Albrecht Beutelspacher und Marcus Wagner

Wie man einen Würfel aufpustet

44 mathematische Experimente

Mit Illustrationen von Frank Wowra

HERDER

FREIBURG · BASEL · WIEN

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C083411
www.fsc.org

www.herder.de

Umschlaggestaltung: Gestaltungssaal, Rosenheim
Umschlagmotiv: © Frank Wowra
Zeichendreieck und Würfelzeichnung © YummySuperStar - iStock - GettyImages.
Satz: Layoutsatz Kendlinger, Freiburg
Herstellung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

ISBN Print 978-3-451-60068-5
ISBN E-Book 978-3-451-81607-9

Inhalt

Vorwort

Den meisten Menschen macht es Spaß, etwas zu basteln. Es macht einfach Freude, etwas Schönes herzustellen. Manche haben Vorlieben für das Material, sie lieben Papier oder Holz, manche finden knifflige und lang dauernde Bastelarbeiten besonders attraktiv, während für andere alles, was länger als fünf Minuten dauert, seinen Reiz verliert. Manche sind stolz auf das Produkt, für andere ist der Entstehungsprozess entscheidend.

Das Wunderbare an mathematischen Experimenten ist jedoch nicht nur die positive Grunderfahrung, die man bei der Herstellung und stolzen Begutachtung des schönen Produktes macht. Mathematische Experimente bieten viel mehr.

Zunächst sind es die *Objekte* selbst: Bei mathematischen Basteleien steht nicht etwas Nützliches oder etwas besonders Kreatives im Mittelpunkt, vielmehr geht es darum, mathematische Objekte herzustellen, die auf anschauliche Art und Weise auf einen mathematischen Inhalt verweisen. In diesem Buch reicht das von Vierecken und Fünfecken über Tetraeder und Würfel bis zu Ellipsen und Hyperboloiden.

Man kann außerdem mit den hergestellten Objekten experimentieren und dabei *Erkenntnisse* erzielen: Man entdeckt die Selbstähnlichkeit bei Knobelspielen, man findet Primzahlen mithilfe von Lochkarten und kann sich mit dem Goldenen Zirkel auf die Suche nach dem goldenen Schnitt im Alltag machen.

Schließlich kann man schon beim Basteln *mathematische Erfahrungen* gewinnen. So erlebt man, wie aus drei Rechtecken das Ikosaeder entsteht, dessen Oberfläche nur Dreiecke besitzt. Man erkennt, welche Fülle an unterschiedlichen Schattenbildern ein gebogener Draht hat. Man wundert sich über die Verwandlungen eines Sechsecks, wenn man dieses umstülpt.

Es zeigt sich, dass das Experimentieren automatisch das Denken anregt. Man macht sozusagen ganz von selbst Mathematik – natürlich nicht auf formaler Ebene, aber es ist trotzdem Mathematik. Kurz gesagt: Solche Experimente sind ein erster Schritt in die Mathematik.

Sie können das Buch auf jedem Niveau nutzen. Sie können selbst entscheiden, wie weit Sie der Mathematik näherkommen möchten. Sie können einfach die Modelle basteln und sich am Ergebnis erfreuen. Das ist wunderbar. Sie werden vermutlich ganz von selbst den nächsten Schritt tun und beim Experimentieren Fragen stellen, Vermutungen aufstellen und besonders glücklich sein, wenn sich alles zusammenfügt.

Sie können auch – wenn Sie möchten – ein kleines bisschen tiefer in die Mathematik einsteigen. Dazu finden Sie jeweils am Ende der Abschnitte Anregungen. Sie werden dann vielleicht entdecken, dass die Mathematik der Experimente die gleiche Mathematik erschließen wie der Schulunterricht – nur von einer ganz anderen Seite aus.

