauflage trotz der vielen mittlerweile erfolgten Überarbeitungen immer noch zu erkennen.

Herzlich gedankt sei an dieser Stelle Frau Heike Herbst und Frau Veronika Jorisch, die mit großer Sorgfalt die Zeichnungen anfertigten. Wir danken auch dem Springer-Verlag für das Eingehen auf unsere Wünsche und für die ansprechende Ausstattung des Buches.

Darmstadt, Essen und München, im Frühjahr 2014

D. Gross  
W. Hauger  
J. Schröder  
W.A. Wall

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b> .....	<b>1</b>
<b>1 Zug und Druck in Stäben</b>	
1.1 Spannung.....	7
1.2 Dehnung.....	13
1.3 Stoffgesetz .....	14
1.4 Einzelstab .....	18
1.5 Statisch bestimmte Stabsysteme.....	28
1.6 Statisch unbestimmte Stabsysteme .....	33
1.7 Zusammenfassung .....	40
<b>2 Spannungszustand</b>	
2.1 Spannungsvektor und Spannungstensor .....	43
2.2 Ebener Spannungszustand .....	46
2.2.1 Koordinatentransformation.....	47
2.2.2 Hauptspannungen.....	51
2.2.3 Mohrscher Spannungskreis.....	56
2.2.4 Dünnwandiger Kessel .....	62
2.3 Gleichgewichtsbedingungen .....	65
2.4 Zusammenfassung .....	68
<b>3 Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz</b>	
3.1 Verzerrungszustand.....	71
3.2 Elastizitätsgesetz.....	76
3.3 Festigkeitshypothesen .....	83
3.4 Zusammenfassung .....	86
<b>4 Balkenbiegung</b>	
4.1 Einführung .....	89
4.2 Flächenträgheitsmomente .....	91
4.2.1 Definition.....	91
4.2.2 Parallelverschiebung der Bezugsachsen .....	98
4.2.3 Drehung des Bezugssystems, Hauptträgheitsmomente ..	100
4.3 Grundgleichungen der geraden Biegung .....	108
4.4 Normalspannungen .....	112

## VIII

4.5	Biegelinie .....	115
4.5.1	Differentialgleichung der Biegelinie .....	115
4.5.2	Einfeldbalken .....	119
4.5.3	Balken mit mehreren Feldern .....	129
4.5.4	Superposition .....	133
4.6	Einfluss des Schubes .....	143
4.6.1	Schubspannungen .....	143
4.6.2	Durchbiegung infolge Schub .....	153
4.7	Schiefe Biegung .....	155
4.8	Biegung und Zug/Druck .....	163
4.9	Kern des Querschnitts .....	167
4.10	Temperaturbelastung .....	169
4.11	Zusammenfassung .....	173
<b>5</b>	<b>Torsion</b>	
5.1	Einführung .....	177
5.2	Die kreiszylindrische Welle .....	178
5.3	Dünnwandige geschlossene Profile .....	188
5.4	Dünnwandige offene Profile .....	197
5.5	Zusammenfassung .....	205
<b>6</b>	<b>Der Arbeitsbegriff in der Elastostatik</b>	
6.1	Einleitung .....	209
6.2	Arbeitssatz und Formänderungsenergie .....	210
6.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte .....	220
6.4	Einflusszahlen und Vertauschungssätze .....	239
6.5	Anwendung des Arbeitssatzes auf statisch unbestimmte Systeme .....	242
6.6	Zusammenfassung .....	260
<b>7</b>	<b>Knickung</b>	
7.1	Verzweigung einer Gleichgewichtslage .....	263
7.2	Der Euler-Stab .....	266
7.3	Zusammenfassung .....	276
<b>8</b>	<b>Verbundquerschnitte</b>	
8.1	Einleitung .....	279

8.2	Zug und Druck in Stäben .....	279
8.3	Reine Biegung .....	286
8.4	Biegung und Zug/Druck .....	293
8.5	Zusammenfassung .....	297
	<b>Englische Fachausdrücke</b> .....	<b>299</b>
	<b>Sachverzeichnis</b> .....	<b>307</b>

## Einführung

Im ersten Band (*Statik*) wurde gezeigt, wie man allein mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen äußere und innere Kräfte an Tragwerken ermitteln kann. Dabei wurde der reale Körper durch den *starr*en Körper angenähert. Diese Idealisierung ist jedoch zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Bauteilen oder Konstruktionen meist nicht hinreichend. Bei vielen Ingenieurproblemen sind auch die Deformationen der Körper vorherzubestimmen, zum Beispiel um unzulässig große Verformungen auszuschließen. Der Körper muss dann als *deformierbar* angesehen werden.

Um die Deformationen zu beschreiben, ist es erforderlich, geeignete geometrische Größen zu definieren; dies sind *Verschiebungen* und *Verzerrungen*. Durch *kinematische Beziehungen*, welche die Verschiebungen und die Verzerrungen verknüpfen, wird die Geometrie der Verformung festgelegt.

