

Leseprobe

Martin Mayr

Technische Mechanik

Statik - Kinematik - Kinetik - Schwingungen - Festigkeitslehre

ISBN (Buch): 978-3-446-44570-3

ISBN (E-Book): 978-3-446-44618-2

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44570-3>

sowie im Buchhandel.

Allgemeines Vorwort

Dieses Lehrbuch beinhaltet den Stoff der Vorlesung „Technische Mechanik“ im Studium des Maschinenbaus an Fachhochschulen. Es besteht aus drei selbständigen Teilen: Statik – Kinematik, Kinetik, Schwingungen – Festigkeitslehre. Jeder Teil kann unabhängig vom anderen benutzt werden. Einheitlicher Aufbau, Querverweise und ein gemeinsamer Anhang fügen die drei Teile jedoch zu einem Ganzen zusammen. Der umfangreiche Anhang ist zum bequemen Nachschlagen in einem Beiheft untergebracht.

Bei der Darstellung ließ ich mich vor allem von didaktischen Gesichtspunkten leiten: optische Hervorhebung der Endformeln und Merksätze, 474 Bilder, 275 Fragen zum Verständnis, 104 vollständig gelöste Beispiele, 116 themenbezogene Übungsaufgaben, 43 „Prüfungsaufgaben“ (nach vier Schwierigkeitsgraden geordnet).

Die Antworten zu den Fragen sowie die Ergebnisse der Übungs- und Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten) befinden sich am Schluss des jeweiligen Buchteils. Aus Platzgründen konnten nicht die vollständigen Lösungen wiedergegeben werden. Lehrende erhalten sie auf Anfrage.

Weitere themenbezogene Beispiele und Prüfungsaufgaben sind in meinem Übungsbuch „Mechanik-Training“ zusammengestellt (mit ausführlichen Lösungen).

Der Gepflogenheit im Maschinenbau folgend sind die Bilder, falls nichts anderes vereinbart ist, in der Einheit mm bemast. In den Zahlenwertgleichungen wird fast ausschließlich mit kohärenten Einheiten gearbeitet, um langwierige Umrechnungen zu vermeiden. Die Berechnungen werden mit dem Taschenrechner ohne ein Zwischenrunden ausgeführt, das Endergebnis wird meist auf eine praktisch sinnvolle Stellenzahl gerundet wiedergegeben. Graphische Lösungen werden mit CAD erstellt und sind deshalb so genau wie analytische Lösungen.

Ich möchte allen, die mich bei der Arbeit zu diesem Buch unterstützt haben, ganz herzlich danken.

Hier sind in erster Linie Prof. Ulrich Thalsofer (Numerische Verfahren) und Prof. Ernst Schatz (Maschinenelemente, Thermische Strömungsmaschinen) zu nennen.

Wertvolle Unterstützung erhielt ich auch von Prof. Helmut Hiekel (Mechanik), Prof. Dr. Wolfgang Käser und Prof. Wilhelm Ruckdeschel (beide Fördertechnik, Maschinenelemente) sowie Prof. Dr. Peter Tautzenberger (Werkstofftechnik).

Korrektur lasen Prof. Dr. Werner Drexler (Mechanik, FH Kempten), Prof. Dr. Johann Fuchs (Mechanik), Prof. Dr. Frank Gießner (Feinwerktechnik, Mechanik), Dipl.-Ing. Hubert Keim (Konstruktion, Pfister GmbH Augsburg) und wiederum Prof. Ernst Schatz.

Übungsaufgaben und fachlichen Rat steuerten bei Prof. Dr. Ingo Bolling (Hydraulik-Pneumatik), Dipl.-Ing. Hubert Breyer (Unfallverhütung, GUV), Prof. Rudolf Bretzel (Mechanik, Luft- und Raumfahrt), Prof. Dr. Dieter Janasch (Maschinenelemente), Prof. Dr. Winfried Kochem (Konstruktion, FH Köln), Prof. Klaus Martin (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), StD Georg Mühlbauer (Mathematik, Physik, Max-Reger-Gymnasium Amberg), Prof. Dr. Franz Obinger (Getriebetechnik, CAD), Prof. Hans Rebinger (Verbrennungsmotoren, Maschinendynamik), Prof. Dr. Willi Rößner (Werkzeugmaschinen), Prof. Dr. Joachim Voßiek (Maschinenelemente, Mechanik), Prof. Dr. Rainer Wieler (Verbrennungsmotoren, Fahrzeugtechnik) und Prof. Dr. Rolf Ziegler (Regelungstechnik).

Dipl.-Ing. Daniel Dierig, Dipl.-Ing. Oliver Herrmann, Dipl.-Ing. Jürgen Möller, Dipl.-Ing. Marco Vasciarelli, Dipl.-Ing. Eugen Weber und Dipl.-Ing. Stefan Wolf zeichneten mit großer Sorgfalt die Bilder. Herr Otto Reiser baute die Modelle, Herr Erber machte die Fotos. Die schlimmsten sprachlichen Ausrutscher verhinderten meine Frau Lydia und meine Tochter Andrea.

Mit Informationen unterstützten mich die Firmen KUKA, LIEBHERR, MAN und VON ROLL.

Allen Genannten nochmals herzlichen Dank.

Vorwort zur 8. Auflage

Der Inhalt der 7. Auflage wurde sorgfältig geprüft. Es konnten keine Unstimmigkeiten festgestellt werden; deshalb wurden für die 8. Auflage auch keine Änderungen vorgenommen. Es wurden lediglich ein paar Druckfehler korrigiert.

Ich danke allen Lesern für die aufmunternden Zuschriften und wertvollen Anregungen, die in kommenden Auflagen Berücksichtigung finden werden. Dem Carl Hanser Verlag danke ich für die stets gute Zusammenarbeit.

Augsburg, Mai 2015

Martin Mayr

Inhaltsverzeichnis

TEIL 1: Statik

1	Begriffe, Grundgesetze, Grundaufgaben	1
1.1	Die Kraft	1
1.2	Masse und Gewichtskraft	2
1.3	Das Gleichgewichtsaxiom	3
1.4	Das Wechselwirkungsgesetz	4
1.5	Die Verschiebbarkeit der Kraft längs ihrer Wirkungslinie	5
1.6	Kräfteparallelogramm und Krafteck	5
1.7	Die Zerlegung einer Kraft nach zwei nichtparallelen Wirkungslinien	5
1.8	Das Hebelgesetz von ARISTOTELES und ARCHIMEDES	6
2	Die resultierende Kraft eines zentralen ebenen Kräftesystems	8
2.1	Graphische Lösung	8
2.2	Analytische Lösung	8
3	Kräftepaar und Moment einer Kraft	10
3.1	Das Kräftepaar	10
3.2	Das Gleichgewicht zweier Kräftepaare	11
3.3	Parallelverschiebung einer Kraft	11
3.4	Das Moment einer Kraft bezüglich eines Punktes	11
3.5	Darstellung und Eigenschaften des Moments	12
3.6	Das Moment einer Kraft in Bezug auf den Koordinatenursprung	13
4	Die resultierende Kraft eines nicht zentralen ebenen Kräftesystems	14
4.1	Parallele Kräfte	14
4.2	Beliebige Kräfte	15
5	Lagerung von Körpern	16
5.1	Freimachen eines Körpers	16
5.2	Lagerungsarten ebener Körper	16
6	Ebene Kräftesysteme im Gleichgewicht	19
6.1	Drei nichtparallele Kräfte	19
6.2	Zerlegung einer Kraft nach drei Wirkungslinien	22
6.3	Beliebiges ebenes Kräftesystem (einschließlich Einzelmomente)	24
7	Lagerreaktionen von typischen ebenen Tragwerken	29
7.1	Balken auf zwei Stützen	29
7.2	Der eingespannte Balken	29
7.3	GERBER-Träger	30
7.4	Dreigelenkbogen	32
8	Das räumliche Kräftesystem	33
8.1	Komponenten einer Kraft im kartesischen Koordinatensystem	33
8.2	Das Moment einer Kraft und seine kartesischen Komponenten	34
8.3	Resultierende Kraft und resultierendes Moment	36
8.4	Lagerung räumlicher Körper	37
8.5	Räumliche Kräftesysteme im Gleichgewicht	37