Dieses Buch unterscheidet sich auch dadurch von einem normalen Mathematikbuch, dass Sie es nicht systematisch von vorne nach hinten durcharbeiten müssen. Machen Sie es wie beim Öffnen einer Pralinenschachtel: Suchen Sie sich zunächst das Experiment aus, das Ihrem Geschmack am meisten zusagt. Die Experimente haben eine so große Bandbreite, dass Sie bestimmt etwas Passendes finden werden.

Mathematische Experimente faszinieren nach unserer Erfahrung eigentlich jeden. Das liegt an dem Zusammenspiel von Handeln, Denken und Fühlen. Oder, wie der Pädagoge Johann Heinrich Pestalozzi sagt, dem Lernen mit „Kopf, Herz und Hand“.

Gießen und Berlin, im Januar 2019

Albrecht Beutelspacher und Marcus Wagner

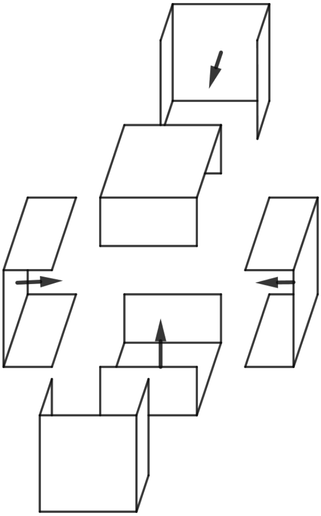
Körper:

Gesteckt, gerollt und aufgeblasen

Der Steckwürfel

Der Würfel ist derjenige geometrische Körper, den man am besten zu kennen glaubt. Doch manche Eigenschaften werden durch diese Steckvariante aus Notizzetteln noch deutlicher.

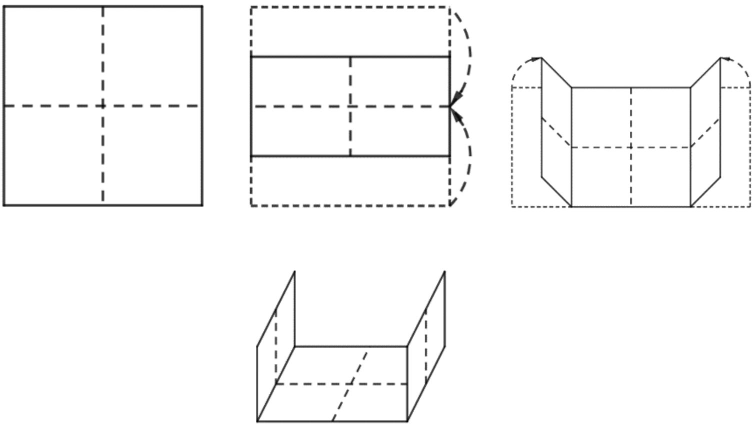
quadratisches Papier, möglichst in drei Farben
(zum Beispiel Notizzettel in Rot, Blau und Gelb)



Sechs quadratische Blätter werden zu kleineren Quadraten mit Laschen gefaltet und aus sechs verschiedenen Richtungen zusammengesteckt.

Aus jedem der sechs Blätter muss eine „Lasche" gefaltet werden. Nehmen Sie zunächst eines der Blätter zur Hand. Falten

Sie es zur Hälfte und falten Sie es anschließend wieder auf. So entstehen zwei gleichförmige Rechtecke. Drehen Sie das Blatt um 90 Grad und wiederholen Sie die Faltung. Nach dem erneuten Auffalten ist das Quadrat durch die zwei gefalteten Hilfslinien in vier kleine Quadrate eingeteilt.



Die beiden folgenden Faltungen werden nicht wieder rückgängig gemacht: Falten Sie eine Kante des Blattes zur Hilfslinie in der Mitte und machen Sie mit der gegenüberliegenden Kante das Gleiche. Sie erhalten ein Rechteck, das durch die bereits vorhandenen Faltlinien in vier kleine Rechtecke aufgeteilt ist. Falten Sie schließlich noch die beiden kurzen Seiten des entstandenen Rechtecks zur Mitte. Es entsteht ein kleines Quadrat mit der halben Kantenlänge des ursprünglichen Blattes. Dieses Quadrat wird eine Seite unseres Würfels werden.

