Leseprobe

Sandro Scheid

Statistische Methoden in der Finanzwirtschaft

Methoden - Beispiele - Anwendungen

ISBN (Buch): 978-3-446-44366-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-44771-4

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44366-2

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Im Herbst 2011 fing ich meinen jetzigen Beruf als Lehrkraft für besondere Aufgaben an der betriebswirtschaftlichen Fakultät der Hochschule München bei Professor Dr. Galata an. Mit der Zeit entwickelte sich eine sehr herzliche Atmosphäre, an die ich nun gerne zurückdenke. Bereits im Herbst 2011 hatte Herr Galata die Idee ein Lehrbuch zu verfassen, dass statistische Aspekte in der Finanzbrache behandelt und Materialien für unsere Vorlesungen bereit stellen soll. Nachdem zunächst zwei weitere gemeinsame Lehrbücher entstanden waren, reichte die Zeit leider nicht mehr für ein drittes gemeinsames Buch. Bedauerlicherweise erlag Professor Dr. Galata zur Jahreswende 2015/2016 einer schweren Erkrankung.
Ich möchte das vorliegende Buch

Professor Dr. Robert Galata

widmen, ohne dessen Anstoß es nicht entstanden wäre.

Mit diesem Lehrbuch richte ich mich vor allem an Studierende der Wirtschaftswissenschaften. Es vermittelt eine Auswahl quantitativer Themen aus dem Bereich der Finanzbranche. Mit der Zielsetzung, gewohnte Themen auf einem nicht zu formalem Niveau zu behandeln, aber gleichzeitig die Methoden im quantitativen Sinne erklären zu wollen, ist der vorliegende Text auch für andere Leser interessant. So ist das Buch für Lernende die sich mit Wirtschaftswissenschaften beschäftigen, wie für Praktiker, vor allem in der Finanzbranche, die an quantitativen Aspekten hinter Methoden in diesem Bereich interessiert sind, gedacht. Vorausgesetzt werden mathematische und statistische Inhalte, wie sie im Rahmen eines betriebswirtschaftlichen Studiums an Hochschulen in den ersten zwei Semestern gelehrt werden.

Die im Buch behandelten Methoden werden großteils an realen Problemstellungen erarbeitet und schrittweise erklärt. Das Verständnis wird erleichtert durch die ausführliche Darstellung von Beispielen, die es erlauben, die Vorgehensweise der Methoden nachzuvollziehen und zu verstehen.

Mein Dank gilt den Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München, die durch zahlreiche Fragen und Anmerkungen zur Gestaltung des Lehrtextes beigetragen haben. Im besonderen Maße gebührt auch meinen Vorgesetzten und Kollegen bei Stat-Up und Atacama Capital Dank. Dort hatte ich die Zeit mich mit den hier geschilderten Methoden zu beschäftigen. Weiter möchte ich mich ganz besonders bei meiner Frau Petra und meinen Söhnen Simon und Benjamin bedanken, die mich während der Entstehung des Buches unterstützt haben und mich auch entbehren mussten! Ganz herzlich möchte ich mich bei Frau Werner und Frau Wulst vom Hanser Verlag, für die sehr verständnisvolle Zusammenarbeit und ihren tatkräftigen Einsatz bei der Verwirklichung des Buchprojektes bedanken. Nicht

zuletzt möchte ich der Familie Galata meinen besonderen Dank aussprechen. Ungeklärte Fragen konnten wir in einer warmen Atmosphäre klären. Ich wünsche der Familie Galata nach dem großen Verlust von Herzen alles Gute!

Kochel am See im Sommer 2017 Sandro Scheid

Inhalt

3 Grundlagen

In diesem Kapitel wiederholen wir kurz stochastische Methoden, die im weiteren Verlauf des Buches benötigt werden. Wir gehen zunächst auf die *einfache Regression* ein. Das *Bestimmtheitsmaß*, das an dieser Stelle behandelt wird, dient später im Rahmen des Ein-Faktor-Modells dazu, die Abhängigkeit eines Wertpapiers von der Marktentwicklung zu quantifizieren. Bereits im folgenden Kapitel benötigen wir dann einige Elemente der danach behandelten mehrdimensionalen Zufallsvariablen.