9	Der Schwerpunkt	46
9.1	Körperschwerpunkt	46
9.2	Flächenschwerpunkt	49
9.3	Die GULDINschen Regeln	51
10	Innere Kräfte und Momente	54
10.1	Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse	54
10.2	Der eingespannte Balken	62
10.3	GERBER-Träger	63
10.4	Bogenträger	64
10.5	Ebene Rahmen ohne Verzweigung	65
10.6	Ebene Rahmen mit Verzweigung	67
10.7	Wellen.	69
10.8	Beliebige räumliche Träger	71
11	Ebene, statisch bestimmte Fachwerke	74
12	Reibung	77
12.1	Haft- und Gleitreibung	77
12.2	Seil- und Riemenreibung	80
12.3	Rollreibung (Rollwiderstand)	83
	Prüfungsaufgaben	85
	Antworten zu den Fragen	90
	Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	92
	Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	99

TEIL 2: Kinematik, Kinetik, Schwingungen

1	Einleitung	101
2	Ebene Punktbewegung	103
2.1	Bahn, Geschwindigkeit, Beschleunigung	103
2.2	Weg-Zeit-Diagramm	107
2.3	Grundaufgaben der Kinematik	108
2.4	Tangential- und Normalbeschleunigung (bzw. Bahn- und Zentripetalbeschleunigung).	110
2.5	Drehbewegung – lineare Bewegung.	112
2.5.1	Kreisbahn.	112
2.5.2	Umwandlung einer Drehbewegung in eine lineare Bewegung	113
2.6	Beschreibung der Bewegung in Polarkoordinaten	116
3	Räumliche Punktbewegung	120

Inhaltsverzeichnis	XI
4 Ebene Bewegung des starren Körpers (mit Hinweisen auf die räumliche Bewegung)	123
4.1 Translation (Parallelverschiebung)	123
4.2 Rotation (Drehung)	123
4.3 Beliebige Bewegung	123
4.3.1 Geschwindigkeit	124
4.3.2 Beschleunigung	125
4.4 Drehpol (Momentan-, Geschwindigkeitspol)	127
5 Relativbewegung	131
5.1 Translatorisch bewegtes Bezugssystem	131
5.2 Geschwindigkeit bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem.	132
5.3 Beschleunigung bei translatorisch und rotatorisch bewegtem Bezugssystem	134
6 Überlagerte Drehbewegungen	139
7 Arbeit, potentielle Energie, Leistung, Wirkungsgrad	141
7.1 Arbeit und potentielle Energie	141
7.2 Leistung	143
7.3 Wirkungsgrad	143
8 Die NEWTONschen Grundgesetze, D'ALEMBERTsche Trägheitskraft	145
9 Impulssatz und Schwerpunktsatz	151
10 Energiesatz	157
11 Trägheitsmomente	161
12 Kinetik der ebenen Bewegung des starren Körpers	164
12.1 Translation mit der Schwerpunktgeschwindigkeit	164
12.2 Rotation um eine Trägheitshauptachse durch den Schwerpunkt	165
12.2.1 Drehimpulssatz (Drallsatz)	165
12.2.2 Kinetische Energie.	167
12.3 Analogie zwischen Translation und Rotation	168
12.4 Drehung um eine feste Achse oder um eine Achse durch den Momentanpol	170
12.5 Reduziertes Trägheitsmoment	171
12.6 Allgemeine ebene Bewegung	174
12.7 Gekoppelte Körper.	177
13 Kinetik der Relativbewegung	180
14 Stoßvorgänge	183
14.1 Gerader zentraler Stoß	183
14.2 Schiefer zentraler Stoß	189
14.3 Gerader exzentrischer Stoß	190
14.4 Drehstoß	191
15 Schwingungen	192
15.1 Freie ungedämpfte Schwingung	193
15.2 Freie gedämpfte Schwingung	198

15.3	Erzwungene Schwingung	205
15.4	Maßnahmen gegen Resonanzerscheinungen	209
15.4.1	Verlagerung der Eigenfrequenz	209
15.4.2	Dämpfung und Schwingungsstörung	210
15.4.3	Schwingungsisolierung.	210
15.4.3.1	Aktive Isolierung	210
15.4.3.2	Passive Isolierung	213
15.4.4	Schwingungstilgung mittels Hilfsmasse.	214
	Prüfungsaufgaben	217
	Antworten zu den Fragen	221
	Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	225
	Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	231
 TEIL 3: Festigkeitslehre		
1	Aufgaben der Festigkeitslehre	233
2	Beanspruchungsarten	236
3	Spannungen	239
3.1	Normalspannung und Schubspannung.	239
3.2	Zugstab – einachsiger Spannungszustand	240
3.3	Räumlicher (dreiachsiger) Spannungszustand	242
3.4	Ebener (zweiachsiger) Spannungszustand (ESZ)	244
3.4.1	Spannungen für gedrehte Schnittflächen	245
3.4.2	Größe und kleinste Normalspannung sowie größte Schubspannung.	247
3.4.3	MOHRscher Spannungskreis	253
3.5	Spannungsoptik	256
4	Verformungen und Verzerrungen	262
4.1	Dehnung und Querdehnung	262
4.2	Schubverzerrung	263
4.3	Allgemeiner Verzerrungszustand	263
5	Stoffgesetze	264
5.1	Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm, HOOKEsches Gesetz	264
5.2	Schubspannung und Schubwinkel	267
5.3	Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand.	267
5.4	Wärmedehnungen und Wärmespannungen.	269
5.5	Anwendung der einachsigen Stoffgesetze auf statisch bestimmte und statisch unbestimmte Stabwerke	271
5.5.1	Spannungen und Verformungen in einem statisch bestimmten Stabwerk	271
5.5.2	Spannungen und Verformungen in einem statisch unbestimmten Stabwerk	273
6	Arbeit und elastische Energie.	276

