

Leseprobe

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche
Fachrichtungen

Band 3: Geometrie und Räume von Funktionen

ISBN (Buch): 978-3-446-44245-0

ISBN (E-Book): 978-3-446-44166-8

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44245-0>

sowie im Buchhandel.

Inhalt

| | |
|---|-----------|
| Vorwort | 5 |
| 1 Kalkül mit Differentialformen | 11 |
| 1.1 Zellen und Ketten..... | 11 |
| 1.2 Differentialformen und Keilprodukt..... | 16 |
| 1.3 Ränder..... | 22 |
| 1.4 Differentiale..... | 25 |
| 1.5 Unbestimmte Integrale von Differentialformen..... | 28 |
| 1.6 Integrale über Ränder und von Differentialen..... | 34 |
| 1.7 Gradient, Divergenz, Rotation..... | 37 |
| 1.8 Maxwellgleichungen..... | 42 |
| 1.9 Kurvenintegrale..... | 46 |
| 1.10 Flächenintegrale..... | 48 |
| 1.11 Raumintegrale..... | 56 |
| 1.12 Eulersche Gammafunktion..... | 61 |
| 1.13 Übungsaufgaben..... | 65 |
| 2 Differentialgeometrie | 74 |
| 2.1 Bewegliche Dreibeine..... | 74 |
| 2.2 Raumkurven..... | 77 |
| 2.3 Flächen im Raum..... | 80 |
| 2.4 Hyperbolisches Paraboloid..... | 83 |
| 2.5 Darboux'sches Dreibein und metrische Fundamentalmatrix..... | 86 |
| 2.6 Drehflächen..... | 88 |
| 2.7 Winkel, Länge, Flächeninhalt..... | 94 |
| 2.8 Oberfläche, Volumen..... | 97 |
| 2.9 Flächenkurven..... | 101 |
| 2.10 Kinematik eines punktförmigen Körpers..... | 105 |
| 2.11 Krümmungen einer Fläche..... | 108 |
| 2.12 Parallelverschiebung eines Vektors..... | 111 |
| 2.13 Übungsaufgaben..... | 115 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Krummlinige Koordinaten | 120 |
| 3.1 | Quadratische Plattkarten | 120 |
| 3.2 | Zylinderprojektionen | 125 |
| 3.3 | Gnomonische und stereographische Projektion | 129 |
| 3.4 | Karten einer Mannigfaltigkeit | 134 |
| 3.5 | Messen auf einer Mannigfaltigkeit | 137 |
| 3.6 | Ableitungskoeffizienten der Punkte | 139 |
| 3.7 | Inhaltselement einer Mannigfaltigkeit | 142 |
| 3.8 | Ableitungskoeffizienten der Vektoren | 144 |
| 3.9 | Krümmungen einer Mannigfaltigkeit | 148 |
| 3.10 | Übungsaufgaben | 151 |
| 4 | Integraltransformationen | 160 |
| 4.1 | Testfunktionen | 160 |
| 4.2 | Verallgemeinerte Funktionen | 163 |
| 4.3 | Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen | 166 |
| 4.4 | Diracs Deltafunktion | 170 |
| 4.5 | Differentiation verallgemeinerter Funktionen | 173 |
| 4.6 | Greensche Funktionen | 178 |
| 4.7 | Fouriers Integraltheorem | 182 |
| 4.8 | Zwei partielle Differentialgleichungen | 187 |
| 4.9 | Rechnen mit dem Differentialoperator | 190 |
| 4.10 | Anfangswertaufgaben | 194 |
| 4.11 | Fourierreihen | 197 |
| 4.12 | Partialbruchzerlegung des Cotangens | 202 |
| 4.13 | Übungsaufgaben | 205 |
| 5 | Funktionsräume | 213 |
| 5.1 | Lineare Räume | 213 |
| 5.2 | Zufallsvariablen | 215 |
| 5.3 | Wahrscheinlichkeitsrechnung | 221 |
| 5.4 | Inneres Produkt | 227 |
| 5.5 | Projektion eines Vektors | 231 |
| 5.6 | Erwartungswert und Varianz | 234 |
| 5.7 | Binomialverteilung | 237 |
| 5.8 | Poissonverteilung | 239 |
| 5.9 | Normalverteilung | 242 |
| 5.10 | Gesetz der großen Zahlen | 245 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.11 | Lineare Operatoren..... | 247 |
| 5.12 | Spektraldarstellung von Operatoren..... | 251 |
| 5.13 | Quantentheorie..... | 253 |
| 5.14 | Übungsaufgaben..... | 256 |
| 6 | Vollständige Räume..... | 261 |
| 6.1 | Dirichletsche Kernfunktionen..... | 261 |
| 6.2 | Fejérsche Kernfunktionen..... | 263 |
| 6.3 | Approximationssätze von Fejér und Weierstraß..... | 267 |
| 6.4 | Verschiedene Normen, unterschiedliche Konvergenz..... | 270 |
| 6.5 | Quadratisch summierbare Folgen..... | 273 |
| 6.6 | Hilberträume..... | 276 |
| 6.7 | Hermitepolynome..... | 279 |
| 6.8 | Quadratisch integrierbare Funktionen..... | 282 |
| 6.9 | Fouriertransformation..... | 285 |
| 6.10 | Übungsaufgaben..... | 288 |
| | Index..... | 293 |

Vorwort

Der dritte Band meines Lehrbuchs über Anwendungsorientierte Mathematik besteht aus zwei großen Teilen, die jeweils drei Kapitel umfassen. Der erste Teil thematisiert die Geometrie. Das Einleitungskapitel stellt die grundlegenden Rechenmethoden vor, die man gerne unter dem Namen „Vektoranalysis“ zusammenfasst. Es ist von zentraler Bedeutung für alle, die Mathematik in der Physik und im Ingenieurwesen anwenden wollen. Die beiden folgenden Kapitel über Differentialgeometrie und krummlinige Koordinaten bauen darauf auf. Sie richten sich vornehmlich an jene Leserinnen und Leser, die sich für das Vermessungswesen, für die abstrakte Mechanik oder Elektrodynamik, oder aber für die Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins interessieren. Der zweite Teil des Buches ist jenen Stoffgebieten gewidmet, die man unter dem Sammelbegriff „Höhere Analysis“ subsumiert. Der Bogen spannt sich dabei vom Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen bis hin zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im Zuge der Betrachtung linearer Funktionenräume im fünften Kapitel einen angemessenen Platz findet.

Die Ziele des Lehrbuchs werden in diesem Band konsequent weiter verfolgt: Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, welche die historische Entwicklung der zentralen mathematischen Konzepte betont und Exkurse in sprachliche Herleitungen einzelner Fachbegriffe sowie großzügige Abschweifungen in Erzählungen des geschichtlichen Umfeldes nicht scheut. Es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der nur das erklärt wird, was konstruktiv nachvollziehbar ist. Und es soll eine Einführung in die Mathematik geboten werden, bei der das Augenmerk vor allem auf Themen gelegt wird, die für Anwendungen unumgänglich sind.

Wie bei den beiden ersten Bänden des Buches ist auch hier die Anordnung des Lehrstoffs zuweilen ungewohnt. Es kommt den an Anwendungen der Mathematik Interessierten entgegen, wenn sie schon einige Verfahren, wie zum Beispiel die Berechnung von Fourierreihen, die Integraltransformationen, deren Brauchbarkeit beim Lösen partieller Differentialgleichungen und anderes mehr kennenlernen, bevor sie – wie es hier im sechsten und abschließenden Kapitel skizziert wird – mit der dahinter liegenden abstrakten Theorie konfrontiert werden. Neben vielen anderen ausgezeichneten Klassikern der Lehrbuchliteratur habe ich mich vor allem an dem brillant verfassten Buch von Harley Flanders „Differential Forms with Applications to the Physical Sciences“ und an dem beeindruckenden Buch von Robert D. Richtmyer „Principles of Advanced Mathematical Physics“ orientiert. Die wohl besten Zugänge zu den Themen konnte ich einst von Edmund Hlawka, von Johann Cigler und, was die Wahrscheinlichkeitstheorie betrifft, von Karl Sigmund in deren einzigartigen Vorlesungen an der Universität Wien erfahren. In diesem Buch versuche ich, so gut ich kann, dieses wertvolle Erbe zu vermitteln. Ein weiterer Leitstern für mich ist, wie bereits im Vorwort des ersten Bandes erwähnt, die souveräne Aufbereitung des Stoffes, die Bernard Friedman in seinen „Lectures on Applications-Oriented Mathematics“ gelang.

Auch Kenner der Materie werden an der einen oder anderen Stelle Ungewohntes finden: Den originellen Differentialrechnungsvorlesungen Ciglers verdanke ich eine raffinierte Herleitung

der sogenannten Transformationsformel mehrdimensionaler Integrale; der Satz von Stokes umgeht elegant die sonst von Vortragenden gefürchtete Umständlichkeit bei der Beweisführung. Dass man vollständige Räume quadratisch integrierbarer Funktionen mit verallgemeinerten Funktionen konkret und einsichtig beschreiben kann, hat Richtmyer hervorgehoben. Somit zeigt sich, dass die von Riemann entworfene, den Prinzipien des Konstruktivismus gehorchende Integrationstheorie auch bei der Betrachtung von Hilberträumen vollständig ausreicht. Und die abstrakte Darstellung von Atlanten differenzierbarer Mannigfaltigkeiten gelingt wohl dann am besten, wenn man vorher konkrete Kartenentwürfe des Globus studiert. Die Veranschaulichung durch ansprechende Abbildungen ist hier von hohem Nutzen. Ich bin meinem Kollegen Hans Havlicek, Grandseigneur der Darstellenden Geometrie an der Technischen Universität Wien, sehr dankbar, dass er mir dafür einige seiner ausgefeilten Kartenentwürfe freigiebigst zur Verfügung gestellt hat.

Auch dieser Band wurde vom Carl Hanser Verlag unter professioneller Betreuung von Christine Fritsch und Katrin Wulst mit großer Sorgfalt herausgegeben. Ihnen sei noch einmal herzlichst Dank gesagt. Und auch bei diesem Band bitte ich, trotz der gewissenhaften Korrekturarbeit von Andreas Körner und Carina Pöll, die noch immer verbliebenen Druckfehler zu verzeihen. Im Vorwort seines wunderbaren Buches „The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics“ schrieb George W. Mackey: „If the reader thinks a sign should be changed he is probably right. Perhaps there are more serious errors here and there.“ Die gleichen Worte möchte ich den Leserinnen und Lesern dieses Buches mit auf dem Weg geben.

Mein innigstes „Magnas gratias vobis ago“ möchte ich schließlich meiner Frau Bianca und meinen Kinder Laura und Alexander aussprechen: für ihre Nachsicht, für ihre Geduld, für ihre Zuneigung. Besonders stark und tief empfand ich sie beim Schreiben dieses Buches.

Wien, September 2014

Rudolf Taschner

■ 1.8 Maxwellgleichungen

„War es ein Gott, der diese Zeichen schrieb, die mit geheimnisvoll verborg'nem Trieb die Kräfte der Natur um mich enthüllen? Und mir das Herz mit stiller Freud erfüllen?“ Mit diesen Worten, die einen Vers aus Goethes Faust abgewandelt wiedergeben, leitete Ludwig Boltzmann den 1893 erschienenen zweiten Teil seiner „Vorlesung über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichts“ ein. Die „gottvollen“ Zeichen, von denen Boltzmann schwärmt, sind vier Gleichungen, welche die sechs Variablen ρ , J , E , H , D , B in Beziehung setzen. Dabei handelt es sich bei ρ um ein Skalarfeld, die *Ladungsdichte*, und bei den restlichen fünf Variablen um Vektorfelder: die *Stromdichte* J , die *elektrische Feldstärke* E , die *magnetische Feldstärke* H , die *elektrische Flussdichte* D und die *magnetische Flussdichte* B . Sowohl das Skalarfeld ρ als auch die Vektorfelder J , E , H , D , B hängen vom Ort X , wo sie gemessen werden, und der Zeit t , zu der sie gemessen werden, ab.

