



9. Quadrate im Quadrat (Entdeckungen am perfekten Quadrat)

Zeitbedarf

45–90 Minuten

Voraussetzungen

Die S. kennen Quadratzahlen und den Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen und der zeichnerischen Darstellung als Quadrat.

Kompetenzen

- S. parkettieren ein Quadrat mit verschiedenen kleineren Quadraten.
- S. erkennen Zusammenhänge zwischen den Seitenlängen und Flächen der einzelnen Quadrate.
- S. nähern sich dem perfekten Quadrat an.

Differenzierung

Die Aufgabe an sich ist differenzierend. Zudem kann als Hilfestellung ein quadratisches Raster mit der Seitenlänge 23 cm vorgegeben werden. An diesem können sich die S. orientieren. Zuletzt kann der L. noch die Lage der Quadrate mit 1 cm Seitenlänge bekannt geben, dann wird die Lösung einfach.

Vorbereitung

- das zerlegbare Quadrat (**M 1**) vergrößert auf festes Papier kopieren, evtl. farbig ausgestalten und zerschneiden
- Arbeitsblatt (**M 2**) in ausreichender Zahl auf festes Papier kopieren
- ein quadratisches Raster mit der Seitenlänge 23 cm und einer 1 cm-Unterteilung gestalten und in ausreichender Zahl kopieren
- bei Bedarf: Arbeitsaufträge (**M 3**) kopieren und auseinanderschneiden
- bei Bedarf: Material für **M 3** bereitlegen: buntes Papier, Scheren und Klebstoff
- bei Bedarf: Vorlage zum perfekten Quadrat (**M 4**) kopieren

Ablauf

Motivation / Themenfindung

- L. hängt einzelne Quadrate (**M 1**) ungeordnet an die Tafel.

- S. äußern sich dazu.
- L. schreibt die Seitenlängen der einzelnen Quadrate an die Quadrate und fragt nach den jeweiligen Flächeninhalten.
- L. schreibt an die Seitentafel passend zu den ausgewählten Quadraten:
 $(1 \text{ cm})^2 = 1 \text{ cm}^2$
 $(2 \text{ cm})^2 = 2 \text{ cm}^2$
 $(4 \text{ cm})^2 = 16 \text{ cm}^2$
 $(7 \text{ cm})^2 = 49 \text{ cm}^2$
 $(12 \text{ cm})^2 = 144 \text{ cm}^2$
- L. ordnet die Quadrate an der Tafel enger zusammen, sodass sie eine zusammenhängende Fläche bilden.
- S. äußern sich erneut.

Arbeitsauftrag

L. erklärt: „Eure Aufgabe ist es, aus diesen einzelnen Quadraten ein großes Quadrat ohne Lücken zu gestalten. Dazu bearbeitet ihr einzeln das Arbeitsblatt.“

Erarbeitung

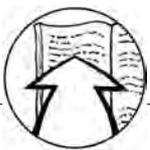
- L. teilt das Arbeitsblatt (**M 2**) aus.
- S. bearbeiten das Arbeitsblatt in Einzelarbeit.
- L. steht dabei beratend zur Verfügung.
- Sobald ein S. herausgefunden hat, wie groß das große Quadrat sein muss, erhält er das vorbereitete Raster mit der Seitenlänge 23 cm. Als zusätzliche Hilfestellung können die Positionen der Quadrate mit 1 cm Seitenlänge bekannt gegeben werden.

Präsentation der Ergebnisse

- S. erläutern ihre Lösungsansätze und erklären, wie weit sie gekommen sind und was ihnen aufgefallen ist.
- Der Weg, um von der Fläche der einzelnen Quadrate zur Seitenlänge des großen Quadrats zu kommen, wird nochmals erläutert.
- L. hält evtl. Stichwörter an der Tafel fest.
- L. stellt nochmals den Bezug zwischen Seitenlänge und Fläche der einzelnen Quadrate in Zusammenhang mit dem großen Quadrat dar.

Abschluss

- Sollten S. tatsächlich zur Lösung gekommen sein, dürfen sie die großen Quadrate an der Tafel korrekt anordnen.



- Ansonsten wird das Quadrat nach Vorlage (M1) angefertigt.

Ausblick

- L. gibt den Hinweis auf das perfekte Quadrat und die hierfür notwendigen Bedingungen.
- Die S. gestalten gemeinsam das kleinstmögliche perfekte Quadrat. Dazu erhalten 21 freiwillige S. je einen oder auch mehrere Arbeitsaufträge der Vorlage (M3). Die Auswahl des Papiers bleibt den S. überlassen. So werden hoffentlich viele unter-

schiedliche Papiere (für größere Quadrate z.B. auch Geschenkpapier) verwendet und es entsteht ein farbenfrohes Kunstwerk. Am nächsten Tag werden die Quadrate dann nach Vorlage (M4) an der Wand angeordnet und aufgeklebt.