7	Einfache Beanspruchungsfälle und Festigkeitsbedingungen	279
7.1	Zug und Druck	279
7.2	Flächenpressung.	281
7.3	Schub	281
8	Dünnwandige Ringe	285
8.1	Spannung unter Innen- oder Außendruck	285
8.2	Radiusänderung und Dehnung infolge Spannung und Temperaturänderung	286
8.3	Rotierender Ring	289
9	Dünnwandige Behälter	293
9.1	Kreiszylindrischer Behälter unter Innen- oder Außendruck	293
9.2	Kugelbehälter unter Innen- oder Außendruck.	294
10	Flächenmomente	297
10.1	Flächenmoment 1. Grades (statisches Moment der Fläche)	297
10.2	Flächenmomente 2. Grades	298
10.2.1	Definitionen und Beispiele	298
10.2.2	Parallelverschiebung der Bezugsachsen	301
10.2.3	Drehung der Bezugsachsen	301
10.2.4	Flächenmomente zusammengesetzter Flächen	302
11	Biegung.	308
11.1	Reine Biegung	308
11.1.1	Gerade Biegung	308
11.1.2	Schiefe Biegung	312
11.2	Biegung mit Querkraft und weitere Näherungen (Technische Biegelehre)	315
11.3	Durchbiegung und Biegewinkel	321
11.4	Formänderungsarbeit.	327
12	Torsion	331
12.1	Kreiszylindrische Stäbe	331
12.2	Formänderungsarbeit	336
12.3	Dünnwandige einfach geschlossene Profile	337
12.3.1	Schubspannung	337
12.3.2	Torsionswinkel	338
12.4	Dünnwandige offene Profile.	342
12.5	Sonstige Querschnittsformen	343
13	Schub bei Querkraftbiegung	346
14	Knickung	353
14.1	Elastische Knickung nach EULER	353
14.2	Spannungsabsicherung bei Druckstäben	356
15	Dauer-, Zeit- und Betriebsfestigkeit	361
16	Festigkeitshypothesen	364
16.1	Die drei wichtigsten Hypothesen	365
16.2	Anstrengungsverhältnis	367
17	Zusammengesetzte Beanspruchung von Stäben	369

17.1 Biegung mit Normalkraft	369
17.2 Biegung und Torsion	372
17.3 Beliebige Lastkombination	377
18 Bauteilfestigkeit	380
18.1 Plastische Stützwirkung.	380
18.2 Kerbwirkung	381
18.3 Oberflächeneinfluss, Randschichtverfestigung, Umgebungseinfluss	384
18.4 Größeneinfluss	385
19 Dehnungsmessstreifen-Methode (DMS-Methode)	391
20 Satz von CASTIGLIANO	398
20.1 Statisch bestimmte Systeme	400
20.2 Statisch unbestimmte Systeme	401
Prüfungsaufgaben	406
Antworten zu den Fragen	415
Ergebnisse der Übungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	421
Ergebnisse der Prüfungsaufgaben (meist mit Lösungshinweisen und Zwischenwerten).	426
Literaturverzeichnis (im Text zitierte und ergänzende Literatur)	429
Verwendete Symbole (mit den vorzugsweise verwendeten Einheiten).	431
Sachwortverzeichnis	435

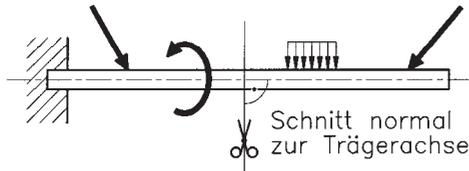


Bild 10.1 Schnitt durch den Träger

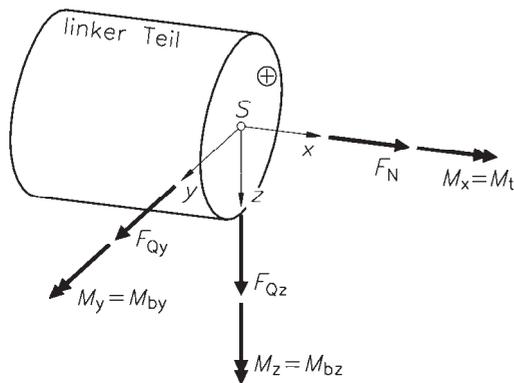


Bild 10.2 Die 6 möglichen Schnittgrößen am positiven Schnittufer

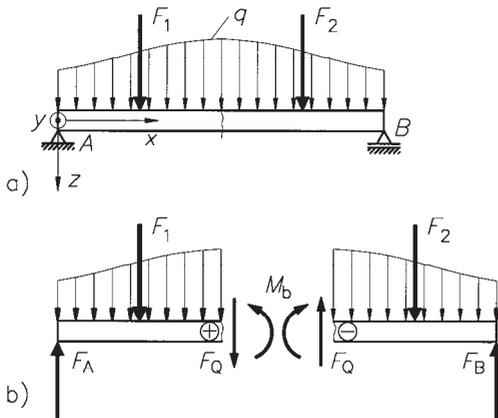


Bild 10.3 Gerader Balken auf zwei Stützen unter Vertikalbelastung
 a) Anordnung mit Koordinatensystem
 b) durchgeschnittene Trägerteile mit Schnittgrößen

10 Innere Kräfte und Momente

Normalkraft, Querkräfte, Biegemomente, Torsionsmoment, gerader Balken, GERBER-Träger, Bogenträger, ebene/räumliche Rahmen, Wellen

Bisher hatten wir das Bauteil immer an den Lagern freigemacht, aus der Umgebung herausgeschnitten. Auf diese Weise war es möglich, die Lagerreaktionen zu bestimmen. Nun gilt unser Interesse den inneren Beanspruchungen; folglich müssen wir den Träger selbst „auseinanderschneiden“, Bild 10.1. Die inneren Kräfte und Momente stehen mit den äußeren Kräften und Momenten (einschließlich Lagerreaktionen) des abgeschnittenen Trägerteils im Gleichgewicht (Schnittprinzip).

Bild 10.2 zeigt die Schnittfläche des linken Trägerteils mit dem Koordinatensystem und den möglichen Schnittgrößen am rechten (positiven) Schnittufer:

Normalkraft F_N (als Zugkraft eingezeichnet)

Querkräfte F_{Qy} und F_{Qz}

Biegemomente M_y und M_z (M_{by} , M_{bz})

Torsionsmoment M_x (M_t)

Es müssen nicht immer alle 6 Schnittgrößen auftreten.

Eine Bemerkung zum Schnittufer: Das Schnittufer ist positiv, wenn die Flächennormale in die positive Koordinatenrichtung (hier x -Richtung) weist. Der Pfeil der Flächennormalen zeigt von der Fläche weg.

Am rechten Teil, und zwar am linken (negativen) Schnittufer wirken die gleichen Schnittgrößen wie am linken Teil, nur sind nun die Pfeile entgegengesetzt einzuzeichnen. Das ist damit zu begründen, dass sich die Schnittgrößen paarweise aufheben müssen („actio = reactio“).

Bei statisch bestimmten Lagerungen kennen wir neben der äußeren Belastung auch die Lagerreaktionen. Damit lassen sich die Schnittgrößen aus den Gleichgewichtsbedingungen am linken oder rechten Trägerteil bestimmen.

10.1 Gerader Balken auf zwei Stützen mit Belastung quer zur Balkenachse

Bild 10.3a zeigt den Balken mit Koordinatensystem. Für diesen Fall gibt es nur 2 Schnittgrößen, Bild 10.3b:

Querkraft $F_{Qz} = F_Q$

Biegemoment $M_y = M_b$

Wegen „actio = reactio“ sind sie am negativen Schnittufer des rechten Teils entgegengesetzt eingezeichnet wie am positiven Schnittufer des linken Teils, jedoch beide Male als positive Größen.

Im Folgenden besprechen wir einfache Standardfälle: Balken mit Einzelkraft und Balken mit Streckenlast. Die Ergebnisse hieraus nützen uns beim Lösen komplizierterer Fälle.