Im Einzelnen lauten diese vier Gleichungen

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} D = \rho & \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \\ \operatorname{div} B = 0 & \operatorname{rot} H - \frac{\partial D}{\partial t} = J \end{array}$$

Die links oben stehende Gleichung trägt den Namen *gaußsches Gesetz*, die rechts unten stehende Gleichung heißt zuweilen *ampèresches Gesetz*. Oberhalb von ihm ist das sogenannte *Induktionsgesetz* von Michael Faraday angeschrieben und unterhalb des gaußschen Gesetzes steht jene Gleichung, die das *Fehlen magnetischer Monopole* behauptet. Die Gruppe dieser vier Gleichungen erblickte in der von James Clerk Maxwell 1865 verfassten Schrift „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field“ das Licht der Welt, allerdings noch nicht in dieser Form. Die hier präsentierte Darstellung stammt vorrangig von Oliver Heaviside. Dennoch war es Maxwell, dem es gelang, die bahnbrechenden experimentellen Arbeiten von Michael Faraday, dem die Mathematik zeit seines Lebens fremd blieb, zusammen mit den Erkenntnissen, die zuvor bereits Charles-Augustin de Coulomb, Hans Christian Ørsted, Carl Friedrich Gauß, Jean-Baptiste Biot, Félix Savart, André-Marie Ampère und andere gewonnen hatten, auf die genannten vier Gleichungen zu konzentrieren. Warum sie Ingenieure wie Heaviside oder mathematische Physiker wie der oben zitierte Boltzmann so „schön“ empfinden, können wir verstehen, wenn wir diese Gleichungen aus dem Blickwinkel der Differentialformen betrachten.

Zur Vorbereitung erörtern wir, wie Skalar- und Vektorfelder differenziert werden, die nicht allein von den Ortskoordinaten, sondern zusätzlich von der Zeitvariable t abhängen:

Wir gehen zuerst von einem Skalarfeld $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$ aus. Dessen Differential errechnet sich als

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt = (\operatorname{grad} \Phi | dL) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt.$$

Außerdem können wir, da Φ diesmal von mehr als drei Variablen abhängt, auch die Differentialform dritter Stufe $\Phi dV = \Phi dx dy dz$ differenzieren:

$$d(\Phi dV) = d\Phi dV = \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt dV = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}dV dt.$$

Das Minuszeichen ergibt sich, weil sowohl dV als auch dt Differentialformen ungerader Stufen sind.

Dann gehen wir von einem Vektorfeld $v = v(x, y, z, t)$ aus. Bezeichnen wir seine Komponenten mit a, b, c , also $v = ai + bj + ck$, errechnet sich das Differential der mit $(v|dL)$ bezeichneten Differentialform erster Stufe als

$$\begin{aligned} d(v|dL) &= d(adx + bdy + cdz) = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) dzdx + \\ &+ \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx dy + \frac{\partial a}{\partial t} dt dx + \frac{\partial b}{\partial t} dt dy + \frac{\partial c}{\partial t} dt dz = (\text{rot } v|dF) - \left(\frac{\partial v}{\partial t}|dL\right) dt. \end{aligned}$$

Das Minuszeichen ergibt sich, weil zum Schluss eine Vertauschung von dx, dy und dz mit dt erfolgt. Ferner errechnet sich das Differential der mit $(v|dF)$ bezeichneten Differentialform zweiter Stufe als

$$\begin{aligned} d(v|dF) &= d(adydz + bdzdx + cdx dy) = \frac{\partial a}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial b}{\partial y} dy dz dx + \frac{\partial c}{\partial z} dz dx dy + \\ &+ \frac{\partial a}{\partial t} dt dy dz + \frac{\partial b}{\partial t} dt dz dx + \frac{\partial c}{\partial t} dt dx dy = \text{div } v \cdot dV + \left(\frac{\partial v}{\partial t}|dF\right) dt. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die folgenden vier Differentiationsregeln:

$$\begin{aligned} d\Phi &= (\text{grad } \Phi|dL) + \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt & d(v|dL) &= (\text{rot } v|dF) - \left(\frac{\partial v}{\partial t}|dL\right) dt \\ d(\Phi dV) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} dV dt & d(v|dF) &= \text{div } v \cdot dV + \left(\frac{\partial v}{\partial t}|dF\right) dt \end{aligned}$$

Nun kehren wir zu den Maxwellgleichungen zurück. Wir definieren zwei Differentialformen zweiter Stufe, nämlich

$$\lambda = (E|dL) dt + (B|dF) \quad \text{und} \quad \omega = (D|dF) - (H|dL) dt$$

und eine Differentialform dritter Stufe, nämlich

$$\sigma = \rho dV - (J|dF) dt.$$

Aus dem Induktionsgesetz und dem Fehlen magnetischer Monopole folgern wir:

$$\begin{aligned} d\lambda &= d(E|dL) dt + d(B|dF) = (\text{rot } E|dF) dt + \text{div } B \cdot dV + \left(\frac{\partial B}{\partial t} dt|dF\right) = \\ &= \left(-\frac{\partial B}{\partial t}|dF\right) dt + 0 + \left(\frac{\partial B}{\partial t}|dF\right) dt = 0. \end{aligned}$$

Aus dem gaußschen Gesetz und dem ampèreschen Gesetz folgern wir:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(D|dF) - d(H|dL) dt = \text{div } D \cdot dV + \left(\frac{\partial D}{\partial t} dt|dF\right) - (\text{rot } H|dF) dt = \\ &= \rho dV + \left(\frac{\partial D}{\partial t}|dF\right) dt - \left(J + \frac{\partial D}{\partial t}|dF\right) dt = \sigma. \end{aligned}$$

Die vier Maxwellgleichungen konzentrieren sich folglich auf die beiden folgenden und tatsächlich bestechend schönen Gleichungen

$$d\lambda = 0, \quad d\omega = \sigma$$

Diese beiden Gleichungen sprechen nicht allein wegen ihrer Eleganz an, sie erlauben zugleich zwei wichtige Folgerungen. Die erste Folgerung betrifft die zweite Gleichung $d\omega = \sigma$: Differentiation beider Seiten ergibt wegen $dd\omega = 0$

$$0 = d\sigma = d\rho dV - d(J|dF) dt = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt - \operatorname{div} J \cdot dV dt.$$

Hieraus folgt die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0$$

Sie besagt, dass eine Änderung der Ladungsdichte nur durch das „Abfließen“ der Stromdichte erfolgt. Die zweite Folgerung betrifft die erste Gleichung $d\lambda = 0$, der zufolge – jedenfalls lokal – eine Differentialform α erster Stufe mit $d\alpha = \lambda$ vorliegen muss. Wir schreiben dieses Integral von λ als

$$\alpha = (A|dL) + \Phi dt$$

und nennen das Skalarfeld Φ das *skalare Potential* und das Vektorfeld A das *Vektorpotential* des durch die beiden Vektorfelder E und B gekennzeichneten *elektromagnetischen Feldes*. Mit dieser Bezeichnung bedeutet $d\alpha = \lambda$

$$\begin{aligned} d\alpha &= d(A|dL) + d\Phi dt = (\operatorname{rot} A|dF) + \left(\frac{\partial A}{\partial t} dt|dL\right) + (\operatorname{grad} \Phi|dL) dt = \\ &= (\operatorname{rot} A|dF) + \left(\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}|dL\right) dt = \lambda = (B|dF) + (E|dL) dt. \end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt, dass die beiden Vektorfelder E und B die Konstruktion eines Skalarfeldes Φ und eines Vektorfeldes A mit

$$\operatorname{rot} A = B \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial A}{\partial t} = E$$

erlauben.

Kehren wir noch einmal zu den ursprünglichen Maxwellgleichungen zurück, die wir nun in der Form

$$\begin{aligned} \operatorname{div} D \cdot dV = \rho dV & \quad (\operatorname{rot} E|dF) = -\left(\frac{\partial B}{\partial t}|dF\right) \\ \operatorname{div} B \cdot dV = 0 & \quad (\operatorname{rot} H|dF) = \left(\frac{\partial D}{\partial t}|dF\right) + (J|dF) \end{aligned}$$

notieren. In dieser Schreibweise betonen wir einerseits, dass es sich um Gleichungen von Differentialformen handelt, und wir trennen die linken von den rechten Seiten so, dass links nur die Vektorfelder E , B , D , H mit deren Ableitungen nach den Ortskoordinaten vorkommen.

Dies hilft bei der folgenden Rechnung, die ein Schüler von Maxwell, der Physiker John Henry Poynting, als Erster durchführte. Poynting definierte den später nach ihm benannten Vektor – genauer: das nach ihm benannte Vektorfeld S gemäß der Formel

$$(S|dF) = (E|dL) (H|dL) .$$

Es ist klar, dass sich S aus dem Vektorprodukt von E mit H ergibt: $S = E \times H$. Konzentriert man sich allein auf die Ortskoordinaten, ergibt die Differentiation der obigen Formel

$$\operatorname{div} S \cdot dV = (\operatorname{rot} E|dF) (H|dL) - (E|dL) (\operatorname{rot} H|dF) .$$

Setzen wir nun auf der rechten Seite die in der rechten Spalte stehenden Maxwellgleichungen ein, bekommen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{div} S \cdot dV &= - \left(\frac{\partial B}{\partial t} |dF \right) (H|dL) - (E|dL) \left(\frac{\partial D}{\partial t} |dF \right) - (E|dL) (J|dF) = \\ &= - \left(\frac{\partial B}{\partial t} |H \right) dV - (E|J) dV - \left(E | \frac{\partial D}{\partial t} \right) dV . \end{aligned}$$

Die so erhaltene Formel

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} |H \right) + (E|J) + \left(E | \frac{\partial D}{\partial t} \right) + \operatorname{div} S = 0$$

wird als *Satz von Poynting* bezeichnet.

Betrachten wir den Spezialfall, dass die elektrischen Felder D und E sowie die magnetischen Felder B und H zueinander proportional sind. Es soll also zwei Konstanten, die sogenannte *Dielektrizität* ε und die sogenannte *Permeabilität* μ mit der Eigenschaft $D = \varepsilon E$ und $B = \mu H$ geben. Dann heißt die Variable

$$u = \frac{1}{2} (\varepsilon (E|E) + \mu (H|H)) = \frac{\varepsilon}{2} \|E\|^2 + \frac{\mu}{2} \|H\|^2$$

die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes. Dem Satz von Poynting zufolge errechnet sich deren zeitliche Änderung als

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left(E | \frac{\partial E}{\partial t} \right) + \mu \left(H | \frac{\partial H}{\partial t} \right) = -\operatorname{div} S - (E|J) .$$

Anschaulich deutete Poynting das Ergebnis

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} S + (E|J) = 0$$

so: Die Energiedichte des elektromagnetischen Feldes ändert sich, wenn einerseits die durch $(E|J)$ symbolisierte „Arbeitsdichte“ des Feldes am Strom verrichtet wird und wenn andererseits eine durch die Divergenz des Poyntingvektors S symbolisierte „Abstrahlung“ der Energiedichte vorliegt. Heinrich Hertz bewies, dass sich diese Abstrahlung als *Licht* offenbart. So gesehen darf man mit vollem Recht feststellen: Am ersten Tag der Schöpfung, an dem das Licht erschaffen wurde, erließ Gott die Maxwellgleichungen.

■ 1.9 Kurvenintegrale

Nun kehren wir wieder zur Sprache der Differentialformen zurück, weil sie einheitlich, prägnant und einprägsam zu formulieren erlaubt. Es ist keine Kunst, alles im Folgenden Erörterte in die Sprache der Skalar- und Vektorfelder zu übersetzen.

Wir betrachten auf einer t -Achse ein offenes Intervall J . Liegen drei (hinreichend oft stetig differenzierbare) Funktionen $f_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3 : J \rightarrow \mathbb{R}$ vor, ist durch

$$\begin{cases} x = x(t) = f_1(t) \\ y = y(t) = f_2(t) \\ z = z(t) = f_3(t) \end{cases}$$

eine *Kurve*, genauer: eine *Raumkurve* im x - y - z -Raum gegeben. Wir gehen dabei von einer *Jordankurve* aus, also einer Kurve, bei der jeder Punkt nur das Bild eines einzigen Parameterwertes ist. Bezeichnet $[a; b]$ ein kompaktes Teilintervall von J , fassen wir alle Bildpunkte $X = (x, y, z) = X(t)$ dieser Raumkurve, bei denen t das Intervall $[a; b]$ durchläuft, zu einem *Kurvenstück* Γ zusammen. Bezeichnet schließlich $\omega = udx + vdy + wdz$ eine Differentialform erster Stufe, ist das *Kurvenintegral*

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} udx + vdy + wdz$$

dadurch definiert, dass man für x, y, z die von t abhängigen Variablen $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ einsetzt und das Integral

$$\int_{t=a}^{t=b} udx + vdy + wdz = \int_a^b (u\dot{x} + v\dot{y} + w\dot{z}) dt$$

ermittelt. Eigentlich handelt es sich bei dem rechten Integral um das Integral entlang einer Zelle, nämlich um

$$\int_{\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} udx + vdy + wdz,$$

in dem $\Sigma = [a; b]$ eine eindimensionale Zelle entlang der t -Achse beschreibt. Die Formel

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Sigma} \omega$$

besagt nichts anderes, als dass *das Kurvenintegral, unabhängig von der Parametrisierung der Kurve, immer gleich groß ist.*

