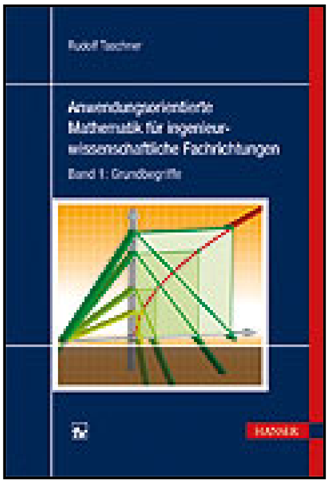
HANSER



Leseprobe

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen

Band 1: Grundbegriffe

ISBN (Buch): 978-3-446-43967-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43978-8

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43967-2

sowie im Buchhandel.

7 Regeln des Integrierens

7.1 Erste wichtige Sätze

Es bezeichne J ein offenes Intervall, $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in J stetige Funktion und c eine aus J entnommene reelle Größe. Wir haben bereits gelernt, dass die durch

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definierte Funktion $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f heißt. Der erste Satz, den wir beweisen wollen, besagt, dass diese Stammfunktion F stetig differenzierbar ist und den Integranden f als Ableitungsfunktion besitzt. Er heißt:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine im offenen Intervall J stetige Funktion und ist die Stammfunktion $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ bei einem c aus J durch

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

definiert, dann ist F im Intervall J stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$, das heißt:

$$\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Mit dem Landau-Symbol kann man aufgrund der Stetigkeit von f, also wegen

$$f(t) = f(x) + o(1)\,, \qquad (t \to x)\,,$$

den Hauptsatz flott so herleiten:

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x) = \int_c^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_x^{x+\Delta x} \big[f(x) + o(1)\big]\,\mathrm{d}t\,.$$

Da $f(x)$ die Integrationsvariable t nicht enthält, „aus der Sicht des Integrals" daher eine Konstante ist, können wir $f(x)$ als Faktor vor das Integral setzen. Und die Vertauschung des Integrals mit dem Landau-Symbol ist wegen des Satzes über die Beschränktheit des Integrals erlaubt. Somit ist

$$\Delta F(x) = \big[f(x) + o(1)\big] \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}t = \big[f(x) + o(1)\big]\,\Delta x = f(x)\,\Delta x + o(\Delta x)$$

bewiesen, woraus $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$, also die Behauptung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung folgt.

Die wichtigste Folgerung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet, dass für jede in einem offenen Intervall stetige Funktion f die Differentialgleichung

$$\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Lösung in dem Sinn besitzt, dass man eine im Intervall stetig differenzierbare Funktion F so auffinden kann, dass diese Differentialgleichung aus der Differentiation der Gleichung

$$y = F(x)$$

entsteht. Jede Stammfunktion von f kann dafür herangezogen werden. Leibniz schreibt

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

also ein Integral ohne Angabe von Grenzen, ein – wie er es nennt – *unbestimmtes Integral*, wenn er die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ anschreiben möchte, also die Gesamtheit aller im Intervall stetig differenzierbaren Funktionen F mit $F'(x) = f(x)$ in den Blick nimmt. Wir wollen nun zeigen, dass sich diese Gesamtheit ziemlich einfach erfassen lässt. Zu diesem Zweck behaupten wir den folgenden

Satz über die konstante Funktion: Ist die Funktion $f: J \longrightarrow \mathbb{R}$ im offenen Intervall J differenzierbar und gilt für alle x aus dem Intervall $f'(x) = 0$, dann ist die Funktion f konstant, d.h. sie weist allen x aus dem Intervall stets den gleichen Funktionswert zu.

Für den Nachweis erinnern wir uns, was die Formel

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x)\ ,$$

die sich wegen $f'(x) = 0$ hier zu

$$f(x+\Delta x) - f(x) = o(\Delta x)$$

vereinfacht, eigentlich bedeutet: Bezeichnet ε eine *beliebig* kleine positive Größe, kann man zu jedem x aus dem Intervall J ein positives δ so benennen, dass für alle Δx mit $|\Delta x| < \delta$ die Ungleichung $\left|f(x+\Delta x) - f(x)\right| < \varepsilon\,|\Delta x|$ zutrifft. Es seien nun a und b zwei verschiedene reelle Größen aus J, wobei wir von $a < b$ ausgehen. Wir beweisen, dass $f(a) = f(b)$ zutrifft. Wäre nämlich $f(a) \neq f(b)$, könnten wir ε durch