Balken mit Einzelkraft (Bild 10.4a)

Die Gleichgewichtsbedingungen für den an den Lagern freigemachten Balken liefern die Lagerreaktionen \vec{F}_A und \vec{F}_B , Bild 10.4b. In diesem einfachen Fall erhält man sie auch mit dem Hebelgesetz.

Jetzt wird der Balken durchgeschnitten. Bild 10.4c zeigt den linken Teil mit der Lagerreaktion \vec{F}_A , der Querkraft F_Q und dem Biegemoment M_b .

Vertikales Kräftegleichgewicht und Momentengleichgewicht um I liefern:

$$\downarrow \quad -F_A + F_Q = 0 \quad \rightarrow \quad F_Q = F_A = F \cdot \frac{b}{l} = \text{konst.}$$

$$\curvearrowright \quad -F_A \cdot x + M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = F_A \cdot x = F \cdot \frac{b}{l} \cdot x \quad (\text{Gerade})$$

Einen zweiten Schnitt zeigt Bild 10.4d. Auch diesen Teil setzen wir ins Gleichgewicht:

$$\downarrow \quad -F_A + F + F_Q = 0 \quad \rightarrow \quad F_Q = F_A - F = F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right) = \text{konst.}$$

$$\curvearrowright \quad -F_A \cdot x + F(x - a) + M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = (F_A - F) \cdot x + F \cdot a$$

$$M_b = F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right) \cdot x + F \cdot a = -F \cdot \frac{a}{l} \cdot x + F \cdot a$$

(Gerade, andere Steigung als im ersten Abschnitt)

Spezielle Punkte der M_b -Geraden:

$$M_b(x = 0) = 0; \quad M_b(x = l) = 0$$

$$M_b(x = a) = F \cdot \frac{b}{l} \cdot a$$

Damit lassen sich F_Q und M_b über der Balkenachse auftragen, Bild 10.4e und f.

Im F_Q -Diagramm laufen wir vom linken Ende aus entlang der Balkenachse und hängen die Kraftpfeile aneinander. Im Angriffspunkt der Einzelkraft hat F_Q einen Nulldurchgang, kurz links davon hat F_Q den

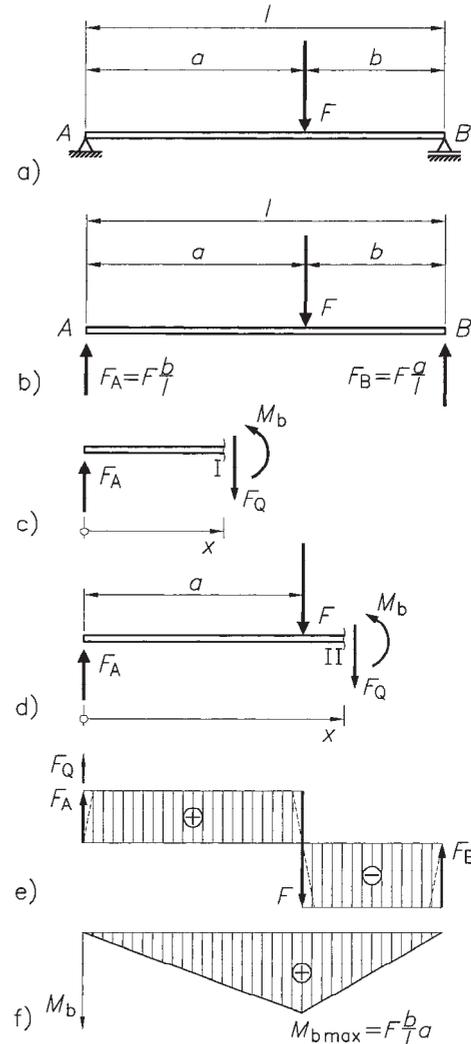


Bild 10.4 Balken mit Einzelkraft

- a) Anordnung
- b) freigemacht, mit Lagerreaktionen
- c) Schnitt vor \vec{F}
- d) Schnitt nach \vec{F}
- e) F_Q -Diagramm (F_Q -Schaubild, F_Q -Fläche, F_Q -Verlauf)
- f) M_b -Diagramm (M_b -Schaubild, M_b -Fläche, M_b -Verlauf)

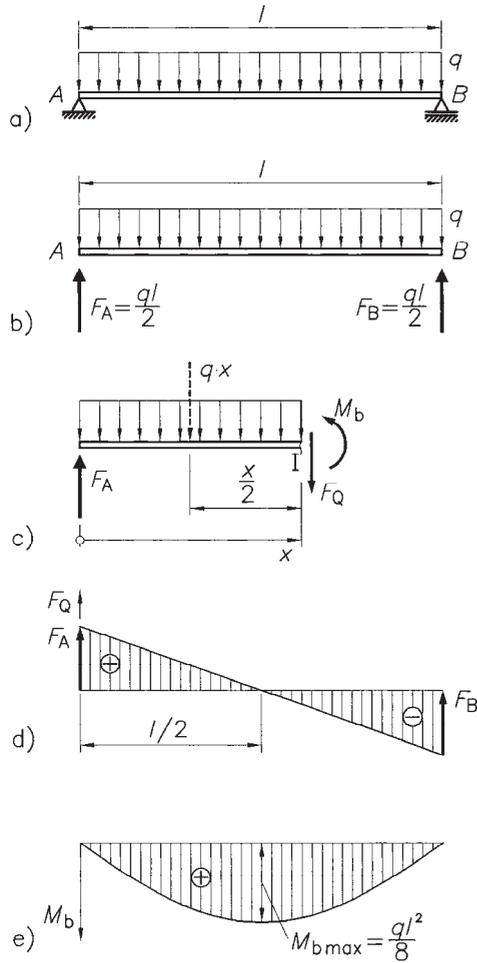


Bild 10.5 Balken mit konstanter Streckenlast
 a) Anordnung
 b) freigemacht, mit Lagerreaktionen
 c) linker Balkenteil
 d) F_Q -Diagramm
 e) M_b -Diagramm

Wert F_A , kurz rechts davon den Wert F_B . Für die Beanspruchung an der Stelle $x = a$ ist somit die größere Kraft F_B maßgebend.

Das leuchtet besser ein, wenn wir bedenken, dass Einzelkräfte in der Praxis nicht punktförmig, sondern auf einer endlichen Breite eingeleitet werden (gestrichelte Linien in Bild 10.4e).

Das M_b -Diagramm setzt sich aus zwei Geraden zusammen. Traditionell werden die positiven Werte nach unten aufgetragen.

Erkenntnisse zu F_Q - und M_b -Verlauf:

- F_Q und M_b sind null an den freien Enden.
- Zwischen zwei Einzelkräften ist F_Q konstant und M_b linear.
- Am Angriffspunkt der Einzelkraft hat der F_Q -Verlauf einen Sprung und der M_b -Verlauf einen Knick.
- Am Nulldurchgang von F_Q erreicht M_b einen Extremwert.