Lösungen

M2

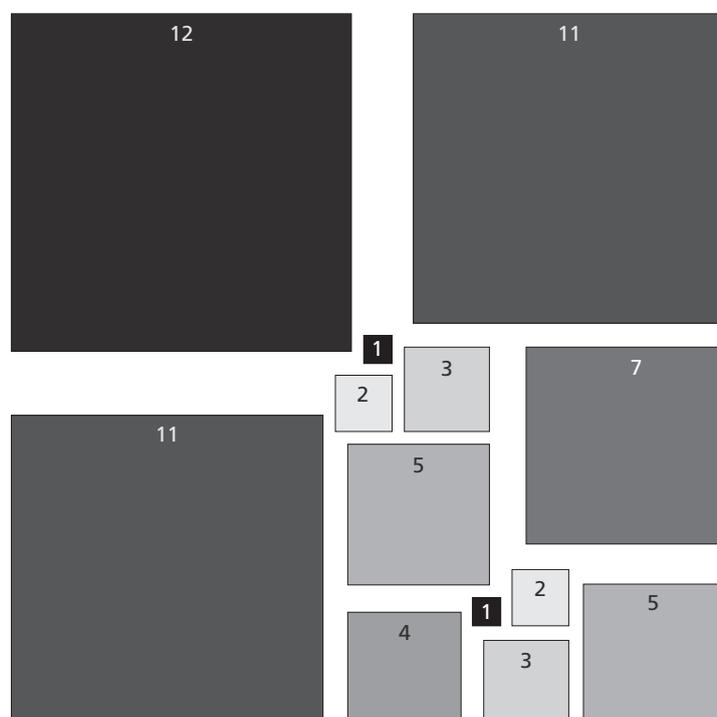
Um von den einzelnen Quadraten auf die Seitenlänge des großen Quadrats zu kommen, können die Quadratflächen der einzelnen Quadrate addiert werden.

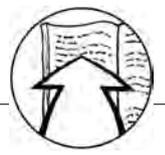
$$(12\text{ cm})^2 + (11\text{ cm})^2 + (11\text{ cm})^2 + (7\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 + (5\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 + (3\text{ cm})^2 + (2\text{ cm})^2 + (2\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2 + (1\text{ cm})^2 = 529\text{ cm}^2$$

Anschließend muss die Wurzel gezogen werden.