3.1 Das einfache Regressionsmodell

Im *einfachen Regressionsmodell* soll eine metrische Größe Y durch eine Einflussgröße X erklärt werden. Wir betrachten ein Beispiel.

Beispiel 3.1

Für die Aktie der Münchner Rück und und für den DAX-Index liegen die folgenden Renditen vor:

	Münchner R.	DAX
Januar 2015	0,0021	−0,0200
Februar 2015	0,0981	0,1089
März 2015	0,0266	0,0538
April 2015	0,0865	0,0518
Mai 2015	−0,1293	−0,0318
Juni 2015	−0,0464	−0,0158
Juli 2015	−0,0360	−0,0223
August 2015	0,0432	0,0235
September 2015	−0,0361	−0,1248
Oktober 2015	0,0143	−0,0506
November 2015	0,1060	0,1516
Dezember 2015	0,0394	0,0284

Die monatlichen Renditen der Müncher Rück-Aktie R_{MR} und die entsprechenden Renditen des DAX-Index R_{DAX} bereinigen wir um einen risikolosen Zins R_{rl}. Wir bilden

$$Y = R_{MR} - R_{rl}$$

und

$$X = R_{DAX} - R_{rl}\,.$$

Zur Zeit der Entstehung dieses Beispiels nehmen wir $R_{rl} = 0$ an und erhalten also für die Ausprägungen der Merkmale Y, X direkt die oben gegebenen Renditen. Die Wertepaare (y_i, x_i) sind in *Bild 3.1* veranschaulicht.

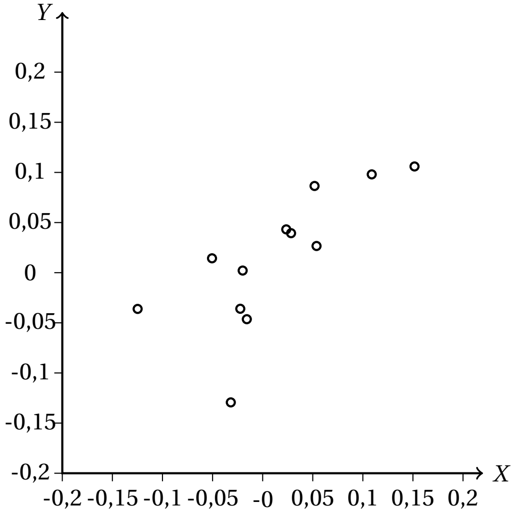

Bild 3.1 Renditen Münchner Rück gegen Renditen DAX

Später erklären wir die Variable Y durch die Variable X in Form einer *linearen Funktion*, entsprechend einer Geraden. Eine mögliche Gerade findet sich in *Bild 3.2*.

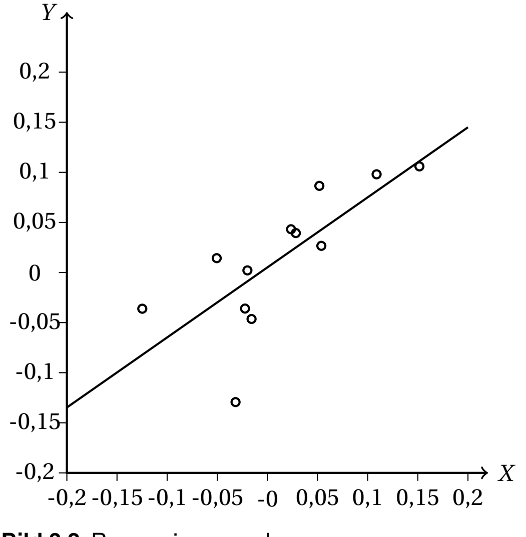

Bild 3.2 Regressionsgerade

■

3.1.1 KQ-Schätzer

Es soll nun allgemein der Frage nachgegangen werden, wie eine *abhängige Größe Y* durch eine *unabhängige Größe X* erklärt werden kann. Eine Gerade ist durch die Gleichung

$$\hat{Y} = a + bx$$

gegeben. Der „Hut“ ($\hat{}$) über dem Y bezeichnet einfach gesagt einen Schätzwert. In unserem Zusammenhang nennen wir die Gerade Regressionsgerade. Es entspricht a dem sogenannten *Achsenabschnitt*, der Wert für den die Gerade die y-Achse schneidet. b entspricht der *Steigung*. Die einzelnen Werte y_i liegen nicht exakt auf der Geraden. Den Wert zu x_i auf der Geraden bezeichnen wir mit $\hat{y}_i$. Er wird durch die Gerade erklärt:

$$\hat{y}_i = a + bx_i$$

Eine Veranschaulichung für eine Beobachtung i liefert *Bild 3.3*.