$$\varepsilon = \frac{\left|f(b) - f(a)\right|}{b - a}$$

festlegen und zu jedem x aus dem Intervall $[a;b]$ ein positives δ so benennen, dass für alle Δx mit $|\Delta x| < \delta$ die Ungleichung $\left|f(x+\Delta x) - f(x)\right| < \varepsilon\,|\Delta x|$ zutrifft. Da es sich bei $[a;b]$ um ein kompaktes Intervall handelt, greift hier das von Weierstraß gefundene Kompaktheitsargument, wonach sogar ein positives δ_0 mit der Eigenschaft vorliegt, dass für alle x aus dem Intervall $[a;b]$ und für alle Δx mit $|\Delta x| < \delta_0$ die Ungleichung $\left|f(x+\Delta x) - f(x)\right| < \varepsilon\,|\Delta x|$ zutrifft. Wir betrachten nun eine Zerlegung $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ des Intervalls $[a;b]$, die so fein ist, dass für alle Zahlen m mit $m \leq n$ die Ungleichungen $|c_m - c_{m-1}| < \delta_0$ stimmen. Dann gilt für alle Zahlen m mit $m \leq n$

$$\left|f(c_m) - f(c_{m-1})\right| < \varepsilon\,(c_m - c_{m-1}) \ ,$$

und es ergibt sich aus der Rechnung

$$\left|f(b) - f(a)\right| = \left|\sum_{m=1}^{n} \big(f(c_m) - f(c_{m-1})\big)\right| \leq \sum_{m=1}^{n} \left|f(c_m) - f(c_{m-1})\right| <$$
$$< \sum_{m=1}^{n} \varepsilon\,(c_m - c_{m-1}) = \varepsilon\,(b-a) = \left|f(b) - f(a)\right|$$

der Widerspruch $\left|f(b) - f(a)\right| < \left|f(b) - f(a)\right|$. Er zeigt, dass die Annahme $f(a) \neq f(b)$ absurd ist. Also ist tatsächlich $f(b) = f(a)$, und da a und b beliebig aus J entnommen wurden, ist bewiesen, dass f eine konstante Funktion ist.

Bei diesem Satz ist von wesentlicher Bedeutung, dass ein Intervall eine *zusammenhängende* Menge darstellt. Die Heavisidefunktion $\mathrm{H} : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathrm{H}(x) = 0$ für $x < 0$ und $\mathrm{H}(x) = 1$ für $x > 0$ ist zum Beispiel in $\mathbb{R}^*$ differenzierbar, für alle $x \neq 0$ gilt $\mathrm{H}'(x) = 0$, und sie ist trotzdem nicht konstant.

Die wichtigste Folgerung aus dem Satz über die konstante Funktion ist der

Satz über das unbestimmte Integral: Ist die Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ im offenen Intervall J stetig, besitzt die Differentialgleichung $\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ die allgemeine Lösung

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\ ,$$

wobei $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist und C eine Konstante bezeichnet.

Dass $F(x) + C$ eine Lösung dieser Differentialgleichung darstellt, ist klar, denn aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ und für die Konstante C ist $\mathrm{d}C = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass jede Lösung der Differentialgleichung von dieser Gestalt ist. Da für eine Stammfunktion F von f bei $\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ wegen $\mathrm{d}F(x) = f(x)\,\mathrm{d}x$ jedenfalls $\mathrm{d}\big(y - F(x)\big) = 0$ zutrifft, folgt aus dem Satz über die konstante Funktion, dass $y - F(x)$ eine Konstante C sein muss. Und $y - F(x) = C$ besagt nichts anderes als $y = F(x) + C$. Damit ist die allgemeine Lösung y genauso dargestellt, wie behauptet wurde. Die unbestimmte Konstante C trägt den Namen *Integrationskonstante*.

Wenn $y = F(x)$ bei der im offenen Intervall J stetigen Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ löst und wenn a aus J entnommen ist, gilt:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Denn die Differenz zwischen $F(x)$ und dem Integral

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

kann bloß eine Konstante sein, weil sowohl F als auch das Integral die Funktion f als Ableitungsfunktion haben. Es gilt also

$$F(x) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = C$$

mit einer Konstanten C. Setzt man in dieser Formel $x = a$, bleibt $F(a) = C$ übrig, womit die Behauptung bewiesen ist.

Wir ersetzen in der Formel

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

die Variable x durch die Konstante b. Danach dürfen wir die Integrationsvariable t durch die Integrationsvariable x ersetzen. Außerdem ziehen wir $F(a)$ von beiden Seiten ab. So erhalten wir:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\ .$$

Damit erkennen wir, wie man das sogenannte *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ermittelt: Man berechnet zuerst das unbestimmte Integral, also

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C\,,$$

wobei $y = F(x)$ irgendeine Lösung von $\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$ bezeichnet. Danach setzt man in dieser Stammfunktion die Integrationsgrenzen ein, wobei man der Regel „obere Integrationsgrenze minus untere Integrationsgrenze" zu folgen hat. Diese Regel wird gerne symbolisch so abgekürzt: $[F(x)]_a^b$ oder ausführlicher: $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$. Damit wird nichts anderes als $F(b) - F(a)$ gemeint. Es gilt somit

$$\text{bei} \quad \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C\ : \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Wenn man Methoden zur Berechnung von unbestimmten Integralen kennt, hat man daher ein kraftvolles Werkzeug für die Berechnung von bestimmten Integralen zur Hand. Mit welchen Verfahren man unbestimmte Integrale ermitteln kann, lernen wir erst in einigen der folgenden Abschnitte.