Handelt es sich bei Γ um eine geschlossene Kurve, also um ein Kurvenstück, für das $\partial\Gamma = \emptyset$ gilt, schreibt man, um dies zu betonen, für das obige Kurvenintegral zuweilen auch

$$\oint_{\Gamma} \omega.$$

Am besten versteht man den Begriff des Kurvenintegrals anhand von Beispielen: Wir betrachten das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz$$

und wollen es entlang dreier Kurvenstücke berechnen, die von $O = (0, 0, 0)$ zu $R = (1, 1, 1)$ führen: Die erste Kurve ist dabei durch die Parametrisierung $x = t$, $y = t^3$, $z = t^2$ gegeben. Das Kurvenstück Γ erhält man, wenn man t das Intervall $[0; 1]$ durchlaufen lässt. In diesem Beispiel errechnet sich das Kurvenintegral als

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz &= \int_{\Gamma} (3t^2 + 6t^2) dt + 20t \cdot t^6 d(t^3) - 14t^3 \cdot t^2 d(t^2) = \\ &= \int_0^1 9t^2 dt + 60t^9 dt - 28t^6 dt = \int_0^1 (9t^2 + 60t^9 - 28t^6) dt = 5. \end{aligned}$$

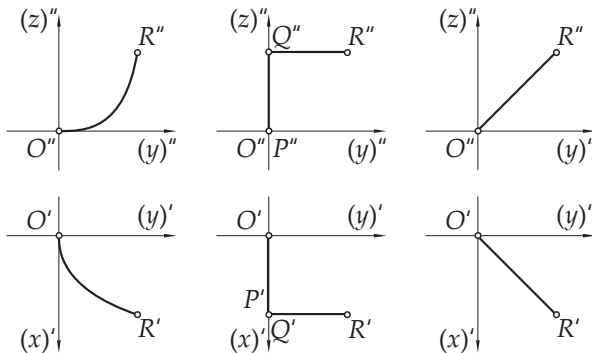


Bild 1.10 Die drei von O zu R führenden Kurvenstücke in Grund- und Aufriss: links das glatte und gekrümmte Kurvenstück, in der Mitte die Kette von drei achsenparallelen Strecken, rechts die Strecke von O nach R

Das zweite Kurvenstück ist in Wahrheit eine Kette von Kurvenstücken: Es ist jene Kette, die aus der von O zu $P = (1, 0, 0)$ führenden Strecke, danach aus der von P zu $Q = (1, 0, 1)$ führenden Strecke und schließlich aus der von Q zu R führenden Strecke besteht. Die erste Strecke wird von $x = t$, $y = 0$, $z = 0$ mit t aus $[0; 1]$ parametrisiert, die zweite Strecke wird von $x = 1$, $y = 0$, $z = t$ mit t aus $[0; 1]$ parametrisiert und die dritte Strecke wird von $x = 1$, $y = t$, $z = 1$ mit t aus $[0; 1]$ parametrisiert. In diesem Beispiel errechnet sich das Kurvenintegral als

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz &= \int_{[O;P]} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz + \\ &+ \int_{[P;Q]} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz + \int_{[Q;R]} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz = \\ &= \int_0^1 3t^2 dt + \int_0^1 0 + \int_0^1 20t^2 dt = 7 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Das dritte Kurvenstück ist die Strecke von O zu R : Hier ist die Kurve zum Beispiel durch die Parametrisierung $x = t$, $y = t$, $z = t$ gegeben und die Strecke Γ von O zu R erhält man, wenn t das Intervall $[0; 1]$ durchläuft. In diesem Beispiel errechnet sich das Kurvenintegral als

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz &= \int_0^1 (3t^2 + 6t) dt + 20t \cdot t^2 dt - 14t \cdot t dt = \\ &= \int_0^1 (20t^3 - 11t^2 + 6t) dt = 4 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Dass die hier über die drei verschiedenen Wege von O zu R berechneten Kurvenintegrale von $\omega = (3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz$ unterschiedliche Ergebnisse liefern, wundert nicht, weil das Differential von ω , also die Differentialform

$$\begin{aligned} d\omega &= d((3x^2 + 6z) dx + 20xy^2 dy - 14yz dz) = \\ &= 6x dx dx + 6dz dx + 20y^2 dx dy + 40xy dy dy - 14z dy dz - 14y dz dz = \\ &= -14z dy dz + 6dz dx + 20y^2 dx dy \end{aligned}$$

nicht mit Null übereinstimmt.

■ 1.10 Flächenintegrale

Wir betrachten in der von einer s -Achse und einer t -Achse aufgespannten Ebene ein Gebiet G . Liegen drei (hinreichend oft stetig differenzierbare) Funktionen $f_1 : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f_3 : G \rightarrow \mathbb{R}$ vor, ist durch

$$\begin{cases} x = x(s, t) = f_1(s, t) \\ y = y(s, t) = f_2(s, t) \\ z = z(s, t) = f_3(s, t) \end{cases}$$

eine *Fläche* im x - y - z -Raum gegeben. Wir gehen dabei von der Voraussetzung aus, jeder Punkt dieser Fläche sei nur das Bild eines einzigen Paares (s, t) von Parameterwerten. Bezeichnet Σ eine in G liegende zweidimensionale Zelle der s - t -Ebene, fassen wir alle Bildpunkte $X = (x, y, z) = X(s, t)$ dieser Fläche, bei denen das Paar (s, t) die Zelle Σ durchläuft, zu einem *Flächenstück* Δ zusammen. Bezeichnet schließlich $\omega = u dy dz + v dz dx + w dx dy$ eine Differentialform zweiter Stufe, ist das *Flächenintegral*

$$\int_{\Delta} \omega = \int_{\Delta} u dy dz + v dz dx + w dx dy$$

dadurch definiert, dass man für x, y, z die von s und von t abhängigen Variablen $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ einsetzt und das Integral

$$\int_{\Sigma} u dy dz + v dz dx + w dx dy$$

ermittelt.

Weil sich ein Flächenintegral über ein *zweidimensionales* Flächenstück erstreckt, schreibt man zuweilen statt eines Integralzeichens zwei eng aneinander gebundene Integralzeichen. Und handelt es sich bei Δ um eine geschlossene Fläche, also um ein Flächenstück, für das $\partial\Delta = \emptyset$ gilt, zeichnet man, um dies zu betonen, um die beiden Integralzeichen zusätzlich einen Ring. Man schreibt folglich zuweilen für das obige Flächenintegral

$$\iint_{\Delta} \omega \quad \text{und bei } \partial\Delta = \emptyset: \oiint_{\Delta} \omega.$$

Wir selbst aber halten uns an die Bezeichnung mit einem einzigen Integralsymbol.

3.3 Gnomonische und stereographische Projektion

Um die Kugel von ihrem Nordpol aus beschreiben zu können, projizieren wir die Kugelpunkte auf die Tangentialebene des Nordpols. In dieser Tangentialebene bildet der Nordpol den Ursprung. Durch ihn legen wir parallel zur x -Achse des Anschauungsraumes eine p -Achse und parallel zur y -Achse des Anschauungsraumes eine q -Achse.

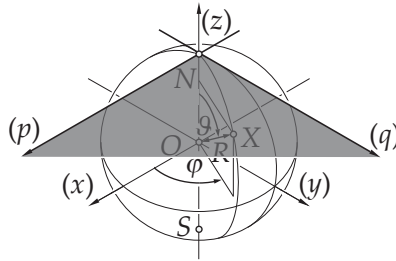


Bild 3.7 Schrägriss der Kugel mit der p - q -Ebene als Tangentialebene im Nordpol N

Es erweist sich als günstig, in der so parametrisierten p - q -Ebene Polarkoordinaten r und φ einzuführen, indem man

$$\begin{cases} p = r \cos \varphi \\ q = r \sin \varphi \end{cases}$$

setzt. Denn der darin vorkommende Winkel φ stimmt mit dem Azimut der Kugel überein. Wir sagen, dass eine *Azimutalprojektion* vorliegt, wenn für jeden Azimut $\varphi = \varphi_0$ die Punkte des Meridians, also der ϑ -Linie $\varphi = \varphi_0$ umkehrbar eindeutig auf die Punkte der diesen Meridian berührenden Tangente in der p - q -Ebene, also der r -Linie $\varphi = \varphi_0$ abgebildet werden. Es besteht mit anderen Worten eine umkehrbare eindeutige Zuordnung $r = r(\vartheta)$. Einerseits gilt somit

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{d\vartheta}{dr} \frac{\partial}{\partial \vartheta},$$

andererseits errechnet sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial p}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial}{\partial q} = \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial p} + \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial q}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} &= \frac{\partial p}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial q}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial q} = -r \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial p} + r \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial q}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nach $\partial/\partial p$ und $\partial/\partial q$ auf und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} &= \cos \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \cos \varphi \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \frac{\partial}{\partial \vartheta} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial q} &= \sin \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} = \sin \varphi \cdot \frac{d\vartheta}{dr} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Damit können wir in der p - q -Ebene die Fundamentalgrößen berechnen:

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial p} \right) = R^2 \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 \cos^2 \varphi + \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \sin^2 \varphi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial q} \right) = R^2 \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{R^2}{2} \left(\left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 - \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \right) \sin 2\varphi,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} \middle| \frac{\partial}{\partial q} \right) = R^2 \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 \sin^2 \varphi + \frac{R^2 \sin^2 \vartheta}{r^2} \cos^2 \varphi.$$

Eine sehr naheliegende Azimutalprojektion liegt vor, wenn man den vom Mittelpunkt der Kugel zum Kugelpunkt führenden Strahl mit der Tangentialebene schneidet. Dieser Strahl sticht wie ein Obelisk senkrecht aus der Erdoberfläche hervor. Seit der Antike verwendete man solche senkrechten Stäbe als Schattenanzeiger für Sonnenuhren. Die Griechen nannten den Schattenanzeiger ein *Gnomon*. Das Wort *gnomon* bezeichnet jemanden, der weiß oder prüft; *gnosis* ist die „Erkenntnis“. Demzufolge wird diese Abbildung der Kugel auf die p - q -Ebene die *gnomonische Projektion* genannt.

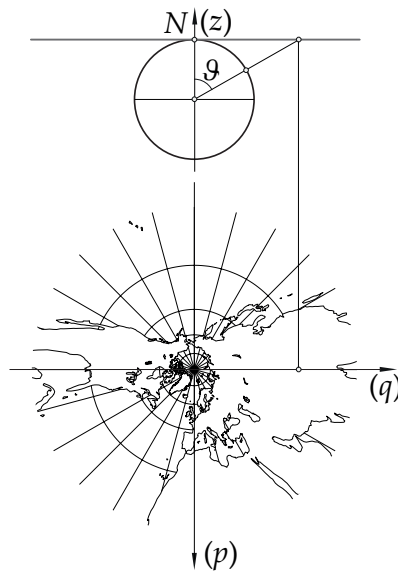


Bild 3.8 Die gnomonische Projektion

Bei ihr ist wegen $r : R = \tan \vartheta$, also wegen $r = R \tan \vartheta$

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{R}{\cos^2 \vartheta}, \quad \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 = \frac{\cos^4 \vartheta}{R^2}.$$

Wegen $r^2 = R^2 \tan^2 \vartheta$ und $(R^2 \sin^2 \vartheta) / r^2 = \cos^2 \vartheta$ lauten bei ihr die Fundamentalgrößen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial p} \right) &= \cos^4 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial q} \right) &= \frac{\cos^4 \vartheta - \cos^2 \vartheta}{2} \sin 2\varphi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial q} \middle| \frac{\partial}{\partial q} \right) &= \cos^4 \vartheta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Wie man sieht, ist es hier erlaubt, $\vartheta = 0$ zu setzen. Der Nordpol der Kugel ist keineswegs singular, ganz im Gegenteil: Bei ihm vereinfacht sich die metrische Fundamentalmatrix zur Einheitsmatrix. Sobald man aber vom Nordpol abrückt, treten die wildesten Verzerrungen zutage. Bloß die Nordhalbkugel wird von der gnomonischen Projektion erfasst, wobei die ganze p - q -Ebene als Karte dient. Die Punkte des durch $\vartheta = \pi/2$ gegebenen Äquators divergieren auf der Karte ins Unendliche, wobei es je nach Azimut φ verschiedene Richtungen des Unendlichen gibt, die wir bei $\varphi = 0$ mit ∞ , bei $\varphi = \pi$ mit $-\infty$, allgemein beim Azimut φ mit $e^{i\varphi} \infty$ abkürzen.

Obwohl sie alles andere als winkeltreu ist, bewährt sich die gnomonische Projektion für die Seefahrt aus dem folgenden Grund: Die kürzeste Verbindung zweier Punkte auf der Nordhalbkugel gewinnt man dadurch, dass man die Ebene, welche die beiden Punkte und den Kugelmittelpunkt trägt, mit der Kugel schneidet. Die Schnittkurve ist jener Großkreisbogen, *Orthodrome* genannt, der auf kürzestem Weg die beiden Punkte verbindet. Bei der gnomonischen Projektion schneidet auf der Tangentialebene die gleiche Ebene die Orthodrome als geradlinige Verbindung der beiden Punkte heraus. So erkennt man zum Beispiel sehr gut, welchen ziemlich weit nach Norden gerichteten Weg ein Schiff von Southhampton nach New York einschlagen muss, um dabei möglichst wenige Seemeilen fahren zu müssen.