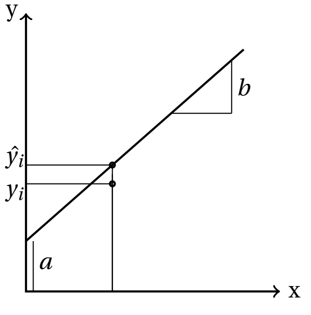

Bild 3.3 beobachteter Wert y_i, erklärter Wert $\hat{y}_i$

Den Abstand zwischen dem beobachteten Wert y_i und dem erklärten Wert $\hat{y}_i$ wird als *Residuum* oder Fehler (u_i) bezeichnet:

$$u_i = y_i - \hat{y}_i\,.$$

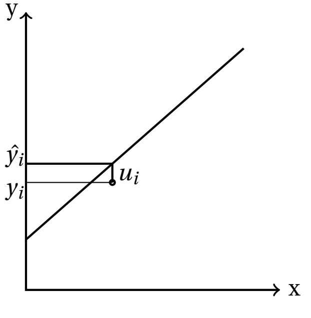

Bild 3.4 Residuum

Eine geschätzte Regressionsgerade, entsprechend einem geschätzten Achsenabschnitt $\hat{a}$ und einer geschätzten Steigung $\hat{b}$, kann nun durch die *Methode der kleinen Quadrate* gewonnen werden. Diese bestimmt $\hat{a}$ und $\hat{b}$ so, dass die Summe der quadrierten Fehler

$$\sum_i \hat{u_i}^2 = \sum_i (y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i))^2$$

minimal wird. Minimieren der Fehlerquadratsumme liefert die Lösungen:

$$\hat{b} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x^2}$$

und

$$\hat{a} = \overline{y} + \hat{b}\overline{x}$$

mit $\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ und $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Beispiel 3.2

Für die Daten aus *Beispiel 3.1*

Y	*X*
0,0021	−0,0200
0,0981	0,1089
⋮	⋮

errechnet sich:

$$\overline{x} = 0,0127 \qquad \overline{y} = 0,0140$$

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{12}\left((-0,02 - 0,0127)^2 + (0,1089 - 0,0127)^2 + \cdots\right)\\ &= 0,0050\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{12}((-0,02 - 0,0127)(0,0021 - 0,014) + (0,1089 - 0,0127)(0,0981 - 0,014) + \cdots)\\ &= 0,0035\,.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\hat{b} = \frac{0,0035}{0,0050} = 0,7$$

und

$$\hat{a} = 0,0140 - 0,7 \cdot 0,0127 = 0,005\,.$$

Dies entspricht dem geschätzten Zusammenhang:

$$\hat{y}_i = 0,005 + 0,7 \cdot x_i\,.$$

Somit ergibt sich für den beobachteten Zeitraum für die Münchner Rück eine im Schnitt 0,005 höhere Monatsrendite. Ändert sich der DAX um x, so ist die erklärte Bewegung der Münchner Rück gedämpft. Sie ändert sich dann nur um im Schnitt $0,7 \cdot x$. Oft sind solche Zusammenhänge über die Zeit hinweg nicht konstant. Besonders sind Schätzwerte $\hat{a}$ in dieser Anwendung in der Regel nicht verlässlich.
Die Regressionskoeffizienten werden häufig auch mit α anstatt a und β anstatt b bezeichnet. In der Finanzwirtschaft werden sie in dieser Anwendung auch mit α-Faktor und β-Faktor bezeichnet. Die Idee stammt aus einem umfangreicheren Modell, das mit ökonomischen Annahmen ausgestattet ist und *Capital-Asset-Pricing-Modell* (CAPM) genannt wird. Das CAPM wurde von den Wissenschaftlern William F. Sharpe, John Lintner und Jan Mossin unabhängig voneinander entwickelt. ■