Balken mit konstanter Streckenlast (Bild 10.5 a)

Die Lagerreaktionen \bar{F}_A und \bar{F}_B sind wegen der Symmetrie gleich groß, Bild 10.5b. Wir setzen den abgeschnittenen linken Teil ins Gleichgewicht, Bild 10.5c. Dabei ist es einfacher, mit der Resultierenden $q \cdot x$ aus der Teilstreckenlast zu arbeiten.

$$\downarrow \quad -F_A + q \cdot x + F_Q = 0 \rightarrow F_Q = F_A - q \cdot x = \frac{q}{2}(l - 2x) \quad (\text{Gerade})$$

$$\curvearrowleft \quad -F_A \cdot x + q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + M_b = 0 \rightarrow M_b = F_A \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2}(l \cdot x - x^2)$$

(quadratische Parabel)

$$M_b(x=0) = M_b(x=l) = 0$$

$$M_b\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{q}{2} \cdot \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4}\right) = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

Bild 10.5d und e zeigen die Verläufe.

Zusätzliche Erkenntnis:

- Für $q = \text{konstant}$ verläuft F_Q linear und M_b parabelförmig.

Wir vergleichen die Ergebnisse aus den beiden Standardfällen:

	Einzelkraft		Streckenlast
	links	rechts	
F_Q	$F \cdot \frac{b}{l}$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right)$	$\frac{q}{2} \cdot (l - 2x)$
M_b	$F \cdot \frac{b}{l} \cdot x$	$F \cdot \left(\frac{b}{l} - 1\right) \cdot x + F \cdot a$	$\frac{q}{2} \cdot (l \cdot x - x^2)$

Es zeigt sich: F_Q ist die Ableitung von M_b , bzw. M_b das Integral von F_Q ! Gilt das allgemein?

Um dies zu klären, schneiden wir aus dem Balken in Bild 10.6a ein infinitesimal kurzes Stück heraus, Bild 10.6b. Die eingezeichneten Schnittgrößen sind an beiden Schnittflächen positiv eingezeichnet; am rechten Schnittufer sind sie infinitesimal größer als am linken. Die Streckenlast fassen wir zur Resultierenden $q \cdot dx$ zusammen.

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\downarrow \quad \underbrace{-F_Q}_{\text{links}} + q \cdot dx + \underbrace{F_Q + dF_Q}_{\text{rechts}} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dF_Q}{dx} = -q$$

$$\curvearrow \quad \underbrace{-M_b - F_Q \cdot \frac{dx}{2}}_{\text{links}} - \underbrace{(F_Q + dF_Q) \cdot \frac{dx}{2} + M_b + dM_b}_{\text{rechts}} = 0$$

$$\rightarrow \quad -F_Q \cdot dx - \underbrace{dF_Q \cdot \frac{dx}{2}}_{=0} + dM_b = 0$$

Der zweite Term darf null gesetzt werden, da er gegenüber den anderen beiden Termen um eine Ordnung kleiner ist. Wir erhalten:

$$\frac{dM_b}{dx} = F_Q$$

Zusammenhang zwischen q , F_Q und M_b :

$$\frac{dF_Q}{dx} = -q \quad (10.1 a)$$

$$\frac{dM_b}{dx} = F_Q \quad (10.1 b)$$

bzw.

$$F_Q = -\int q \cdot dx + C \quad (10.2 a)$$

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx \quad (10.2 b)$$

Der M_b -Verlauf lässt sich mit (10.2b) auch über die Integration des F_Q -Verlaufs finden. Diese Methode ist in vielen Fällen einfacher als die Anwendung der Gleichgewichtsbedingungen.

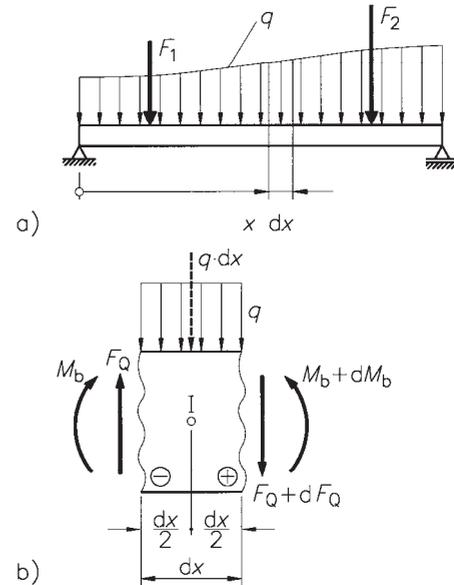


Bild 10.6 Zusammenhang zwischen q , F_Q und M_b
 a) Gesamtbalken
 b) herausgeschnittenes Stück

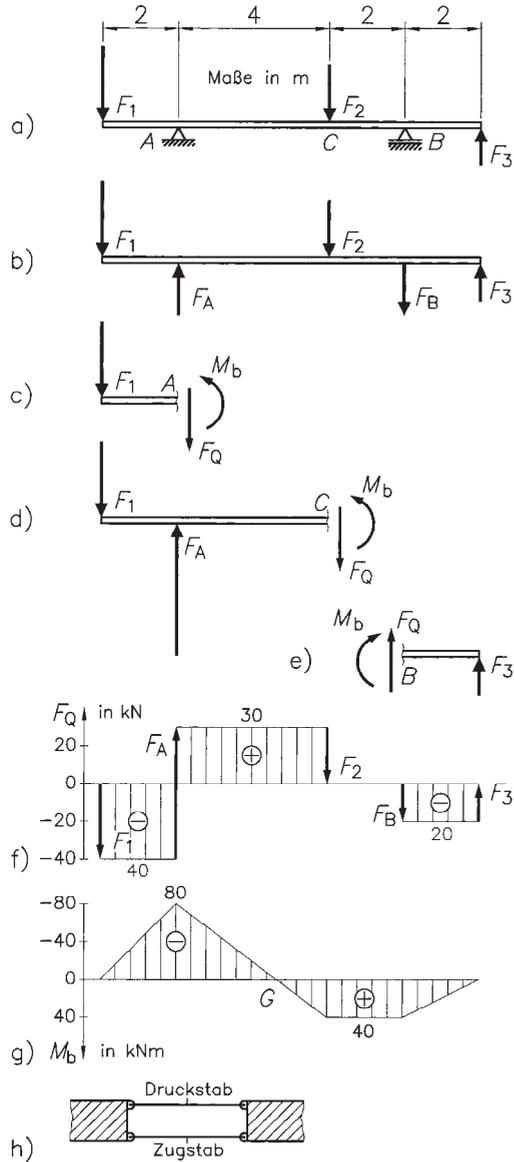


Bild 10.7 Balken aus Beispiel 10.1

- Anordnung
- freigemacht, mit Lagerreaktionen
- Schnitt unmittelbar links von A
- Schnitt unmittelbar links von C
- Schnitt unmittelbar rechts von B
- F_Q -Diagramm
- M_b -Diagramm
- mögliche Balkenverbindung im Abschnitt C-B

Beispiel 10.1

Für den Träger gemäß Bild 10.7a sind das F_Q - und M_b -Diagramm zu erstellen. Zahlenwerte: $F_1 = 40 \text{ kN}$; $F_2 = 30 \text{ kN}$; $F_3 = 20 \text{ kN}$.

Lösung:

Wir führen nacheinander folgende Schritte aus:

- Lagerreaktionen berechnen.
- F_Q -Diagramm zeichnen, indem wir von links nach rechts laufend die Kräfte aneinanderhängen.
- M_b -Diagramm erstellen
 - mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am abgeschnittenen Teilbalken,
 - über die Integration des F_Q -Verlaufs.