Bei der sogenannten *stereographischen Projektion* schneidet man nicht den vom Mittelpunkt, sondern den vom Südpol der Kugel zum Kugelpunkt führenden Strahl mit der Tangentialebene. Das griechische stereos bedeutet eigentlich „hart“ oder „fest“, hat also mit der Konstruktion von der Wortbedeutung her kaum etwas gemein. Trotzdem ist diese Projektion bereits den beiden griechischen Astronomen Hipparch und Ptolemäus bekannt. Möglicherweise entdeckten sie schon Gelehrte des alten Ägypten. Jedenfalls ist bei ihr wegen $r : (2R) = \tan(\vartheta/2)$, also wegen $r = 2R \tan(\vartheta/2)$

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R \left(1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \quad \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)^2 = \frac{1}{R^2 \left(1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} = \frac{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{R^2}.$$

Wir kommen auf den im vorigen Abschnitt genannten Trick zurück und verwenden die Beziehungen

$$\sin \vartheta = \frac{2 \tan \frac{\vartheta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} = \frac{\frac{4 \tan^2 \frac{\vartheta}{2}}{\left(1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2}}{4R^2 \tan^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{1}{R^2 \left(1 + \tan^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2} = \frac{\cos^4 \frac{\vartheta}{2}}{R^2}.$$

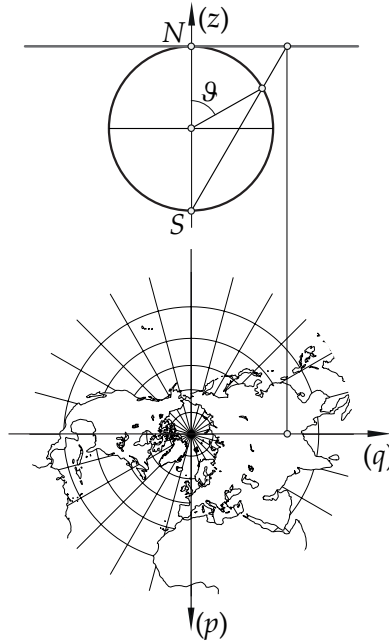


Bild 3.9 Die stereographische Projektion

Darum lauten bei der stereographischen Projektion die Fundamentalgrößen

$$\left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial p}\right) = \cos^4 \frac{\vartheta}{2}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial p} \middle| \frac{\partial}{\partial q}\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial q} \middle| \frac{\partial}{\partial q}\right) = \cos^4 \frac{\vartheta}{2}.$$

Auch hier ist es erlaubt $\vartheta = 0$ zu setzen, den Nordpol somit als regulären Kugelpunkt zu betrachten. Wie bei der gnomonischen Projektion vereinfacht sich bei ihm die metrische Fundamentalmatrix zur Einheitsmatrix. Im Übrigen zeigt sich, dass die stereographische Projektion überall *winkeltreu* ist und bis auf den Südpol die gesamte Kugel erfasst, wobei die ganze p - q -Ebene als Karte dient. Der Südpol selbst wird in der Karte als unendlich ferner Punkt wahrgenommen. Aus Sicht der stereographischen Projektion gibt es also nicht wie bei der gnomonischen Projektion unendlich viele unendlich ferne Punkte $e^{i\varphi} \infty$, sondern nur einen, den man als Bruch $1/0$ symbolisiert.

In der Antike und im 16. und 17. Jahrhundert, als man vom Nordpol noch gar nichts kannte, hatte man die Tangentialebene bei der stereographischen Projektion nicht an den Nordpol, sondern an einen Punkt des Äquators, zum Beispiel am Schnittpunkt des Äquators mit dem Greenwichmeridian, geheftet. Außerdem begnügte man sich, nur eine Halbkugel abzubilden, zum Beispiel die Hemisphäre mit den durch $\varphi = \pm\pi/2$ gegebenen Meridianen als Grenzen. Dadurch erhielten die berühmten Kartographen Jean Roze, Rumold Mercator, der Sohn des Gerard Mercator, oder François d’Aiguillon ihre beeindruckenden winkeltreuen Kartenentwürfe, die man in den frühen Atlanten bewundern kann.

Kehren wir noch einmal zur stereographischen Projektion mit dem Nordpol als Aufpunkt der Tangentialebene zurück. Wir überlegen uns, wie sich in ihr die durch

$$\varphi = \varphi_0 - (1/a) \ln \arctan(\vartheta/2)$$

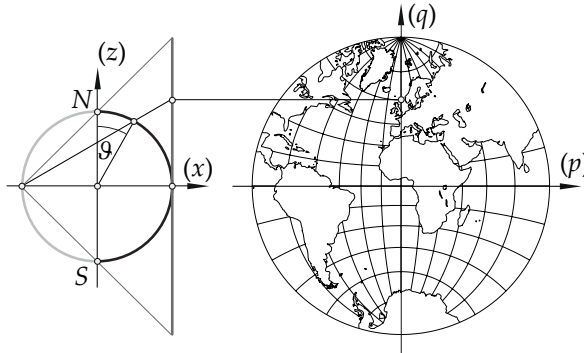


Bild 3.10 Die stereographische Projektion der östlichen Hemisphäre

gegebene Loxodrome darstellt. Beachten wir, dass $\tan(\vartheta/2) = r/(2R)$ ist, schließen wir aus der Gleichung $a(\varphi - \varphi_0) + \ln(r/(2R)) = \ln(re^{a(\varphi - \varphi_0)}/(2R)) = 0$ auf die Formel

$$r = 2Re^{a(\varphi_0 - \varphi)}$$

für die Loxodrome. Sie zeigt sich in der p - q -Ebene als sogenannte *logarithmische Spirale*, die sich um den Nordpol windet.

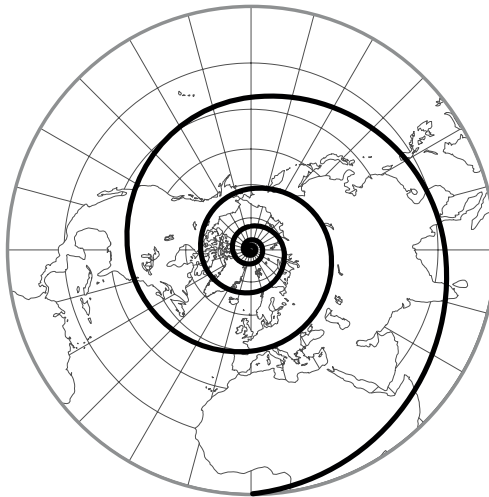


Bild 3.11 Die stereographische Projektion bildet eine Loxodrome als logarithmische Spirale ab

Aus der Winkeltreue der stereographischen Projektion schloss Jakob Bernoulli, dass die logarithmische Spirale die vom Nordpol ausgehenden Strahlen stets unter dem gleichen Winkel schneidet. Er war von der von ihm entdeckten geometrischen Eigenschaft dieser schönen Kurve so fasziniert, dass er sie auf seinem Grabstein graviert wissen wollte, versehen mit den Worten „eadem mutata resurgo“, „Verwandelt kehre ich als Gleiche wieder“ – gemeint ist wohl neben der Kurve auch die Seele des Jakob Bernoulli. Leider hatte der Steinmetz aber statt ihrer eine archimedische Spirale gemeißelt.

■ 3.4 Karten einer Mannigfaltigkeit

Die Idee Bernhard Riemanns, die er in seinem Vortrag vor Gauß zum Ausdruck brachte, bestand darin, die hier erörterten Gedanken zu verallgemeinern. Riemann geht von einem Gebiet L im n -dimensionalen q_1 - q_2 -...- q_n -Raum aus und nennt die im Gebiet liegenden Objekte (q_1, q_2, \dots, q_n) Punkte einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Das Gebiet selbst heißt eine Karte dieser Mannigfaltigkeit. Zusätzlich betrachtet er in jedem der Punkte einen Vektorraum $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q_1, q_2, \dots, q_n)$, der die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial}{\partial q_n}$$

als Basisvektoren besitzt. Vektoren u, v , genau genommen: Vektorfelder u, v , sind als lineare Differentialoperatoren

$$u = a_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial q_n}, \quad v = b_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial q_n}$$

gegeben. Ihre Komponenten a_m und b_m sind als Skalare im Allgemeinen vom jeweiligen Aufpunkt (q_1, q_2, \dots, q_n) der Vektoren u, v abhängige Variablen. Es ist klar, wie man ihre Summe $u + v$ und bei einem Skalar $c = c(q_1, q_2, \dots, q_n)$ das Produkt cu festlegt:

$$u + v = (a_1 + b_1) \frac{\partial}{\partial q_1} + (a_2 + b_2) \frac{\partial}{\partial q_2} + \dots + (a_n + b_n) \frac{\partial}{\partial q_n},$$

$$cu = ca_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + ca_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + \dots + ca_n \frac{\partial}{\partial q_n}.$$

Die Pointe in dem von Riemann eingeführten Begriff der Mannigfaltigkeit besteht darin, dass diese im Allgemeinen nicht nur eine Karte, sondern eine Mehrzahl von Karten, einen ganzen Atlas besitzt. Es kann sein, dass die Punkte (q_1, q_2, \dots, q_n) eines Teilgebietes M von L zugleich Punkte $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ eines Teilgebietes einer anderen Karte Λ der gleichen Mannigfaltigkeit sind.

Wir haben diese Betrachtungsweise im vorigen Abschnitt kennengelernt: Die Kugel ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Mit der gnomonischen Projektion werden die Punkte der nördlichen Halbkugel, der Nordpol mit eingeschlossen erfasst. Mit zwei quadratischen Plattkarten P_α und P_β bei voneinander verschiedenen Winkeln α, β werden alle Kugelpunkte, abgesehen vom Nordpol und vom Südpol erfasst. Schließlich kann man die gnomonische Projektion analog zu der im vorigen Abschnitt betrachteten auch mit der Tangentialebene am Südpol als Karte definieren und somit die Punkte der südlichen Halbkugel, den Südpol mit eingeschlossen, erfassen. Die Kugel ist somit von einem aus vier Karten bestehenden Atlas beschrieben.

Es würde sogar ein Atlas bestehend aus den beiden folgenden Karten genügen: Zum einen die im vorigen Abschnitt beschriebene stereographische Projektion in die p - q -Ebene, bei der im Ursprung der Ebene der Nordpol liegt und der Südpol als einziger Kugelpunkt, mit $1/0$ bezeichnet, im Unendlichen liegt. Wir erinnern uns: Setzt man $p^2 + q^2 = r^2$ und bezeichnen wie üblich R den Radius der Kugel, ϑ ihren Polwinkel sowie φ ihren Azimut, gelten die Beziehungen $p = r \cos \varphi$, $q = r \sin \varphi$, zusammengefasst zu $p + jq = r e^{j\varphi}$, sowie

$$r = 2R \tan \frac{\vartheta}{2}.$$

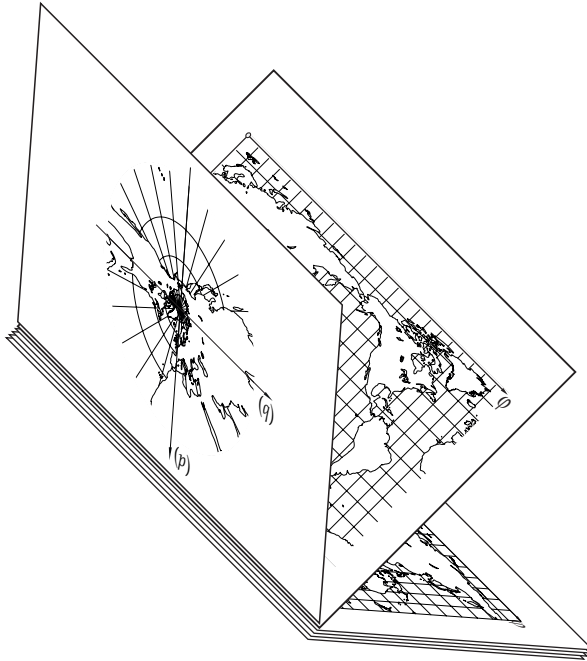


Bild 3.12 Ein Atlas der Kugel, bestehend aus der gnomonischen Projektion, zwei quadratischen Plattkarten und weiteren Karten