Damit man den Würfel zusammenstecken kann, ist es nötig, die letzten beiden Faltungen wieder so weit aufzufalten, dass die Papierenden als Laschen im rechten Winkel zum Quadrat in der Mitte stehen. Machen Sie alle Kanten „scharf".

Damit ist das erste Bauteil fertig. Sie brauchen sechs solche Laschen. Der Würfel wird besonders schön (und mathematisch interessant!), wenn Sie drei Farben verwenden und beispielsweise zwei Bauteile aus rotem Papier falten, zwei aus blauem und zwei aus gelbem.

Vor dem Zusammenstecken der Laschen zu einem Würfel ist es hilfreich, wenn Sie sich die Anordnung der Farben klarmachen. Die roten Bauteile bilden Ober- und Unterseite des Würfels, die blauen Vorder- und Rückseite und die gelben die rechte und linke Seite. Legen Sie die rote Unterseite auf den Tisch, sodass die Laschen vorne und hinten nach oben stehen. Nun fügen Sie die gelben Bauteile rechts und links an. Die Laschen dieser Bauteile müssen oben und unten sein. Dann decken die beiden unteren Laschen die Innenseite des unteren roten Bauteils komplett ab. Auf die oberen Laschen der gelben Seitenteile legen Sie das rote obere Bauteil so, dass dessen Laschen vorne und hinten nach unten zeigen.

Die Form des Würfels zeigt sich jetzt schon. Doch erst durch die letzten beiden Bauteile wird das Ganze stabil. Vorne und hinten sehen Sie die roten Laschen des „Bodens“ und des „Deckels“. Rechts und links davon bilden die senkrechten vorderen Kanten des Würfels jeweils einen Schlitz. Dorthinein müssen Sie die beiden Laschen der blauen Vorderseite stecken. Und Entsprechendes müssen Sie an der Rückseite vollbringen. Dieses „Reinstecken“ macht anfänglich Schwierigkeiten, manchmal fällt der zuvor aufgestellte Würfel wieder in sich zusammen. Halten Sie durch, es lohnt sich! Denn wenn es Ihnen gelingt, die blauen Seitenteile gut reinzustecken, erhalten Sie einen erstaunlich stabilen Würfel.

An den Ecken erkennt man eine besondere Eigenschaft dieses Körpers: An jeder Ecke treffen drei verschiedenfarbige Quadrate zusammen. Insbesondere kommen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammen. Das ist eine Eigenschaft, die alle fünf platonischen Körper erfüllen; diese sind nach dem griechischen Philosoph Platon (428–348 v. Chr.) benannt. Außerdem besteht ein platonischer Körper immer aus nur einer Sorte von regulären Vielecken als Seitenflächen. Im Fall des Würfels sind es Quadrate.

Konzentrieren Sie sich nun auf die Reihenfolge der Farben an einer Ecke. Sie werden unterschiedliche Reihenfolgen entdecken. Um eine Ecke herum sind die Farben Rot, Blau, Gelb entweder im Uhrzeigersinn oder entgegen dem Uhrzeigersinn aufgereiht.

Wenn Sie verschiedene Ecken vergleichen, werden Sie Folgendes feststellen: Zwei Ecken, die durch eine Kante verbunden sind, haben unterschiedlichen Umlaufsinn, während zwei Ecken, die durch eine Diagonale eines Quadrates verbunden sind, gleichen Umlaufsinn haben. Jede Variante gibt es an vier Ecken.

Betrachten Sie nun vier Ecken mit gleichem Umlaufsinn. Halten Sie den Würfel an diesen Ecken, indem Sie diese mit Daumen und Mittelfinger Ihrer Hände fassen. Sie werden feststellen, dass auf jeder Seite des Würfels zwei gegenüberliegende Ecken durch Ihre Finger gehalten werden. Wenn man diese Diagonalen der Seiten einzeichnen würde, würde man sechs Linien erhalten. Wenn man diese Linien als Kanten eines neuen Körpers interpretiert, so erkennt man einen Tetraeder.