$$\sqrt{529\text{ cm}^2} = 23\text{ cm}$$

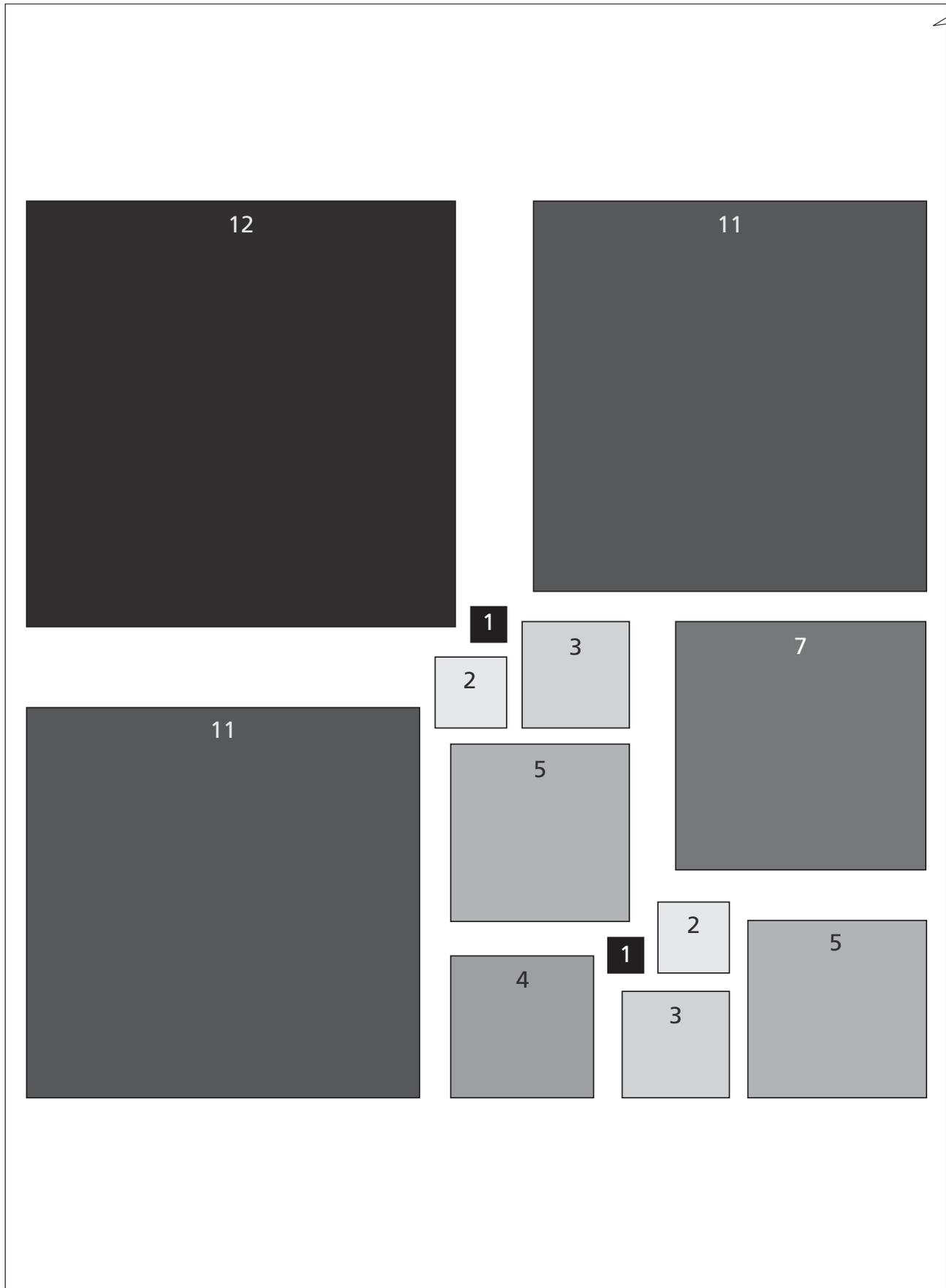
So kann man errechnen, welche Seitenlängen das große Quadrat hat.