3.1.2 Bestimmtheitsmaß

In der Anwendung ist es oft von Interesse, wie gut ein Regressionsmodell die gegebenen Daten erklärt. Aufschluss darüber liefert die *Streuungszerlegung*. Es kann gezeigt werden, dass die Streuung der beobachteten Werte (y) in die Streuung der Werte, die durch die Regression erklärt werden können $(\hat{y})$ und in die Streuung der Fehler $(\hat{u})$ zerlegt werden kann. Eher unüblich für diese Anwendung bezeichnen wir hier die Streuungen der Einfachheit halber mit der Varianz (anstatt der Quadratsumme):

$$Var(y) = Var(\hat{y}) + Var(\hat{u}).$$

Aus der Streuungszerlegung kann das sogenannte *Bestimmtheitsmaß* abgeleitet werden. Es entspricht dem Anteil der Streuung, des Merkmals Y, der durch die Regression erklärt werden kann:

$$R^2 = \frac{Var(\hat{y})}{Var(y)}.$$

Weiter kann das Bestimmtheitsmaß durch

$$R^2 = 1 - \frac{Var(\hat{u})}{Var(y)}$$

oder

$$R^2 = r_{xy}^2 \quad (r_{xy} \text{ bez. den Korrelationskoeffizienten})$$

berechnet werden. Das Bestimmtheitsmaß nimmt Werte zwischen null und eins an. Hohe Werte sprechen dafür, dass die abhängige Variable gut durch die Einflussgröße erklärt werden kann. Für $R^2 = 1$ liegen sämtliche Beobachtungen auf der geschätzten Regressionsgerade. Für $R^2 = 0$ sind die Wertepaare (x_i, y_i) unkorreliert.

Beispiel 3.3

Zunächst berechnen wir für das *Beispiel 3.2* zu den gegebenen Beobachtungswerten x_i die nach der geschätzten Regression prognostizierten Werte $\hat{y}$, indem wir die Werte x_i in die Regressionsgleichung einsetzen. Die geschätzten Residuen $\hat{u}$ entsprechen dann der Differenz zwischen den beobachteten Werten y_i und den prognostizierten. Für die ersten Werte ergibt sich exemplarisch:

$$\hat{y}_1 = 0,005 + 0,7 \cdot (-0,02) = -0,0088$$

und

$$\hat{y}_2 = 0,005 + 0,7 \cdot 0,1089 = 0,0813\,.$$

Die ersten geschätzten Fehler ergeben dann entsprechend:

$$\hat{u}_1 = 0,0021 - (-0,0088) = 0,0109$$

und

$$\hat{u}_2 = 0,0981 - 0,0813 = 0,01681\,.$$

Weiter berechnen wir die Streuungen der Werte y_i, der Werte $\hat{y}_i$ und der $\hat{u}_i$.

$$\begin{aligned} Var(y) &= \frac{1}{12}\left((0,0021 - 0,014)^2 + (0,0981 - 0,014)^2 + \cdots\right) \\ &= 0,0043\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{y}) &= \frac{1}{12}\left((-0,0088 - 0,014)^2 + (0,0813 - 0,014)^2 + \cdots\right) \\ &= 0,0024\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} Var(\hat{u}) &= \frac{1}{12}\left(0,0109^2 + 0,01681^2 + \cdots\right) \\ &= 0,0019\,. \end{aligned}$$

Hier wurde berücksichtigt, dass stets $\overline{y} = \overline{\hat{y}}$ und $\overline{\hat{u}} = 0$ gilt. Aus den Streuungen berechnet sich für das Bestimmtheitsmaß

$$R^2 = \frac{0,0024}{0,0043} = 0,57 \quad \left(\text{alternativ } R^2 = 1 - \frac{0,0019}{0,0043}\right).$$

Ebenfalls ergibt sich R^2 aus

$$r_{xy}^2 = \left(\frac{0,0035}{\sqrt{0,005 \cdot 0,0043}}\right)^2 = 0,57\,.$$

■

Sachwortverzeichnis