Auch die gefalteten Hilfslinien ermöglichen uns Einsicht in die Struktur des Würfels: Die Hilfslinien sind auf den Seiten deutlich zu sehen. Und sie passen zusammen! Jeweils vier Hilfslinien ergänzen sich zu einem Quadrat, das „um den Würfel herum" verläuft. Würde man einen – nicht hohlen – Würfel entlang einer dieser Hilfslinien aufschneiden, so würde man eine quadratische Schnittfläche erhalten. Diese ist eine Symmetrieebene des Würfels.

Literatur:
A. Beutelspacher, M. Wagner: Wie man durch eine Postkarte steigt … und andere mathematische Experimente, Verlag Herder 2010

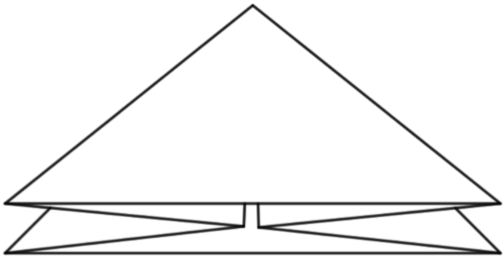
Wie man einen Würfel aufpustet

Durch Pusten wird aus einem zweidimensionalen Papier ein dreidimensionales Objekt.

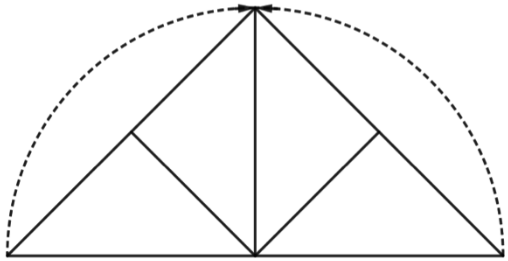
ein Blatt quadratisches Papier (circa 20 Zentimeter x 20 Zentimeter, möglichst dünn)

Der Würfel wird durch Falten gemäß der Anleitung vorbereitet und dann durch Pusten in die leicht geöffnete Spitze entfaltet.

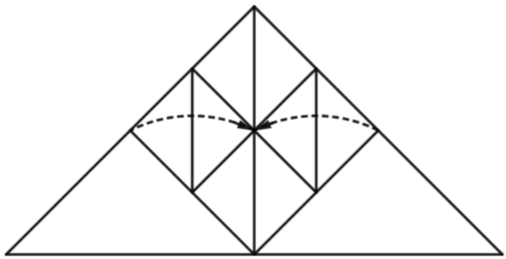
Legen Sie das Blatt flach auf den Tisch. Falten Sie es entlang einer Mittellinie zur Hälfte und anschließend wieder auf. Anschließend legen Sie das Blatt auf die Rückseite. Falten sie es zunächst entlang einer Diagonalen und wieder auf. Das Gleiche machen Sie mit der zweiten Diagonalen. Wenn Sie jetzt die beiden Endpunkte der Mittellinie über dem Blatt zusammenführen, wird das quadratische Blatt zu einem vierlagigen Dreieck gefaltet.



Fast alle weiteren Schritte werden doppelt durchgeführt, und zwar auf beiden Seiten des Dreiecks. Doch zunächst betrachten wir nur eine Seite. Drehen Sie das Dreieck so, dass die lange Seite vor Ihnen liegt und die rechtwinklige Spitze von Ihnen weg zeigt. Falten Sie die rechte und die linke Spitze der oberen Lage zur rechtwinkligen Spitze. Die beiden gefalteten Bereiche bilden jetzt ein auf der Spitze stehendes Quadrat.



Die rechte und linke Ecke dieses Quadrats werden im nächsten Schritt zu dessen Mittelpunkt gefaltet.



Als Nächstes wird auch die (zweigeteilte) obere Spitze des Quadrats zu dessen Mittelpunkt gefaltet.