Und zum anderen die analoge stereographische Projektion in die λ - μ -Ebene, bei der Nord- und Südpol die Rollen vertauschen. Bei ihr setzen wir $\lambda^2 + \mu^2 = \varrho^2$. Wir schreiben $\lambda = \varrho \cos \varphi$, $\mu = -\varrho \sin \varphi$, zusammengefasst zu $\lambda + j\mu = \varrho e^{-j\varphi}$. Warum wir bei $\mu = -\varrho \sin \varphi$ ein Minuszeichen auftauchen lassen, werden wir am Ende des Abschnitts verstehen. Jedenfalls gilt

$$\varrho = 2R \tan \frac{\pi - \vartheta}{2} = 2R \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right) = \frac{2R}{\tan \frac{\vartheta}{2}} = \frac{4R^2}{r}.$$

Hier liegt der Südpol im Ursprung der Ebene und der Nordpol ist als einziger Kugelpunkt, mit $1/0$ bezeichnet, seinerseits im Unendlichen. Die vom Nord- und Südpol verschiedenen Kugelpunkte werden sowohl als (p, q) als auch als (λ, μ) erfasst. Aus

$$\lambda + j\mu = \varrho e^{-j\varphi} = \frac{4R^2}{re^{j\varphi}} = \frac{4R^2}{p + jq} = \frac{4R^2 p}{p^2 + q^2} - j \frac{4R^2 q}{p^2 + q^2}$$

ersehen wir den Zusammenhang der Koordinaten λ , μ und der Koordinaten p , q des gleichen Kugelpunktes:

$$\lambda = \frac{4R^2 p}{p^2 + q^2}, \quad \mu = \frac{-4R^2 q}{p^2 + q^2},$$

und genauso gilt:

$$p = \frac{4R^2 \lambda}{\lambda^2 + \mu^2}, \quad q = \frac{-4R^2 \mu}{\lambda^2 + \mu^2}.$$

4

Integraltransformationen

■ 4.1 Testfunktionen

„Eine *Funktion* ist ein Rechenverfahren.“ So wurde im ersten Band der Begriff „Funktion“ definiert. Ob diese Definition damit übereinstimmt, was sich Leibniz, der Erfinder dieses Begriffs, unter einer „Funktion“ vorstellte, darf bezweifelt werden. Denn diese Definition geht allein vom sogenannten *algorithmischen* Gesichtspunkt aus. (Das Wort *Algorithmus* stammt vom Namen des im 9. Jahrhundert wirkenden Gelehrten Muhammed al-Chwarizmi, dessen mit Rechenaufgaben vollgestopftes Lehrbuch in der mittelalterlichen lateinischen Übersetzung mit den Worten „dixit Algorismi“, „Algorismi hat gesagt“ beginnt.) Ein Algorithmus ist ein Rechenverfahren, wie es sich der blutigste Laie vorstellt. Der einer Funktion zugrundeliegende Algorithmus startet bei Eingabe des Argumentwertes. Er führt nach starr vorgegebenen Regeln klar festgelegte Umformungen durch. Er hält mit der Ausgabe eines Funktionswertes an – ausgenommen er landet bei einem Widerspruch und druckt „error“ aus, oder er gerät in eine „Schleife“, bewerkstelligt also endlos Umformungen, ohne ein Ziel zu erreichen. In diesen Ausnahmefällen wird der eingegebene Argumentwert als für die Funktion „ungültig“ verworfen. Er gehört nicht dem Argumentbereich der Funktion an.

Leibniz bevorzugte jedoch – so dürfen wir vermuten – nicht den algorithmischen, sondern den *beschreibenden* Gesichtspunkt. Er stellte sich nicht die Frage „Was ist eine Funktion?“, sondern die Frage „Wie sieht eine Funktion aus?“ Leibniz hatte das Bild der Funktionskurve $y = f(x)$ vor seinen Augen. Er war – getreu seinem Wort „natura non facit saltus“, „die Natur macht keine Sprünge“ – davon überzeugt: Eine Funktion f verformt die x -Achse in der x - y -Ebene zu einer Kurve. Auf welche Weise bei einem vorliegenden Argumentwert $x = a$ der Funktionswert $y = b = f(a)$ zustandekommt, interessiert Leibniz erst in zweiter Linie. Die Funktionskurve $y = f(x)$ wird einfach als vorhanden vorausgesetzt.

Nimmt man den algorithmischen Standpunkt ein, stellt sich die Frage: Wie *berechnet* man bei einem gegebenen Argumentwert $x = a$ den Funktionswert $y = b = f(a)$? Nimmt man hingegen den beschreibenden Standpunkt ein, stellt sich die Frage: Wie *misst* man bei einem gegebenen Argumentwert $x = a$ den Funktionswert $y = b = f(a)$? Hierauf gab erst die Mathematik des 20. Jahrhunderts, drei Jahrhunderte nach Leibniz, eine befriedigende Antwort. Allerdings sind einige Vorbereitungen zu treffen, bevor wir diese Antwort verstehen können.

Wir gehen vorerst von der Voraussetzung aus, dass die Funktion f über einem offenen Intervall definiert und stetig ist, und dass a diesem offenen Intervall angehört. Der einfacheren Bezeichnung zuliebe wollen wir zunächst $a = 0$ annehmen. Um den Funktionswert $b = f(0)$ *messen* zu können, betrachten wir für jede Zahl n die Funktion φ_n mit

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} c_n e^{-n^2/(1-n^2x^2)}, & \text{wenn } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \text{ gilt} \\ 0, & \text{wenn } |x| \geq \frac{1}{n} \text{ gilt.} \end{cases}$$

Die positive Konstante c_n ist hierbei so festgelegt, dass

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1/n}^{1/n} e^{-n^2/(1-n^2x^2)} dx = 2 \int_0^{1/n} e^{-n^2/(1-n^2x^2)} dx$$

zutritt. Wir hatten in Abschnitt 1.8 des zweiten Bandes die Funktionen φ_n bereits kennengelernt. Sie besitzen die folgenden Eigenschaften: Erstens ist jedes φ_n über \mathbb{R} definiert und beliebig oft stetig differenzierbar. Zweitens nimmt für alle x außerhalb des kompakten Intervalls $[-1/n; 1/n]$ die Funktion φ_n den Wert Null an, und sie nimmt innerhalb des offenen Intervalls $] -1/n; 1/n[$ nur positive Werte an. Drittens gilt aufgrund der Festlegung der Konstanten c_n

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = 1.$$

Man kann die bombastisch wirkenden Integrationsgrenzen $-\infty$ und ∞ ohne Weiteres durch -1 und 1 oder durch $-1/n$ und $1/n$ ersetzen. Wir werden es aber im Verlauf dieses Kapitels vorrangig mit Integralen über ganz \mathbb{R} zu tun haben und wollen uns daher an die Grenzen $-\infty$ und ∞ zu gewöhnen beginnen. Mithilfe einer geeigneten Funktion unter den $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ erreichen wir das Ziel: $b = f(0)$ „messen“ zu können:

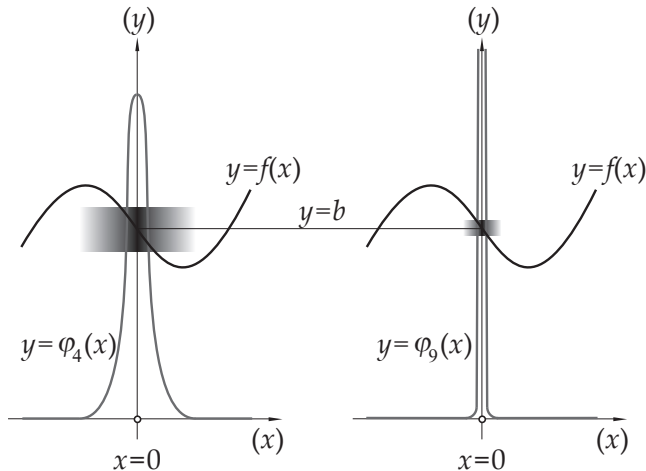


Bild 4.1 Messung des Funktionswertes $b = f(0)$ links mithilfe der Testfunktion φ_4 und rechts mithilfe der Testfunktion φ_9

Die positive Größe ε sei beliebig klein genannt. Wir nehmen an, die Rechengenauigkeit sei so vereinbart, dass zwei reelle Größen bereits dann als gleich gelten, falls sie sich höchstens um ε unterscheiden. Da f als stetig vorausgesetzt wurde, kann man ein positives δ so bestimmen, dass einerseits $] -\delta; \delta[$ im Argumentbereich von f enthalten ist und andererseits für alle x aus $] -\delta; \delta[$

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - b| < \varepsilon$$

zutrifft. Wählt man die Zahl n so groß, dass $n \geq 1/\delta$ stimmt, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \left| b - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| &= \left| b \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{-1/n}^{1/n} (b - f(x)) \varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |b - f(x)| \varphi_n(x) dx \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) dx = \varepsilon. \end{aligned}$$

Darum ermittelt das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx$$

im Rahmen der vereinbarten Rechengenauigkeit den Funktionswert b . Daher gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(x) dx = f(0).$$

Dem hier abstrakt vorgestellten Messprozess liegt ein anschauliches Bild zugrunde: Blickt man auf die Funktionskurven der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$, sieht man, wie sie sich mit wachsendem n immer „nadelartiger“ an der Stelle 0 zusammenziehen und zugleich an dieser Stelle so an Höhe gewinnen, dass die von ihnen oberhalb der x -Achse eingeschlossene Fläche den Inhalt 1 beibehält. Bei der Bildung von $f(x) \varphi_n(x)$ spielen nur die ganz nahe bei Null gelegenen Argumentwerte eine Rolle. Wegen der Stetigkeit von f macht es für große n im Rahmen der vereinbarten Rechengenauigkeit keinen Unterschied, ob man $f(x) \varphi_n(x)$ oder $f(0) \varphi_n(x) = b \varphi_n(x)$ betrachtet. Die Funktion φ_n ähnelt einem Abtastgerät: Es *testet*, wie sich die zu messende Funktion f an der Stelle $a = 0$ verhält. Das ist der Grund, warum um 1935 der russische Mathematiker Sergei Lwowsch Sobolew und ein paar Jahre später der französische Mathematiker Laurent Schwartz, die bahnbrechenden Erfinder der in diesem Kapitel erläuterten Theorie, die Funktion φ_n eine *Testfunktion* nannten.

Wir fassen den Begriff der Testfunktion sehr weit. Eine *Testfunktion* ϑ liegt bereits dann vor, wenn ϑ über \mathbb{R} definiert ist, wenn ϑ beliebig oft stetig differenzierbar ist und wenn ϑ einen „kompakten Träger“ besitzt. Mit dieser letzten Bedingung meinen wir, dass es ein kompaktes Intervall gibt, außerhalb dessen die Testfunktion ϑ nur den Wert Null annimmt. Jedes kompakte Intervall, das diese Eigenschaft besitzt, heißt ein *Träger* der Funktion ϑ .

Bei einem beliebigen reellen a sind zum Beispiel die durch $\psi_n(x) = \varphi_n(a - x)$ gegebenen Funktionen ψ_n Testfunktionen. Wenn die stetige Funktion f in einem offenen Intervall um a definiert ist, gilt offenkundig

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(a - x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a - y) \varphi_n(y) dy = f(a). \end{aligned}$$

Dies zeigt, wie man mit Testfunktionen die Funktionswerte stetiger Funktionen „messen“ kann.

Mit je zwei Testfunktionen φ und ϑ ist auch deren Summe $\varphi + \vartheta$, definiert durch $(\varphi + \vartheta)(x) = \varphi(x) + \vartheta(x)$, eine Testfunktion. Und mit jeder Testfunktion ϑ und jeder Konstante c ist auch das Produkt $c\vartheta$, definiert durch $(c\vartheta)(x) = c\vartheta(x)$, eine Testfunktion. *Die Gesamtheit aller Testfunktionen bildet daher einen linearen Raum.* Auch das Produkt zweier Testfunktionen bleibt eine Testfunktion, doch das spielt erst später eine Rolle.