Lagerreaktionen

Die Lagerreaktionen kann man mit beliebigem Richtungssinn einzeichnen. Ich trage sie hier jedoch so auf, wie sie vermutlich wirken werden, Bild 10.7b.

$$\curvearrowright (F_1 \cdot 8 - F_A \cdot 6 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_A = \frac{1}{6} (F_1 \cdot 8 + F_2 \cdot 2 + F_3 \cdot 2) \text{ kN} = 70 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft (F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 - F_B \cdot 6 + F_3 \cdot 8) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{1}{6} (F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + F_3 \cdot 8) \text{ kN} = 20 \text{ kN}$$

Kontrolle:

$$\uparrow (-40 + 70 - 30 - 20 + 20) \text{ kN} = 0$$

 F_Q -Diagramm

Wir tragen die Kräfte gemäß Bild 10.7f auf.

 M_b -Diagramm

An den freien Balkenenden ist M_b null; zwischen zwei Einzelkräften verläuft M_b linear. Zum Zeichnen genügen somit die M_b -Werte an den Angriffspunkten der Kräfte.

- Mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen:
Schnitt unmittelbar links von A, Bild 10.7c:

$$\curvearrowleft (F_1 \cdot 2 \text{ m} + M_b = 0 \rightarrow M_b = -80 \text{ kNm}$$

Schnitt unmittelbar links von C , Bild 10.7d:

$$\curvearrowright \quad F_1 \cdot 6 \text{ m} - F_A \cdot 4 \text{ m} + M_b = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = 40 \text{ kNm}$$

Schnitt unmittelbar rechts von B , Bild 10.7e:

In diesem Fall ist es einfacher, den rechten Balkenteil zu nehmen. Die Schnittgrößen sind mit umgedrehten Richtungen gegenüber dem linken Teil einzutragen.

$$\curvearrowleft \quad -M_b + F_3 \cdot 2 \text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad M_b = 40 \text{ kNm}$$

Bild 10.7g zeigt den M_b -Verlauf.

b) Über die Integration des F_Q -Verlaufs, Gleichung (10.2b):

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx$$

Die Integration entspricht der Flächenberechnung im F_Q -Diagramm. Wir fangen am linken Ende an und berechnen die Flächen jeweils vom linken Ende bis zum Kraftangriffspunkt. Bei Einzelkräften kommen nur Rechteckflächen vor.

Moment bei A :

$$M_b = -40 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -80 \text{ kNm}$$

Moment bei C :

$$M_b = -80 \text{ kNm} + 30 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 40 \text{ kNm}$$

Von C bis B kommt keine Fläche hinzu, das Moment ist auf diesem Abschnitt konstant.

Kontrollliste:

1. F_Q beginnt am linken freien Balkenende mit null und geht am rechten freien Balkenende wieder auf null zurück.
2. M_b ist an den freien Balkenenden null.
3. An den Stellen $M_b = \text{konst.}$ gilt $F_Q = dM/dx = 0$ (zwischen C und B).
4. An jedem Nulldurchgang von F_Q besitzt M_b ein Extremum (bei A und zwischen C und B).
5. Beim geraden Balken mit freien Balkenenden und Querbelastung sind positive und negative F_Q -Fläche gleich groß.

Hinweis: Es würde die Kraftübertragung nicht beeinflussen, wenn wir bei G ein Gelenk, Bild 10.7g, und im Abschnitt C - B eine Verbindung gemäß Bild 10.7h einbauen würden.

Beispiel 10.2

Für den Träger gemäß Bild 10.8a sind das F_Q - und M_b -Diagramm allgemein in Abhängigkeit von q und l zu erstellen.

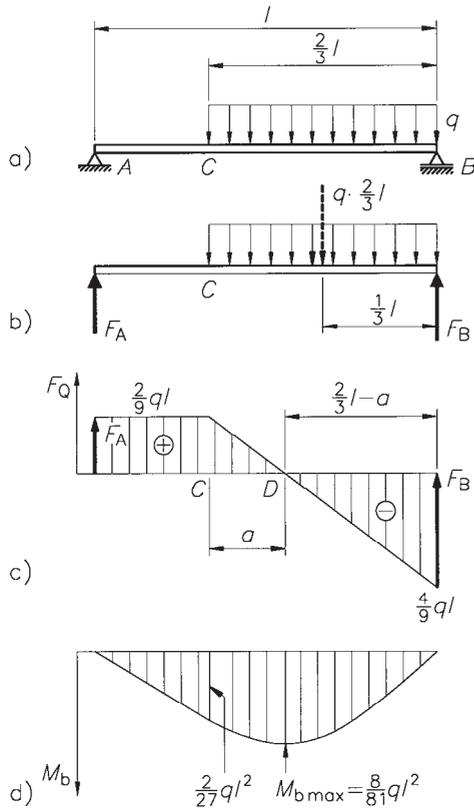


Bild 10.8 Balken aus Beispiel 10.2

- Anordnung
- Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
- F_Q -Diagramm
- M_b -Diagramm

Lösung:**Lagerreaktionen**

Zur Berechnung der Lagerreaktionen darf die Streckenlast durch ihre Resultierende $q \cdot \frac{2}{3}l$, mittig wirkend, ersetzt werden, Bild 10.8b.

$$\curvearrowright B) \quad -F_A \cdot l + q \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{l}{3} = 0 \rightarrow F_A = \frac{2}{9}ql$$

$$\curvearrowright A) \quad F_B \cdot l - q \cdot \frac{2}{3}l \cdot \frac{2}{3}l = 0 \rightarrow F_B = \frac{4}{9}ql$$

 F_Q -Diagramm, Bild 10.8c

Wir beginnen wieder am linken Ende mit der Lagerreaktion \bar{F}_A . Bei C beginnt die Querkraft linear abzunehmen. Den zweiten Punkt auf dieser Geraden erhalten wir bei B: Hier muss die Lagerreaktion \bar{F}_B auf null zurückführen.

Der Nulldurchgang folgt aus dem Streckenverhältnis:

$$\frac{a}{\frac{2}{3}l - a} = \frac{F_A}{F_B} = \frac{1}{2} \rightarrow 2a = \frac{2}{3}l - a \rightarrow a = \frac{2}{9}l$$

 M_b -Diagramm, Bild 10.8d

An den Balkenenden ist M_b null. Weitere Werte berechnen wir mit Hilfe der F_Q -Fläche.

Moment bei C:

$$M_b = \frac{2}{9}ql \cdot \frac{l}{3} = \frac{2}{27}ql^2$$

Moment bei D (maximales Moment, wegen $F_Q = 0$):

$$M_{b\max} = \frac{2}{27}ql^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9}ql \cdot a = \frac{2}{27}ql^2 + \frac{ql}{9} \cdot \frac{2}{9}l$$

$$M_{b\max} = \frac{8}{81}ql^2$$

Weil die F_Q -Fläche insgesamt null ist, kommen wir zum selben Ergebnis auch vom rechten Balkenende her; nur das Vorzeichen müssen wir umpolen:

$$M_{bl} + M_{br} = 0 \rightarrow M_{br} = -M_{bl}$$

Konkret für dieses Beispiel heißt das:

$$M_{br} = \frac{1}{2} \cdot (-F_B) \cdot \left(\frac{2}{3}l - a \right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}ql \left(\frac{2}{3}l - \frac{2}{9}l \right)$$

$$M_{br} = -\frac{8}{81}ql^2$$

Mit den M_b -Werten bei C , D und B lässt sich die quadratische Parabel zeichnen. Der Übergang bei C von der Geraden in die Parabel ist knickfrei.