Neben den Verformungen sind die Beanspruchungen von Bauteilen von großer praktischer Bedeutung. In der Statik haben wir bisher nur Schnittkräfte ermittelt. Sie allein lassen keine Aussage über die Belastbarkeit von Tragwerken zu (ein dünner bzw. ein dicker Stab aus gleichem Material werden bei unterschiedlichen Kräften versagen). Als geeignetes Maß für die Beanspruchung wird daher der Begriff der *Spannung* eingeführt. Durch Vergleich einer rechnerisch ermittelten Spannung mit einer auf Experimenten und Sicherheitsanforderungen basierenden *zulässigen Spannung* kann man die Tragfähigkeit von Bauteilen beurteilen.

Die Verzerrungen sind mit den Spannungen verknüpft. Die physikalische Beziehung zwischen diesen Größen heißt *Stoffgesetz*. Es ist abhängig vom Werkstoff, aus dem ein Bauteil besteht und kann nur mit Hilfe von Experimenten gewonnen werden. Die technisch wichtigsten metallischen und nichtmetallischen Materialien zeigen bei nicht zu großen Beanspruchungen einen linearen Zusammenhang von Spannung und Verzerrung. Er wurde schon von Robert Hooke (1635–1703) in der damaligen Sprache der Wissenschaft mit *ut tensio sic vis* (lat., *wie die Dehnung so die Kraft*) formuliert. Ein Werkstoff, der dem *Hookeschen Gesetz* genügt, heißt *linear-elastisch*; wir wollen ihn kurz *elastisch* nennen.

Im vorliegenden Band werden wir uns auf die Statik solcher elastisch deformierbarer Körper beschränken. Dabei setzen wir stets voraus, dass die Verformungen und damit auch die Verzerungen sehr klein sind. Dies trifft in sehr vielen technisch wichtigen Fällen tatsächlich zu. Daneben bringt es den großen Vorteil mit sich, dass die Gleichgewichtsbedingungen mit guter Näherung am *unverformten* System aufgestellt werden können; auch die kinematischen Beziehungen sind dann einfach. Nur bei Stabilitätsuntersuchungen, wie zum Beispiel beim *Knicken* (Kapitel 7), muss man die Gleichgewichtsbedingungen am *verformten* System formulieren.

Bei allen Problemen der Elastostatik muss man auf drei – ihrem Herkommen nach unterschiedliche – Arten von Gleichungen zurückgreifen: a) Gleichgewichtsbedingungen, b) kinematische Beziehungen, c) Elastizitätsgesetz. Bei *statisch bestimmten* Systemen können die Schnittgrößen und damit die Spannungen aus den Gleichgewichtsbedingungen direkt ermittelt werden. Die Verzerungen und die Verformungen folgen dann mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes und der kinematischen Beziehungen in getrennten Schritten.

Die Berücksichtigung von Deformationen macht es nun aber auch möglich, die Kräfte und die Verformungen *statisch unbestimmter* Systeme zu analysieren. In diesem Fall sind die Gleichgewichtsbedingungen, die kinematischen Beziehungen und das Elastizitätsgesetz gekoppelt und können nur gemeinsam gelöst werden.

Wir werden uns in der Elastostatik nur mit einfachen Beanspruchungszuständen befassen und uns auf die in der Praxis wichtigen Fälle von Stäben unter Zug bzw. Torsion und von Balken unter Biegung konzentrieren. Bei der Aufstellung der zugehörigen Gleichungen bedienen wir uns häufig bestimmter *Annahmen* über die Verformung oder die Verteilung der Spannungen. Diese Annahmen gehen auf experimentelle Untersuchungen zurück und gestatten es dann, das vorliegende Problem mit einer technisch ausreichenden Genauigkeit zu beschreiben.

Eine besondere Bedeutung kommt bei elastischen Körpern dem Arbeitsbegriff und den Energieaussagen zu. So lassen sich verschiedene Probleme besonders zweckmäßig mit Hilfe von Energie-

prinzipien lösen. Ihrer Formulierung und Anwendung ist Kapitel 6 gewidmet.

Das Verhalten deformierbarer Körper wurde seit Beginn der Neuzeit untersucht. So haben schon Leonardo da Vinci (1452–1519) und Galileo Galilei (1564–1642) Theorien aufgestellt, um die unterschiedliche Tragfähigkeit von Stäben bzw. Balken zu erklären. Die ersten systematischen Untersuchungen zum Verformungsverhalten von Balken gehen auf Jakob Bernoulli (1655–1705) und Leonhard Euler (1707–1783) zurück. Von Euler wurde in diesem Zusammenhang auch die Theorie des *Knickens* von Stäben entwickelt; die große technische Bedeutung dieser Überlegungen wurde erst viel später erkannt. Den Grundstein für eine in sich geschlossene *Elastizitätstheorie* legte Augustin Louis Cauchy (1789–1857); von ihm stammen die Begriffe *Spannungszustand* und *Verzerrungszustand*. Seitdem wurden sowohl die Elastizitätstheorie als auch die Näherungstheorien, welche in der Technik bei speziellen Tragwerken zur Anwendung gelangen, durch Beiträge von Ingenieuren, Physikern und Mathematikern ausgebaut – eine Entwicklung, die auch heute noch anhält. Daneben wurden und werden immer noch Theorien aufgestellt, die nichtelastisches Materialverhalten (zum Beispiel plastisches Verhalten) beschreiben. Hiermit werden wir uns jedoch im Rahmen dieses Buches nicht beschäftigen sondern verweisen auf Band 4.

Kapitel 1

## Zug und Druck in Stäben

1