Schließlich erklären Sobolew und Schwartz, unter welchen Bedingungen in ihrer Theorie eine Folge von Testfunktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ *konvergent* heißt und eine Testfunktion ϑ als *Grenzwert* besitzt. Zunächst verlangen sie, dass die Konvergenz nur dann vorliegt, wenn es ein kompaktes Intervall gibt, das allen Funktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ der Folge als Träger dient. Theoretisch könnten sie die Konvergenz dann vorliegen lassen, wenn die Testfunktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ gleichmäßig gegen die Funktion ϑ konvergieren. Doch das ist ihnen aus Gründen, die wir bald verstehen werden, zu wenig. Sobolew und Schwartz verlangen mehr: Die Konvergenz im Sinne ihrer Theorie liegt erst dann vor, wenn nicht nur die Testfunktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ in dem kompakten Intervall gleichmäßig gegen die Funktion ϑ konvergieren, sondern auch deren Ableitungen $\vartheta'_1, \vartheta'_2, \dots, \vartheta'_n, \dots$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen die Ableitung ϑ' der Funktion ϑ konvergieren, darüber hinaus deren Ableitungen $\vartheta''_1, \vartheta''_2, \dots, \vartheta''_n, \dots$ in diesem Intervall gleichmäßig gegen die zweite Ableitung ϑ'' von ϑ konvergieren, und dies so weiter für alle höheren Ableitungen. Weil sie unendlich viele Voraussetzungen für das Vorliegen der Konvergenz verlangen, sprechen sie bildhaft von der *starken Konvergenz* der Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ von Testfunktionen gegen die Testfunktion ϑ . Sobolew und Schwartz sorgen mit ihren vielen Forderungen an die Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ dafür, dass nur unter sehr einschneidenden Bedingungen die Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ *stark konvergent* heißt und eine Testfunktion ϑ als *starken Grenzwert* besitzt. Die Folge der Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ erfüllt zum Beispiel ganz und gar nicht die genannten Voraussetzungen der starken Konvergenz. Diese Funktionen haben zwar $[-1; 1]$ als gemeinsamen kompakten Träger, konvergieren in ihm aber nicht gleichmäßig, ja an der Stelle 0 nicht einmal punktweise. Von einer gleichmäßigen Konvergenz der Folge ihrer Ableitungsfunktionen ist natürlich auch nicht die Rede.

Fassen wir zusammen:

Testfunktionen sind Funktionen, die einen kompakten Träger besitzen und beliebig oft stetig differenzierbar sind. Die starke Konvergenz liegt dann vor, wenn sie über einem kompakten Intervall erfolgt, das als Träger aller Funktionen dient, und wenn die gleichmäßige Konvergenz nicht allein von der Funktionenfolge selbst, sondern auch von der Folge der ersten, der Folge der zweiten, und der Folge aller weiteren höheren Ableitungen der Funktionen gegeben ist.

Sobolew und Schwartz schufen sich damit ein Instrumentarium von „besonders zahmen“ Funktionen, die sie unter ein „besonders strenges“ Regiment stellen. Ihr Ziel war, damit „besonders wilde“ Funktionen bändigen zu können. Darunter sogar Funktionen, die dem algorithmischen Gesichtspunkt entgleiten. Wie ihnen dies gelingt, lehrt der nächste Abschnitt.

■ 4.2 Verallgemeinerte Funktionen

Angelpunkt der Theorie von Sobolew und Schwartz ist, dass jeder stetigen Funktion f und jeder Testfunktion ϑ durch die Zuordnung

$$\langle f | \vartheta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \vartheta(x) dx$$

ein Skalar zugewiesen wird. Weil ϑ einen kompakten Träger besitzt, handelt es sich hierbei in Wahrheit um ein Integral mit einem kompakten Intervall als Integrationsbereich. Überdies ist das Produkt der beiden Funktionen f und ϑ stetig und daher über dem kompakten Intervall integrierbar. Frappant erinnert diese Zuordnung an ein inneres oder skalares Produkt. In der Tat gelten die *Rechengesetze der Linearität*. Es gilt nämlich für beliebige stetige Funktionen f, f_1, f_2 , für beliebige Testfunktionen $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ und für beliebige Konstanten c_1, c_2 sowohl das Gesetz

$$\langle c_1 f_1 + c_2 f_2 | \vartheta \rangle = c_1 \langle f_1 | \vartheta \rangle + c_2 \langle f_2 | \vartheta \rangle ,$$

wie auch das Gesetz

$$\langle f | c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 \rangle = c_1 \langle f | \vartheta_1 \rangle + c_2 \langle f | \vartheta_2 \rangle .$$

Allerdings schreiben wir diese Zuordnung nicht wie bei einem inneren Produkt mit runden Klammern, sondern mit spitzen Klammern. Denn die beiden in ihm auftretenden Faktoren f und ϑ sind nicht dem gleichen linearen Raum entnommen, sondern zwei verschiedenen linearen Räumen: der erste Faktor f dem Raum der stetigen Funktionen und der zweite Faktor ϑ dem Raum der Testfunktionen.

Die bahnbrechende Idee von Sobolew und Schwartz bestand darin, bei dieser Zuordnung den Spieß gleichsam umzudrehen: Nicht mithilfe einer stetigen Funktion f eine Art inneres Produkt mit einer Testfunktion ϑ zu erklären, sondern umgekehrt mithilfe einer Art inneren Produkts mit einer Testfunktion ϑ den Begriff der „Funktion“ möglichst allgemein zu fassen. Sobolew nennt ein mit f bezeichnetes Objekt eine *verallgemeinerte Funktion*, wenn f jeder Testfunktion ϑ eine reelle Größe $\langle f | \vartheta \rangle$ so zuweist, dass diese Zuordnung von ϑ zu $\langle f | \vartheta \rangle$ erstens dem *Rechengesetz der Linearität* gehorcht. Dieses besagt, dass für je zwei Testfunktionen ϑ_1, ϑ_2 und je zwei Konstanten c_1, c_2

$$\langle f | c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 \rangle = c_1 \langle f | \vartheta_1 \rangle + c_2 \langle f | \vartheta_2 \rangle$$

gilt. Und diese Zuordnung von ϑ zu $\langle f | \vartheta \rangle$ gehorcht zweitens dem *Rechengesetz der Stetigkeit*, das in der Formel

$$\langle f | \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f | \vartheta_n \rangle$$

zum Ausdruck kommt. In dieser Formel bezeichnet $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ eine Folge von Testfunktionen, die *stark* gegen die Testfunktion $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n$ konvergiert.

Schwartz erfand für eine verallgemeinerte Funktion f den Namen *Distribution*. Das lateinische *distribuere* bedeutet „verteilen“. Im Sinne des Bildes einer Funktion f , das sich Leibniz gemacht hatte, „verteilt“ eine Funktion f die Punkte der x -Achse auf die Funktionskurve $y = f(x)$. Wir werden hier jedoch den Fachbegriff „verallgemeinerte Funktion“, den Sobolew prägte, bevorzugen.

Jede stetige Funktion f ist zugleich eine verallgemeinerte Funktion. Denn mit der Formel

$$\langle f | \vartheta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \vartheta(x) dx$$

wird jeder Testfunktion ϑ eine reelle Größe $\langle f | \vartheta \rangle$ zugeordnet, und wir wissen bereits um das Rechengesetz der Linearität Bescheid. Wenn die Folge von Testfunktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$

das Intervall $[a; b]$ als gemeinsamen Träger besitzt und darin gleichmäßig gegen die Testfunktion ϑ konvergiert, folgt aus dem Satz, dass bei gleichmäßiger Konvergenz Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen, die Formel

$$\begin{aligned} \langle f | \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(x) dx = \int_a^b f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \vartheta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \vartheta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f | \vartheta_n \rangle. \end{aligned}$$

Somit ist das Rechengesetz der Stetigkeit gesichert, wenn die Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ stark gegen eine Testfunktion ϑ konvergiert.

Aber auch die an der Stelle 0 unstetige Heavisidefunktion H mit $H(x) = 1$ für $x > 0$ und $H(x) = 0$ für $x < 0$ ist zugleich eine verallgemeinerte Funktion. Denn mit der Formel

$$\langle H | \vartheta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) \vartheta(x) dx = \int_0^{\infty} \vartheta(x) dx$$

wird jeder Testfunktion ϑ eine reelle Größe $\langle H | \vartheta \rangle$ zugeordnet, und das Rechengesetz der Linearität gilt für dieses Integral offenkundig. Ferner soll die Folge von Testfunktionen $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ das Intervall $[a; b]$ als gemeinsamen Träger besitzen, wobei wir ohne Weiteres von der Annahme ausgehen dürfen, dieses sei so groß, dass $a < 0 < b$ zutrifft. Überdies soll diese Folge gleichmäßig gegen die Testfunktion ϑ konvergieren. Dann folgt aus dem Satz, dass bei gleichmäßiger Konvergenz Integral und Grenzwert vertauscht werden dürfen, die Formel

$$\begin{aligned} \langle H | \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n \rangle &= \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(x) dx = \int_0^b \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b \vartheta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle H | \vartheta_n \rangle. \end{aligned}$$

Auch hier ist das Rechengesetz der Stetigkeit gesichert, wenn die Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ stark gegen eine Testfunktion ϑ konvergiert.

Ein weiteres Beispiel einer verallgemeinerten Funktion bezeichnen wir mit δ'' . Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass sie jeder Testfunktion ϑ den Skalar

$$\langle \delta'' | \vartheta \rangle = \vartheta''(0)$$

zuweist. Wegen der Summenregel und der Tatsache, dass beim Differenzieren konstante Faktoren erhalten bleiben, trifft

$$\langle \delta'' | c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2 \rangle = (c_1 \vartheta_1 + c_2 \vartheta_2)''(0) = c_1 \vartheta_1''(0) + c_2 \vartheta_2''(0) = c_1 \langle \delta'' | \vartheta_1 \rangle + c_2 \langle \delta'' | \vartheta_2 \rangle$$

zu. Damit ist das Rechengesetz der Linearität begründet. Und wenn die Folge $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n, \dots$ stark gegen eine Testfunktion ϑ konvergiert, konvergiert insbesondere die Folge aller zweiten Ableitungen $\vartheta_1'', \vartheta_2'', \dots, \vartheta_n'', \dots$ an der Stelle 0 gegen $\vartheta''(0)$. Die daraus folgende Formel

$$\langle \delta'' | \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n \rangle = \langle \delta'' | \vartheta \rangle = \vartheta''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n''(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \delta'' | \vartheta_n \rangle$$

belegt das Rechengesetz der Stetigkeit.

Wie bei den beiden zuvor gebrachten Beispielen schreiben wir auch bei der verallgemeinerten Funktion δ'' die Zuordnung von der Testfunktion ϑ zum Skalar $\langle \delta'' | \vartheta \rangle$ als Integral:

$$\langle \delta'' | \vartheta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x) \vartheta(x) dx = \vartheta''(0) .$$

Dies tun wir im vollen Bewusstsein der Tatsache, dass es keine integrierbare Funktion δ'' gibt, die mit ϑ multipliziert und über \mathbb{R} integriert die zweite Ableitung von ϑ an der Stelle Null liefert. Jedenfalls gibt es die Funktion δ'' dann nicht, wenn man bei Funktionen allein den algorithmischen Standpunkt einnimmt. Doch das starre Festhalten an ihm wollen wir vorsätzlich mit der Einführung des Begriffs einer *verallgemeinerten* Funktion zugunsten einer breiteren Sichtweise aufgeben.

Wir vereinbaren, ab nun bei jeder verallgemeinerten Funktion f die Zuordnung von der Testfunktion ϑ zum Skalar $\langle f | \vartheta \rangle$ auch als Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \vartheta(x) dx = \langle f | \vartheta \rangle$$

zu schreiben. Wenn f eine stetige Funktion ist, liegt tatsächlich das mithilfe riemannscher Zwischensummen berechnete Integral des Produktes von f mit ϑ vor. Doch stetig muss f als verallgemeinerte Funktion nicht sein. Im Allgemeinen ist die Schreibweise von $\langle f | \vartheta \rangle$ mit dem Integral daher bloß als Symbol zu verstehen. Im Laufe der Erörterungen wird sich zeigen, wie diese symbolische Schreibweise hilft, sich Rechengesetze zu merken. Einige dieser Rechengesetze lernen wir im nächsten Abschnitt kennen.

■ 4.3 Rechnen mit verallgemeinerten Funktionen

Bezeichnen f und g zwei verallgemeinerte Funktionen und bezeichnet c eine reelle Größe, definieren wir die verallgemeinerten Funktionen $f + g$ und cf , indem wir für jede Testfunktion ϑ die folgenden Vereinbarungen treffen:

$$\langle f + g | \vartheta \rangle = \langle f | \vartheta \rangle + \langle g | \vartheta \rangle \quad \text{und} \quad \langle cf | \vartheta \rangle = c \langle f | \vartheta \rangle$$

Ein Produkt zweier verallgemeinerter Funktionen definieren wir nicht. Wohl aber verwenden wir die Tatsache, dass mit zwei Testfunktionen φ und ϑ auch deren durch $(\varphi\vartheta)(x) = \varphi(x)\vartheta(x)$ definiertes Produkt $\varphi\vartheta$ eine Testfunktion bleibt. Damit gelingt es, das Produkt $f\varphi$ einer verallgemeinerten Funktion f mit einer Testfunktion φ so zu erklären, dass $f\varphi$ ebenfalls eine verallgemeinerte Funktion ist: Wir definieren für jede Testfunktion ϑ

$$\langle f\varphi | \vartheta \rangle = \langle f | \varphi\vartheta \rangle$$

Alle hier genannten Festlegungen übertragen sich stimmig auf die symbolische Schreibweise von $\langle f | \vartheta \rangle$ als Integral.