Zuvor wollen wir noch einen wichtigen Satz der Differentialrechnung formulieren und beweisen, den folgenden

Satz vom endlichen Zuwachs: Ist die Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit f' als Ableitungsfunktion, sind a und b zwei verschiedene reelle Größen aus J und ist μ eine reelle Größe mit der Eigenschaft, dass für alle x zwischen a und b die Ungleichung $\left|f'(x)\right| \le \mu$ zutrifft, dann gilt

$$\left|f(b) - f(a)\right| \le \mu\,|b - a|\ .$$

Denn aus der Formel

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a)$$

und dem Satz über die Beschränktheit des Integrals folgt

$$\left|f(b) - f(a)\right| = \left|\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \mu\,|b-a| \ ,$$

und eben das wurde behauptet.

Wenn zum Beispiel $a < b$ ist, kann man $\mu = \max_{a\le x\le b}\left|f'(x)\right|$ festlegen, denn die vorausgesetzte Stetigkeit von f' und der Satz vom Maximum versichern, dass dieses Maximum μ des Betrages von f' über $[a;b]$ existiert. Anschaulich ist μ der maximale Betrag aller Anstiege der Funktionskurve von f über $[a;b]$. Betrachtet man auf der Funktionskurve die beiden Punkte $\left(a, f(a)\right)$ und $\left(b, f(b)\right)$, stellt das Verhältnis $\left(f(b) - f(a)\right) : (b-a)$ den Anstieg der Geraden durch diese beiden Punkte dar, die eine Sekante der Funktionskurve ist. Der Satz vom endlichen Zuwachs versichert, dass dieser Sekantenanstieg dem Betrage nach höchstens so groß wie μ sein kann. Plakativ formuliert: Mehr als über den betragsmäßig größten Tangentenanstieg hinaus kann die Funktionskurve nicht in die Höhe schnellen (oder in die Tiefe sinken). Noch schlagwortartiger: Eine stetig differenzierbare Funktion kann nicht explodieren.

Für das Zeichnen der Funktionskurve ist der Satz vom endlichen Zuwachs hilfreich. Legt man nämlich sowohl durch $\left(a, f(a)\right)$ als auch durch $\left(b, f(b)\right)$ einerseits zwei parallele Geraden mit dem Anstieg μ und andererseits zwei parallele Geraden mit dem Anstieg $-\mu$, schließen diese vier Geraden ein Parallelogramm ein. Der Satz vom endlichen Zuwachs verbürgt, dass die Funktionskurve zwischen $x = a$ und $x = b$ innerhalb dieses Parallelogramms verlaufen muss. Betrachtet man im Intervall $[a;b]$ eine Zerlegung $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{n-1} < c_n = b$ und wählt man für jede Zahl m mit $m \le n$ statt der vorigen Punkte $\left(a, f(a)\right)$ und $\left(b, f(b)\right)$ nun die Punkte $\left(c_{m-1}, f(c_{m-1})\right)$ und $\left(c_m, f(c_m)\right)$, kann man $\mu_m = \max_{c_{m-1}\le x\le c_m}\left|f'(x)\right|$ festlegen. Auf diese Weise wird die Funktionskurve von einer endlichen Folge von Parallelogrammen überdeckt.

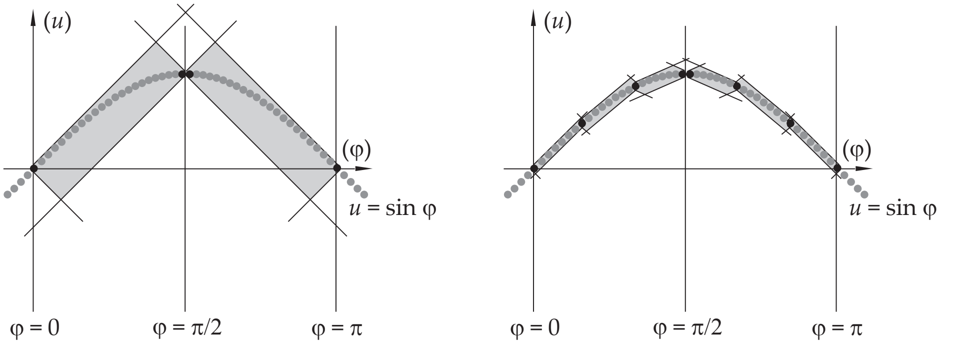


Bild 7.1 Links wird das Schaubild der Sinusfunktion, dem Satz vom endlichen Zuwachs entsprechend, von zwei Parallelogrammen überdeckt, rechts von sechs Parallelogrammen. Dies zeigt, wie man das Schaubild einer stetig differenzierbaren Funktion gewinnen kann.

Der treffende Name „Satz vom endlichen Zuwachs“ ist die Übersetzung des französischen „théorème des accroissements finis“. Ursprünglich hatte diesen Satz der im 17. Jahrhundert