Beispiel 10.3

Bild 10.9a gibt einen Balken mit Dreieck-Streckenlast wieder. Dreht man das Bild um 90° , sodass die Spitze nach oben zeigt, stellt es z. B. die Belastung eines Schleusentores oder einer Staumauer infolge Wasserdrucks dar.

Es sind wieder das F_Q - und M_b -Diagramm zu zeichnen (l und q_0 sind gegeben).

Lösung:

Lagerreaktionen, Bild 10.9b

Die Resultierende der Streckenlast beträgt

$$F_R = \frac{1}{2} \cdot q_0 \cdot l.$$

Sie wirkt im Schwerpunkt des Dreiecks, also im Abstand $l/3$ von B .

$$\curvearrowright B) \quad -F_A \cdot l + \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = \frac{q_0 \cdot l}{6}$$

$$\curvearrowleft A) \quad F_B \cdot l - \frac{q_0 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = 0 \quad \rightarrow \quad F_B = \frac{q_0 \cdot l}{3} = 2F_A$$

Schnittgrößen

Wir berechnen die Schnittgrößen mit (10.2), ausgehend von

$$q = q(x) = \frac{q_0}{l} \cdot x \quad (\text{Gerade, Bild 10.9c}).$$

$$F_Q = -\int q \cdot dx + C = -\int \frac{q_0}{l} \cdot x \cdot dx + C = -\frac{q_0 \cdot x^2}{2l} + C$$

Bei $x = 0$ fängt F_Q mit $F_A = q_0 \cdot l/6$ an. Diese Information setzen wir in die Gleichung für F_Q ein und erhalten

$$C = F_A = \frac{q_0 \cdot l}{6}.$$

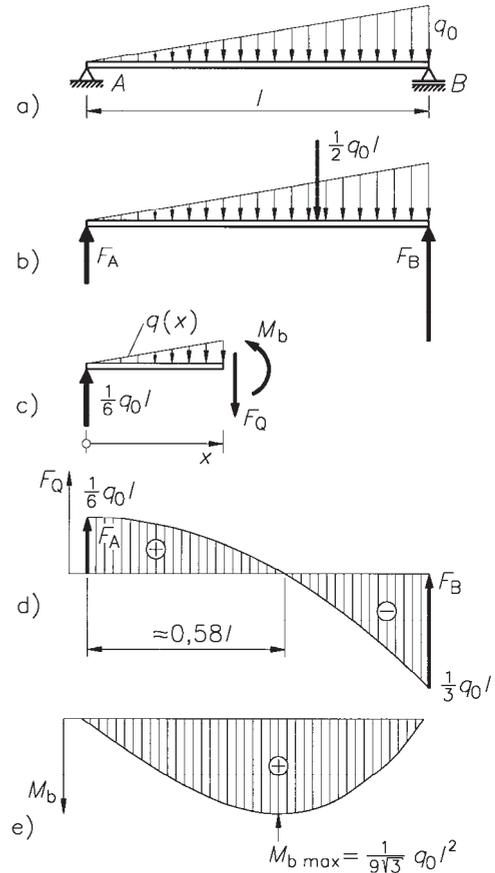


Bild 10.9 Balken aus Beispiel 10.3

- a) Anordnung
- b) Balken mit Lagerreaktionen und resultierender Streckenlast
- c) Schnitt bei x
- d) F_Q -Diagramm
- e) M_b -Diagramm

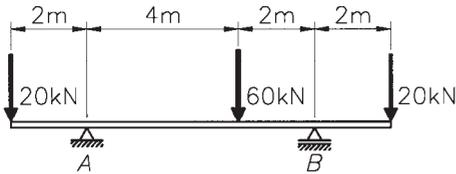


Bild 10.10 Träger aus Übung 10.1

Somit lautet der F_Q -Verlauf zwischen den Lagern:

$$F_Q = \frac{q_0 \cdot l}{6} - \frac{q_0}{2l} \cdot x^2 = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{quadratische Parabel, Bild 10.9d})$$

Am rechten Ende führt die Lagerreaktion \vec{F}_B wieder auf null zurück.

Der Nulldurchgang liegt bei

$$1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,58l$$

M_b -Verlauf:

$$M_b = \int_{x=0}^x F_Q \cdot dx = \frac{q_0 \cdot l}{6} \int_{x=0}^x \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] dx$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \left[x - l \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \Big|_0^x$$

$$M_b = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot x \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{kubische Parabel, Bild 10.9e})$$

$$M_{b \max} = M_b \left(x = \frac{l}{\sqrt{3}} \right) = \frac{q_0 \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{3} \right] = \frac{q_0 \cdot l^2}{9\sqrt{3}}$$

Übung 10.1

Zeichnen Sie für den Träger gemäß Bild 10.10 das F_Q - und M_b -Diagramm.

Übung 10.2

Bestimmen Sie für den Träger gemäß Bild 10.11:

1. das F_Q -Diagramm
2. die Biegemomente in den Nulldurchgängen von F_Q sowie das Betragmaximum von M_b .

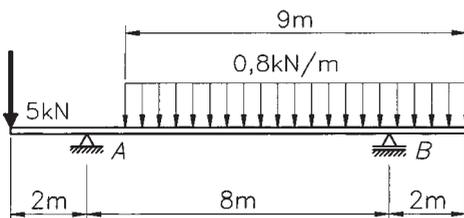


Bild 10.11 Träger aus Übung 10.2

10.2 Der eingespannte Balken

Die Unterschiede zum Balken auf zwei Stützen werden am folgenden Zahlenbeispiel deutlich.

Beispiel 10.4

Für den Balken in Bild 10.12a wollen wir das F_Q - und M_b -Diagramm erstellen. An der Vorzeichendefinition ändert sich gegenüber dem Balken auf zwei Stützen nichts, Bild 10.12b.

Lösung:

Wir fangen am freien Ende an, dann erübrigt sich die Berechnung der Lagerreaktionen. Diese ergeben sich vielmehr automatisch im F_Q - und M_b -Diagramm.

Das F_Q -Diagramm entsteht wie bisher durch das Aneinanderhängen der Kräfte, Bild 10.12c. An der Einspannung A führt die Lagerreaktion F_A wieder auf null zurück.

Das M_b -Diagramm in Bild 10.12d ergibt sich über die F_Q -Fläche oder mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am linken abgeschnittenen Balkenteil. Prüfen Sie die Zahlenwerte zur Übung nach.

Es fällt auf:

Beim eingespannten Balken sind positive und negative F_Q -Fläche im Allgemeinen nicht gleich groß. Dementsprechend ist M_b am eingespannten Balkenende im Allgemeinen nicht null, sondern gleich dem Einspannmoment.

Die bisher behandelten Standardfälle und viele weitere finden Sie im Anhang A3.1.

Statisch unbestimmte Fälle sind in A14.2 aufgelistet.

10.3 GERBER-Träger

Die analytische Lösung läuft wie bisher ab. Beim M_b -Verlauf ist darauf zu achten, dass die Momente in den Gelenken null sind.