Index

- Ableitungsgleichungen, 76, 140, 145
Ableitungskoeffizient, 76, 140, 145
Achse, 89
Additionsformel, 218
adjungierter Operator, 250
d'Aiguillon, François, 132
al-Chwarizmi, Muhammed, 160
Algorithmus, 160
Ampère, André-Marie, 42
ampèresches Gesetz, 42
Approximationsaufgabe, 231
Approximationssatz von Fejér, 267
Approximationssatz von Weierstraß, 269
äquidistante Azimutalprojektion, 152
Äquivalenzprinzip, 150
Asymptote, 97
Asymptotenrichtung, 118
Atlas, 134
Aufpunkt, 134
Azimut, 89
Azimutalgeschwindigkeit, 106
Azimutalprojektion, 129
Azimutalprojektion, äquidistante, 152
Azimutalprojektion, lambertsche, 152
Azimutalprojektion, orthographische, 151
- Banach, Stefan, 290
Banachraum, 290
Basisvektor, 122, 134
Bayes, Thomas, 225
bayessche Formel, 225
bedingte Wahrscheinlichkeit, 223
begünstigendes Ereignis, 226
Beltrami, Eugenio, 119
benachteiligendes Ereignis, 226
Berührungspunkt, 94, 139
Bernoulli, Jakob, 133, 237, 240, 247
Bernoulli, Nikolaus, 238
Bernoulli-Versuchserie, 238
bernoullische Lemniskate, 115
- Bernoulliverteilung, 238
Bernstein, Sergej Natanowitsch, 226
bernsteinsches Paradoxon, 227
Bertrand, Joseph Louis François, 224
Beschleunigungsvektor, 105
beschränkter Operator, 249
bewegliches Dreibein, 75
bewegliches n -Bein, 140
Bianchi, Luigi, 158
bianchische Identitäten, 158
Bienaymé, Irénée-Jules, 246
Binomialverteilung, 239
Binormaleneinheitsvektor, 78
Biot, Jean-Baptiste, 42
Bogenelement, 78
Bogenlänge, 78
Bohr, Niels, 253
du Bois-Reymond, Paul, 263
Boltzmann, Ludwig, 42, 211
Bolyai, János, 158
Bose, Satyendranath, 222
Breitenkreis, 89
Bromwich, Thomas John l'Anson, 193
Bromwichintegral, 193
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 215, 245
- Cantor, Georg, 215, 269
Cardano, Gerolamo, 216, 247
Cartan, Élie, 37, 74, 158
Cartan, Henri, 74
cartansche Integritätsbedingungen, 158
cartesische Koordinaten, 141
Cauchy, Augustin Louis, 11, 25, 232, 255, 275
cauchy-schwarzsche Ungleichung, 232
charakteristische Funktion, 206
Christoffel, Elwin Bruno, 112
Christoffelsymbol, 146
Codazzi, Delfino, 76
Coulomb, Charles-Augustin, 42

- Darboux, Jean Gaston, 82
darbouxisches Dreibein, 82
darbouxisches n -Bein, 140
Deltafunktion, 170
Dielektrizität, 45
Diffeomorphismus, 49
Differential, 25
Differential der Bogenlänge, 78, 139
Differentialform dritter Stufe, 19
Differentialform erster Stufe, 17
Differentialform nullter Stufe, 17
Differentialform zweiter Stufe, 17
Differentialform, exakte, 27
Differentialform, geschlossene, 27
Differentialgleichung der Hermitepolynome, 281
Differentialgleichung, elliptische, 190
Differentialgleichung, hyperbolische, 190
Differentialgleichung, parabolische, 190
Differentialgleichung, partielle, 190
Dirac, Paul, 13, 170, 172
diracsche Deltafunktion, 170
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune, 198, 219, 261–264, 267, 272, 288
dirichletsche Kernfunktion, 261
dirichletsche Summenformel, 199
dirichletsches Schubfachprinzip, 219
Distribution, 164
Distribution, temperierte, 291
Divergenz, 39, 153
divergenzfrei, 39
Doetsch, Gustav, 193
Drehfläche, 88
Drehkegel, 92
Drehzylinder, 91
Dreibein, bewegliches, 75
Dreibein, darbouxisches, 82
Dreibein, frenetsches, 78
Dreibein, gaußsches, 81
dreidimensionale Kette, 12
dreidimensionale Zelle, 12
Dreiecksfunktion, 210
Dupin, Pierre-Charles-François, 118
dupinsche Indikatrix, 118
dynamische Variable, 254
Eigenfunktion, 252
Eigenvektor, 251
Eigenwert, 251
Eigenzustand, 254
einander ausschließende Ereignisse, 218
eindimensionale Kette, 12
eindimensionale Zelle, 12
Einheitsvektor, 228
einschaliges Hyperboloid, 116
Einstein, Albert, 138, 150, 253
elektrische Feldstärke, 42
elektrische Flusssdichte, 42
elektromagnetisches Feld, 44
Elementarereignis, 217
Ellipsoid, 116
elliptische Differentialgleichung, 190
elliptischer Flächenpunkt, 111
elliptisches Paraboloid, 116
Energiedichte, 45
Enneper, Alfred, 117
ennepersche Minimalfläche, 117
Eötvös, Loránd, 151
Erdős, Paul, 268
Ereignis, 217
Ereignis, begünstigendes, 226
Ereignis, benachteiligendes, 226
Ereignis, sicheres, 218
Ereignis, unmögliches, 218
Ereignisraum, 217
Ereignisse, einander ausschließende, 218
Ereignisse, voneinander unabhängige, 226
Ergänzungssatz der Gammafunktion, 64
erstes Moment, 235
Erwartungswert, 221, 235, 254
Erzeugende, 89, 116, 117
erzeugende Funktion, 280
Erzeugendengleichung, 280
Erzeugungsoperator, 286
Euler, Leonhard, 63, 64, 204, 229, 230
euler-poissonsches Integral, 63
eulersche Gammafunktion, 63
exakte Differentialform, 27
Exzess, sphärischer, 114
Faltung, 187, 194
Faltungssatz, 187, 194
Farady, Michael, 42
Fejér, Leopold, 263–265, 268, 269

- fejérsche Kernfunktion, 264
 fejérscher Approximationssatz, 267
 Feld, elektromagnetisches, 44
 Feldstärke, elektrische, 42
 Feldstärke, magnetische, 42
 de Fermat, Pierre, 216
 flach, 149
 Fläche, 48, 80
 Flächenelement, 38, 153
 Flächenelement erster Stufe, 95
 Flächenintegral, 48
 Flächenkurve, 102
 Flächenpunkt, elliptischer, 111
 Flächenpunkt, hyperbolischer, 111
 Flächenpunkt, parabolischer, 111
 Flächenstück, 48
 flächentreu, 124
 Flächenverzerrung, 124
 Flussdichte, elektrische, 42
 Flussdichte, magnetische, 42
 Formel von Bayes, 225
 Formel, stirlingsche, 65
 Fourier, Joseph, 183, 192, 197, 200, 201
 Fourierdarstellung der diracschen
 Deltafunktion, 183
 Fourierkoeffizient, 199
 Fourierreihe, 199
 fouriersche Summe, 234
 fouriersches Integraltheorem, 183
 Fouriertransformation, 183
 Franz Joseph, 29, 268
 Frenet, Jean Frédéric, 77
 frenetsches Dreibein, 78
 frenetsches Zweibein, 95
 Frobenius, Georg, 269
 Fuchs, Lazarus, 269
 Fundamentalgröße, 81, 137
 Funktion, charakteristische, 206
 Funktion, erzeugende, 280
 Funktion, greensche, 181
 Funktion, harmonische, 41
 Funktion, lineare, 247
 Funktion, quadratisch integrierbare, 279,
 282, 284
 Funktion, verallgemeinerte, 164
 Funktionalgleichung der Gammafunktion, 63
 Funktionenraum, 213
 Galilei, Galileo, 115
 Gammafunktion, 63
 Ganghöhe, 79, 117
 Gauß, Carl Friedrich, 39, 42, 71, 74, 77, 81, 82,
 108, 111–114, 122, 134, 146, 147, 158, 198,
 242, 244, 270–272
 gaußsche Krümmung, 110
 gaußsches Dreibein, 81
 gaußsches Gesetz, 42
 Gebiet, konvexes, 34
 Gegenereignis, 219
 geodätische Krümmung, 103
 geodätische Linie, 103
 geodätische Torsion, 103
 Geometrie, innere, 122
 Gerono, Camille-Christophe, 115
 geschlossene Differentialform, 27
 geschlossene Kette, 25
 Geschwindigkeit, 105
 Geschwindigkeitsvektor, 105
 Gesetz der großen Zahlen, 247
 Gesetz der Linearität, 227
 Gesetz der positiven Definitheit, 228
 Gesetz der Symmetrie, 227
 Gibbs, Josiah Willard, 211
 gibbssches Phänomen, 211
 Gleichungen von Gauß, 76, 145
 Gleichungen von Mainardi und Codazzi, 76,
 148
 Gnomon, 130
 gnomonische Projektion, 130
 von Goethe, Johann Wolfgang, 42
 Gradient, 38, 153
 Graßmann, Hermann, 213
 Green, George, 39, 181
 greensche Funktion, 181
 Grenzwert, schwacher, 168
 Grenzwert, starker, 163
 Grenzwertsatz, zentraler, 243
 Grossmann, Marcel, 151
 Gürtelkreis, 89
 Hall, Monty, eigentl. Maurice Halperin, 224
 Hamilton, Sir William Rowan, 40
 Hardy, Godfrey Harold, 193
 harmonische Funktion, 41
 Häufigkeit, 247

- Hauptkrümmung, 110
Hauptkrümmungsrichtung, 110
Hauptverzerrung, 124
Hauptwert, 182
Heaviside, Oliver, 42, 170
Heavisidefunktion, 165
Heisenberg, Werner, 255
heisenbergsche Unschärferelation, 255
Henkelpunkt, 78
Hermite, Charles, 279
Hermitefunktion, 283
Hermitepolynom, 279
Hilbert, David, 252, 277, 287
Hilbertraum, 276
Hölder, Otto, 289
höldersche Ungleichung, 289
Horizontalbeschleunigung, 106
Huygens, Christiaan, 115, 119
huygenssche Lemniskate, 115
Hyperbel, 97
hyperbolische Differentialgleichung, 190
hyperbolischer Flächenpunkt, 111
hyperbolisches Paraboloid, 83
Hyperboloid, einschaliges, 116
Hyperboloid, zweischaliges, 116
hypergeometrische Verteilung, 258
- Indikatorfunktion, 206
Indikatrix, 118
Induktionsgesetz, 42
Inhaltselement, 143
innere Geometrie, 122
inneres Produkt, 227
Integrabilitätsbedingung, 28
Integral einer Differentialform, 28, 31
Integral, euler-poissonsches, 63
Integralformel, poissonsche, 190
Integralgleichung, 259
Integraltransformation, 184
Integrand, 207
Integrator, 207
- Jacobi, Carl Gustav, 157, 212
jacobische Identität, 157
Jordankurve, 46
- Kant, Immanuel, 121
- Karte, 121, 134
Katenoid, 117
Kegel, 116
Kehlkreis, 89
Keilprodukt, 18, 19
Kelvin, Lord, bürgerl. William Thomson, 40
Kern, 184, 248
Kernfunktion, dirichletsche, 261
Kernfunktion, fejärsche, 264
Kette, dreidimensionale, 12
Kette, eindimensionale, 12
Kette, geschlossene, 25
Kette, nulldimensionale, 12
Kette, zweidimensionale, 12
Kettenlinie, 117
Kolmogorow, Andrej Nikolajewitsch, 216, 218, 220, 226
Kompasslinie, 128
komplexer linearer Raum, 253
Konfidenzintervall, 246
konform, 124
Kontinuitätsgleichung, 44
konvergent, schwach, 168
konvergent, stark, 163
Konvergenz im quadratischen Mittel, 270
konvex, 34
Koordinate, 122
Koordinate, krummlinige, 122
Koordinaten, cartesische, 141
Korrelationskoeffizient, 236
Kovarianz, 235
Kowalewskaja, Sofia Wassiljewna, 269
Kreiswellenzahl, 180
Kronecker, Leopold, 215, 289
krummlinig, 122
Krümmung, 78
Krümmung, gaußsche, 110
Krümmung, geodätische, 103
Krümmung, mittlere, 110
Krümmungsform, 149
Krümmungskomponenten, riemannsche, 149
Kugel, 92
Kugelkoordinaten, 141
Kurve, 46, 139
Kurvenintegral, 46
Kurvenstück, 46