Das zerlegbare Quadrat

M1





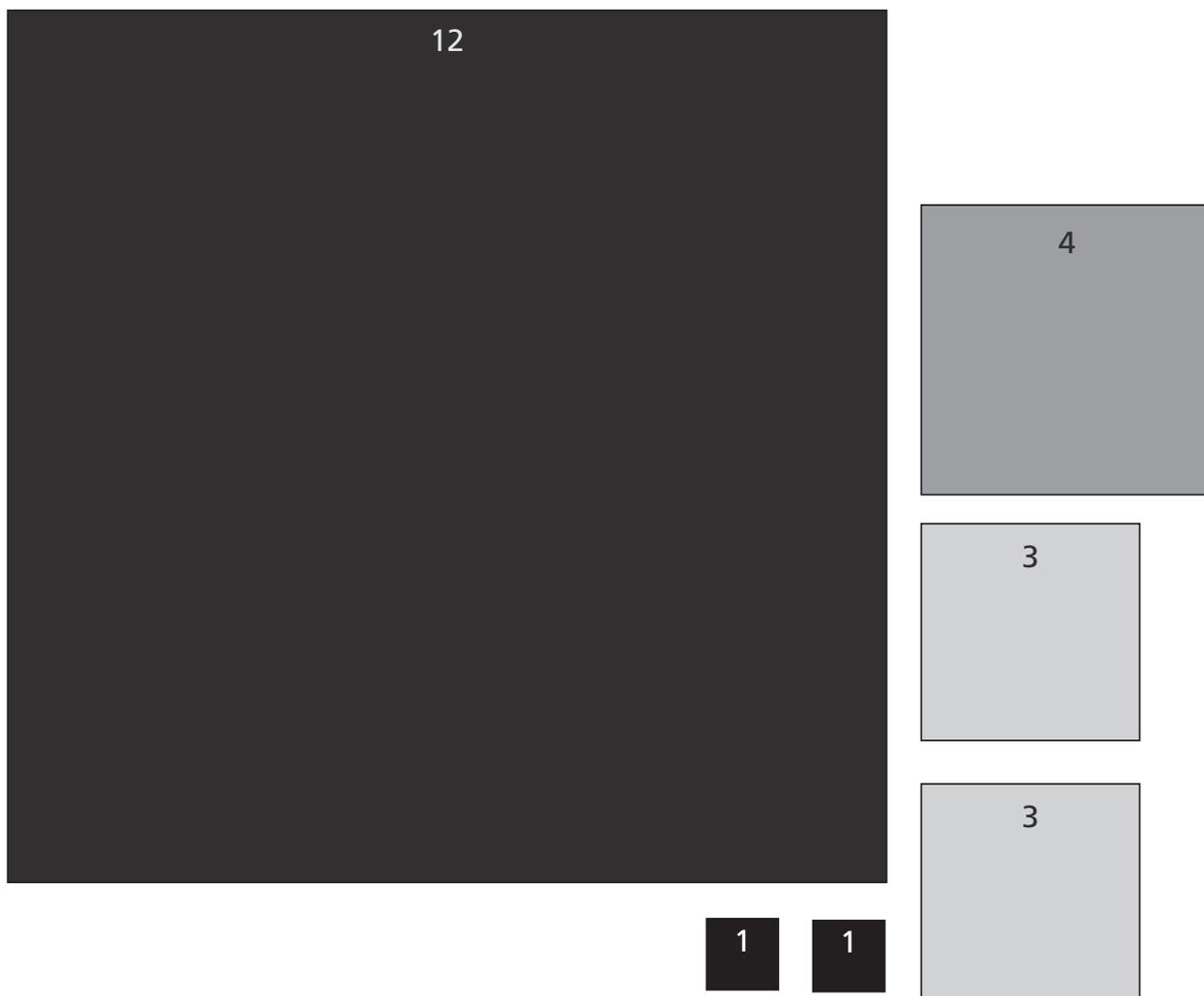
Quadrate im Quadrat

M2



Arbeitsauftrag

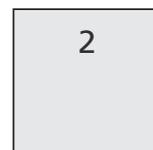
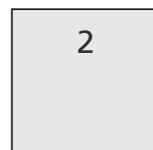
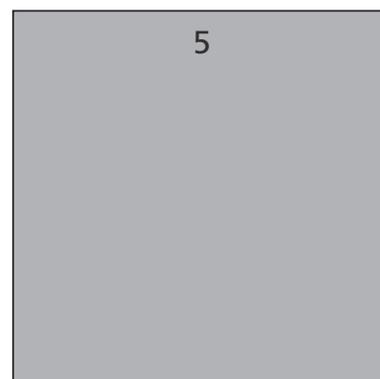
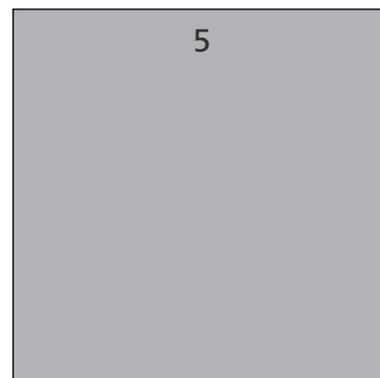
1. Schneide die einzelnen Quadrate sorgfältig aus.
2. Ordne die einzelnen Quadrate so an, dass sie zusammen ein neues Quadrat ergeben. Dabei dürfen keine Lücken bleiben.
3. Wenn du eine Lösung gefunden hast, klebe deine Quadrate zu dem großen Quadrat zusammen.
4. Was fällt dir auf? Wo gab es Probleme? Wann konntest du nicht alle Quadrate aufkleben? Schreibe auf:

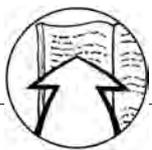




Quadrate im Quadrat

M2





Das perfekte Quadrat

Zum Auseinanderschneiden und Verteilen an einzelne Schüler:

M3



Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
2 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
4 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
6 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
7 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
8 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
9 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
11 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
15 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
16 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
17 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
18 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
19 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
24 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
25 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
27 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
29 cm.

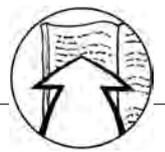
Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
33 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
35 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
37 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
42 cm.

Gestalte aus festem
Papier ein Quadrat
mit der Seitenlänge
50 cm.



Das kleinstmögliche perfekte Quadrat

M4

Infotext

Bei einem perfekten Quadrat darf kein Quadrat mehrmals verwendet werden. Im Jahr 1962 bewies der niederländische Mathematiker A. J. W. Duijvestijn, dass man für eine perfekte Quadraterlegung mindestens 21 Teile benötigt. 16 Jahre später, im Jahr 1978, gelang es ihm, ein perfektes Quadrat zu finden und zu beweisen, dass es das einzige dieser Größe ist. Er hatte also das kleinste perfekte Quadrat gefunden. 1992 veröffentlichte Duijvestijn das vollständige Sortiment der insgesamt 207 perfekten Quadrate mit 21 bis 25 einzelnen Quadraten.

Das kleinstmögliche perfekte Quadrat