Beispiel 10.5

Für den Träger gemäß Bild 10.13a zeichne man das F_Q - und M_b -Diagramm. Zahlenwerte: $F_1 = 1$ kN; $F_2 = 2$ kN; $F_3 = 3$ kN; $F_4 = 2$ kN.

Lösung:

Als Erstes benötigen wir die Lagerreaktionen gemäß Bild 10.13b. Hierzu Kap. 7.3. Die Gelenkkräfte brauchen wir nicht zu bestimmen; sie können direkt aus dem F_Q -Diagramm herausgelesen werden.

Wir schneiden den linken Teil bei G_1 ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\curvearrowleft -F_A \cdot 3 \text{ m} + F_1 \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \quad \rightarrow \quad F_A = \frac{F_1 \cdot 1,5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 0,5 \text{ kN}$$

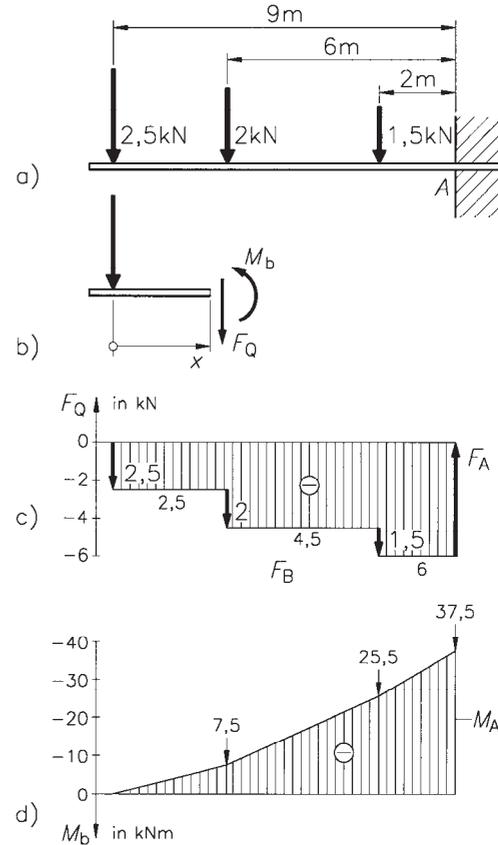


Bild 10.12 Eingespannter Balken, Beispiel 10.4

- Anordnung
- Definition von x -Achse und Schnittgrößen
- F_Q -Diagramm
- M_b -Diagramm

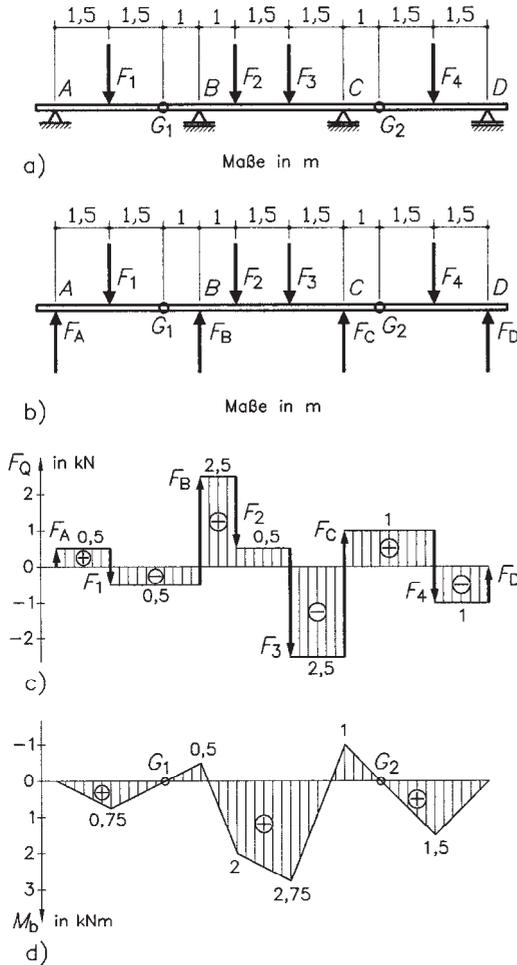


Bild 10.13 GERBER-Träger aus Beispiel 10.5

- Anordnung
- freigemacht
- F_Q -Diagramm
- M_b -Diagramm

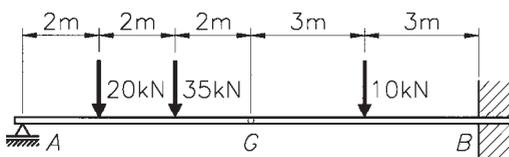


Bild 10.14 GERBER-Träger mit Einspannung, Übung 10.3

Jetzt schneiden wir den rechten Teil bei G_2 ab und setzen ihn ins Gleichgewicht:

$$\curvearrowleft_{G_2} \quad F_D \cdot 3 \text{ m} - F_4 \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \rightarrow F_D = \frac{F_4 \cdot 1,5 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 1 \text{ kN}$$

Im dritten Schritt wenden wir die Gleichgewichtsbedingungen auf den kompletten Träger an:



$$(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6,5 - F_B \cdot 4 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 2,5 + F_D \cdot 4) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_B = \frac{1}{4}(-F_A \cdot 8 + F_1 \cdot 6,5 + F_2 \cdot 3 + F_3 \cdot 1,5 - F_4 \cdot 2,5 + F_D \cdot 4) = 3 \text{ kN}$$



$$(-F_A \cdot 4 + F_1 \cdot 2,5 - F_2 \cdot 1 - F_3 \cdot 2,5 + F_C \cdot 4 - F_4 \cdot 6,5 + F_D \cdot 8) \text{ m} = 0$$

$$\rightarrow F_C = \frac{1}{4}(F_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2,5 + F_2 \cdot 1 + F_3 \cdot 2,5 + F_4 \cdot 6,5 - F_D \cdot 8) = 3,5 \text{ kN}$$

$$\text{Kontrolle: } \uparrow (0,5 - 1 + 3 - 2 - 3 + 3,5 - 2 + 1) \text{ kN} = 0$$

Im F_Q -Diagramm hängen wir in gewohnter Weise die Pfeile aneinander, Bild 10.13 c. Die Gelenkkräfte entnehmen wir zu $F_{G1} = 0,5 \text{ kN}$ und $F_{G2} = 1 \text{ kN}$.

Das M_b -Diagramm, Bild 10.13 d, ergibt sich am einfachsten dadurch, dass wir die F_Q -Flächen vom linken Ende bis zur jeweiligen Kraft berechnen und die Stützpunkte geradlinig verbinden. Prüfen Sie die Zahlenwerte nach.

Wir halten fest:

- An den Gelenken sind die Momente null.
- Die Gelenkkräfte ergeben sich unmittelbar aus dem F_Q -Diagramm.

Übung 10.3

Bestimmen Sie für den GERBER-Träger mit Einspannung, Bild 10.14:

- Lagerreaktion \vec{F}_A
- F_Q -Diagramm
- M_b -Diagramm
- Lagerreaktionen in der Einspannung (\vec{F}_B und \vec{M}_B) sowie die Kraft im Gelenk G

10.4 Bogenträger

Bild 10.15 zeigt als einfachsten Fall den Kreisbogenträger mit symmetrischer Einzelkraft. Der prinzipielle Lösungsweg bleibt auch bei komplizierteren Fällen derselbe.

Bei Kreisbogenträgern eignet sich als Koordinate der Winkel φ . Die Schnittgrößen hängen dann von φ ab.