- Länge, 139
 Ladungsdichte, 42
 Lagrange, Joseph-Louis, 39
 Lambert, Johann Heinrich, 126
 lambertsche Azimutalprojektion, 152
 lambertsche Zylinderprojektion, 126
 Länge, 78, 94, 228
 Laplace, Pierre Simon, 192, 217, 242, 279
 Laplacegleichung, 189
 Laplaceoperator, 41, 154
 Laplacetransformation, 192
 Lebesgue, Henri, 270, 284
 von Lecoq, Karl Ludwig, 74
 leere Menge, 22, 218
 Leibniz, Gottfried Wilhelm, 11, 17, 25, 95, 96,
 160, 164, 201, 286
 leibnizsche Sektorformel, 96
 Leitkurve, 116
 Lemma von Poincaré, 29
 Lemma von Riemann und Lebesgue, 288
 Lemniskate, 115
 Levi-Civita, Tullio, 112, 113
 Lie, Sophus, 156
 Lie-Klammer, 156
 lineare Funktion, 247
 lineare Substitution, 167
 lineare Substitutionsformel, 168
 linearer Operator, 248
 Linie, geodätische, 103
 Linienelement, 38, 152
 Lissajous, Jules Antoine, 115
 Lissajous-Figur, 115
 Lobatschewski, Nikolai Iwanowitsch, 158
 logarithmische Spirale, 133
 Loxodrome, 128

 magnetische Feldstärke, 42
 magnetische Flussdichte, 42
 Mainardi, Gaspare, 76
 Mannigfaltigkeit, 134
 Mannigfaltigkeit, flache, 149
 Mannigfaltigkeit, gekrümmte, 149
 Markoff, Andrej Andrejewitsch, 245
 markoffsche Ungleichung, 245
 Maß, 217
 Matrix, schiefssymmetrische, 77
 Maximumsnorm, 269

 Maxwell, James Clerk, 40, 42, 45, 211
 Menge, leere, 22, 218
 Mercator, Gerardus, eigentl. Gerard de
 Kremer, 127
 Mercator, Rumold, 132
 mercatorsche Zylinderprojektion, 127
 de Méré, eigentl. Antoine Gombaud, 215, 220
 Meridian, 89
 Meusnier de la Place, Jean-Baptiste, 109
 Minimalfläche, 117
 Minimalfläche, ennepersche, 117
 Minimalfläche, scherksche, 118
 Minkowski, Hermann, 137, 151, 275, 290
 minkowskische Ungleichung, 275, 290
 Mittellinie, 117
 mittlere Krümmung, 110
 mittlere Verzerrung, 124
 de Moivre, Abraham, 242, 243
 Moment, erstes, 235
 Moment, zweites, 235
 Monge, Gaspard, 109
 Multiplikationsformel, 226

 Nabelpunkt, 111
 Nabelpunkt, parabolischer, 111
 Nabla, 40
 Napoleon Bonaparte, 109, 183, 192
 n -Bein, bewegliches, 140
 n -Bein, darboxsches, 140
 von Neumann, John, 268, 276
 Newton, Sir Isaac, 11, 17, 65, 106, 180
 Norm im quadratischen Mittel, 272
 Normalbereich, 52
 Normalbeschleunigung, 106
 Normaleinheitsvektor, 80
 Normaleneinheitsvektor, 78
 Normalkrümmung, 103
 Normalvektor, 38
 Normalverteilung, 244
 normierter Zustand, 254
 nulldimensionale Kette, 12
 nulldimensionale Zelle, 11

 Oberfläche, 98
 Oberflächenelement, 98
 Observable, 254
 Öffnungswinkel, 92

- Operator, adjungierter, 250
 Operator, beschränkter, 249
 Operator, linearer, 248
 Operator, selbstadjungierter, 251
 Operator, unbeschränkter, 249
 Orientierungstreue, 49
 Ørsted, Hans Christian, 42
 Orthodrome, 131
 Orthogonalitätsrelationen der
 Hermitepolynome, 283
 Orthogonalitätsrelationen der
 trigonometrischen Funktionen, 230
 orthographische Azimutalprojektion, 151
 Orthonormalbasis, 277
 Orthonormalsystem, 231
 Ostrogradski, Michail Wassiljewitsch, 39

p-Norm, 289
 Pacioli, Luca, 216
 parabolische Differentialgleichung, 190
 parabolische Zylinderkoordinaten, 155
 parabolischer Flächenpunkt, 111
 parabolischer Nabelpunkt, 111
 Paraboloid, eiliptisches, 116
 Paraboloid, hyperbolisches, 83
 Paraboloidkoordinaten, 155
 Paradoxon von Bernstein, 227
 Paradoxon von Bertrand, 224
 Parallelenaxiom, 158
 Parallelogrammregel, 256
 Parallelverschiebung, 112, 113
 Parseval des Chênes, Marc-Antoine, 278
 parsevalsche Identität, 278
 Partialbruchzerlegung des Cotangens, 204
 Partialbruchzerlegung des Cotangens
 hyperbolicus, 204
 Partialbruchzerlegung des Kehrwerts vom
 Sinus, 204
 Partialbruchzerlegung des Kehrwerts vom
 Sinus hyperbolicus, 203
 partielle Differentialgleichung, 190
 Pascal, Blaise, 216
 Permeabilität, 45
 Petzval, Josef, 193
 Picard, Émile, 270
 Plancherel, Michel, 287
 Planck, Max, 253

 Plattkarte, quadratische, 120
 Plattenkreis, 89
 Poincaré, Henri, 29, 158, 279
 poincarésche Halbebene, 158
 Poisson, Siméon Denis, 198, 239, 240, 242
 poissonsche Integralformel, 190
 poissonsche Summenformel, 199
 Poissonverteilung, 240
 Pólya, George, 268
 Polynom, trigonometrisches, 266
 Potential, skalares, 44
 Poynting, John Henry, 45
 Poyntingvektor, 45
 Produkt, inneres, 227
 Produkt, skalares, 227
 Produktregel bei Differentialformen, 28
 Profillinie, 117
 Projektion, 232, 233
 Projektion, gnomonische, 130
 Projektion, stereographische, 131
 Pseudosphäre, 119
 Punkt, 122
 Punkt, regulärer, 78
 Punkt, singulärer, 78, 80

 quadratisch integrierbare Funktion, 279, 282,
 284
 quadratisch summierbar, 274
 quadratische Plattkarte, 120

 Radialbeschleunigung, 106
 Radó, Tibor, 268
 Rand, 22
 Rand einer Kette, 23
 Rand einer Zelle, 22
 Randbedingung, 179
 Raumintegral, 57
 Raumkurve, 46
 räumlicher Sektor, 100
 Rechtecksfunktion, 210
 Regelfläche, 116
 regulärer Punkt, 78
 Riemann, Bernhard, 77, 134, 137, 149, 151,
 207
 Riemann-Stieltjes-Integral, 207
 riemannsche Krümmungskomponenten, 149
 Riesz, Friedrich, 284

- Riesz, Marcel, 268, 284
 Ringintegral, 25
 Rodrigues, Benjamin Olinde, 280
 Rodrigues-Formel, 280
 Rohrfläche, 117
 Rotation, 40, 153
 rotationsfrei, 40
 Roze, Jean, 132
 Rudin, Walter, 29
 Runge, Carl, 269, 270

 Sägezahnfunktion, 292
 Satz über die konstante Funktion, 175
 Satz des Pythagoras, 232
 Satz von de Moivre und Laplace, 243
 Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit, 223
 Satz von Gauß und Ostrogradski, 39
 Satz von Green, 39
 Satz von Meusnier, 109
 Satz von Plancherel, 287
 Satz von Poynting, 45
 Satz von Stokes, 36, 39–41
 vos Savant, Marilyn, 224
 Savart, Félix, 42
 Schachtelparadoxon, 224
 Scherk, Heinrich Ferdinand, 118
 scherksche Minimalfläche, 118
 schiefssymmetrisch, 77
 Schmiegebene, 78
 Schnittpunkt, 94, 139
 Schnittwinkel, 94, 139
 Schoenflies, Arthur, 269
 Schraubenlinie, 79
 Schraubfläche, 117
 Schubfachprinzip, 219
 schwach konvergent, 168
 schwacher Grenzwert, 168
 Schwartz, Laurent, 162–164, 170, 181, 200
 Schwarz, Hermann Amandus, 26, 232, 269
 Sektor, räumlicher, 100
 Sektorfläche, 96
 Sektorformel, leibnizsche, 96
 selbstadjungierter Operator, 251
 separabel, 277
 sicheres Ereignis, 218
 singulärer Punkt, 78, 80
 skalares Potential, 44
 skalares Produkt, 227
 Skalarfeld, 37
 Sobolew, Sergei Lwowitsch, 162–164, 170, 181, 200
 Spektralsatz, 252
 Spektrum, 252
 sphärischer Exzess, 114
 Spirale, logarithmische, 133
 Sprunghöhe, 174
 Sprungstelle, 174
 Spur, 16
 Stammform, 28
 Standardabweichung, 236
 standardisierte Zufallsvariable, 242
 stark konvergent, 163
 starker Grenzwert, 163
 stereographische Projektion, 131
 Stewart, Ian, 225
 Stieltjes, Thomas Jean, 207
 Stirling, James, 65
 stirlingsche Formel, 65
 Stokes, Sir George Gabriel, 36, 37, 40
 Streuung, 235
 Stromdichte, 42
 stückweise stetig differenzierbar, 174
 Summe, fouriersche, 234
 Summenformel, dirichletsche, 199
 Summenformel, poissonsche, 199
 Summenregel bei Differentialformen, 27
 Supremumsnorm, 269
 Szegő, Gábor, 268

 Tangenteneinheitsvektor, 78
 Tangentenfläche, 116
 Tangentenschmiegepunkt, 78
 Tangentenvektor, 122
 Tangentialbeschleunigung, 106
 Tangentialebene, 80
 Tangentialvektor, 38, 139
 temperierte Distribution, 291
 Testfunktion, 162, 290
 Tetraeder, 99
 Theorema egregium, 112
 Theorema elegantissimum, 114
 Thetafunktion, 212
 Thetarelation, 212
 Thomson, William, 40

- Tissot, Nicolas Auguste, 123
tissotsche Verzerrungsellipse, 123
torsal, 116
Torse, 117
Torsion, 78
Torsion, geodätische, 103
Torus, 93
Träger, 162
Traktroid, 119
Traktrix, 118
Treppenfunktion, 206
trigonometrisches Polynom, 266
Tschebyscheff, Pafnuti Lwowowitsch, 245, 246, 279
tschebyscheffsche Ungleichung, 245
Turán, Pál, 268
- Umkehrformel der Fouriertransformation, 183
unbeschränkter Operator, 249
Unbestimmtheit, 255
Ungleichung von Cauchy und Schwarz, 232
Ungleichung von Hölder, 289
Ungleichung von Markoff, 245
Ungleichung von Minkowski, 275, 290
Ungleichung von Tschebyscheff, 245
Ungleichung von Young, 289
unmögliches Ereignis, 218
Unschärfe, 255
Unschärfereleation, 255
- Variable, dynamische, 254
Varianz, 236, 254
Vektor, 134, 213
Vektorfeld, 37, 122, 134
Vektorpotential, 44
verallgemeinerte Funktion, 164
Vernichtungsoperator, 291
Verschiebungssatz, 192
Verteilung der seltenen Ereignisse, 240
Verteilung, hypergeometrische, 258
Vervollständigung, 279
Verzerrung, mittlere, 124
Verzerrungsellipse, 123
Vielfachheit, 12
Viviani, Vincenzo, 115
vivianisches Fenster, 115
vollständig, 273
- Volterra, Vito, 270
Volumen, 99
Volumselement, 37, 153
Volumselement zweiter Stufe, 99
voneinander unabhängige Ereignisse, 226
- Wärmeleitungsgleichung, 212
Wahrscheinlichkeit, 217
Wahrscheinlichkeit, bedingte, 223
Wahrscheinlichkeitsraum, 217
Wärmeleitungsgleichung, 188
Weierstraß, Karl, 215, 269, 270, 289
weierstraßscher Approximationssatz, 269
Wellengeschwindigkeit, 180
Wellengleichung, 180
Wellenzahl, 180
Wendelfläche, 117
Weyl, Hermann, 215, 245, 277, 287
Winkel, 232
winkeltreu, 124
- Young, William Henry, 289
youngsche Ungleichung, 289
- Zelle, dreidimensionale, 12
Zelle, eindimensionale, 12
Zelle, nulldimensionale, 11
Zelle, zweidimensionale, 12
zentraler Grenzwertsatz, 243
Zentripetalbeschleunigung, 106
Zufallsvariable, 220
Zufallsvariable, standardisierte, 242
Zustand, 254
Zustand, normierter, 254
Zwei-Norm, 234, 272
Zweibein, frenetsches, 95
zweidimensionale Kette, 12
zweidimensionale Zelle, 12
zweischaliges Hyperboloid, 116
zweites Moment, 235
Zyklus, 25
Zylinder, 116
Zylinderkoordinaten, 141
Zylinderkoordinaten, parabolische, 155
Zylinderprojektion, 125
Zylinderprojektion, lambertsche, 126
Zylinderprojektion, mercatorsche, 127