Kutschera / Breitkopf
Einführung in die moderne Logik

ALBER STUDIENBUCH

Über dieses Buch:
Diese elementare Einführung in die Logik ist in erster Linie für Studenten der Philosophie und der Geisteswissenschaften gedacht. Formalisierungsprozesse werden daher ausführlich erläutert und Sachverhalte von eher technischem Interesse beiseite gelassen. Behandelt werden Aussagenlogik, elementare Prädikatenlogik, Identität und Kennzeichnungen. In zwei ergänzenden Kapiteln werden die Prinzipien des Definierens und Grundbegriffe der Mengenlehre kurz angesprochen. Zahlreiche Aufgaben (mit Lösungen) erleichtern das Einüben des Stoffes.

This book is an elementary introduction to logic, primarily addressed to students of philosophy and the humanities. For this reason the main focus of the book is on formalization methods rather than advanced technical aspects of modern logic. The topics include propositional logic, elementary predicate logic, identity, and description terms. In two complementary chapters fundamental notions from the theory of definition and from naive set theory are explained. Numerous exercises, with solutions, allow students to practice the presented material.

Die Autoren:
Prof. Dr. Franz von Kutschera, Universität Regensburg, verfaßte u.a.: »Platons Philosophie« (2002), »Philosophie des Geistes« (2009).
Dr. Alfred Breitkopf leitete im Bayerischen Fernsehen die Redaktion Naturwissenschaften und Technik.

Franz von Kutschera /
Alfred Breitkopf

Einführung in die moderne Logik

9., neu bearbeitete Auflage

Bearbeitet von Stefan Wölfl

Verlag Karl Alber Freiburg / München

9., neu bearbeitete Auflage 2014

Druckvorlage: Stefan Wölfl

Gedruckt auf alterungsbeständigem Papier (säurefrei)
Printed on acid-free paper

Einband gesetzt in der Rotis SemiSerif von Otl Aicher
Druck und Bindung: Difo-Druck, Bamberg
ISBN 978-3-495-48271-1

Vorwort

Dieses Buch ist aus einem Fernsehkolleg hervorgegangen, das ich 1970 für das Studienprogramm des Bayerischen Rundfunks gehalten habe. Dr. Alfred Breitkopf hat das Manuskript der Vorträge für die Buchveröffentlichung überarbeitet und mit vielen zusätzlichen Beispielen und Übungsaufgaben versehen. Nachdem in der 4. Auflage das Kapitel 15 über elementare Begriffe und Prinzipien der Mengenlehre hinzugekommen war – als systematische Darstellung dessen, was schon in früheren Kapiteln intuitiv vorausgesetzt wird –, wurde das Buch für die 7. Auflage grundlegend überarbeitet. Dabei wurde im gesamten Text auf größere Übersichtlichkeit Wert gelegt und die logische Symbolik der heute üblichen angeglichen. Im Anschluss an den Beweis des Vollständigkeitstheorems für die Prädikatenlogik werden nun im Abschnitt 11.2 der Satz von Löwenheim und Skolem, der Kompaktheitssatz und ein Satz über die Äquivalenz von Interpretations- und Bewertungssemantik angegeben. Der Beth'sche Kalkül der semantischen Tafeln ist jetzt durch eine einfachere Version ersetzt, die ich viele Jahren in meinen Vorlesungen verwendet habe. Dr. Stefan Wölfl erstellte für die 7. Auflage eine völlig neue Textvorlage, die sich durch eine wesentlich verbesserte Übersichtlichkeit auszeichnet, und hat diese für die nun vorliegende 8. Auflage nochmals überarbeitet und korrigiert. Auch viele andere Verbesserungen gehen auf ihn zurück. Für seine Mühe möchte ich ihm sehr herzlich danken.

Das Buch ist eine elementare Einführung in die Logik, die in erster Linie für Studenten der Philosophie und der Geisteswissenschaften gedacht ist. Es hat den Hörern meiner Vorlesungen als Begleitbuch gedient. Hauptziel dieser Vorlesungen und der sie begleitenden Übungen war, den Studenten die grundlegenden Hilfsmittel für logische Analysen von Urteilen und Schlüssen an die Hand zu geben und solche Analysen einzuüben.

Bei der Lektüre kann man die etwas schwierigeren Abschnitte, die mit einem Stern gekennzeichnet sind, zunächst überschlagen.

Franz von Kutschera

Inhaltsverzeichnis

1 Gegenstand und Bedeutung der Logik

Die Logik, die in der Form der traditionellen, aristotelischen Logik ein Teilgebiet der Philosophie war, ist heute eine selbständige wissenschaftliche Disziplin mit einem ausgedehnten Bereich gesicherter Erkenntnisse und vielen ungelösten Problemen.

1.1 Der Gegenstand der Logik

Bevor wir auf die Details dieser wissenschaftlichen Disziplin eingehen, stellen wir uns zunächst die Frage: Womit beschäftigt sich die Logik? Was ist ihr Gegenstand?

Die Worte „Logik“ und „logisch“ werden nicht nur in der Umgangssprache uneinheitlich gebraucht, sondern auch in der Wissenschaft: Man hat unter anderem erkenntnistheoretische, transzendental-philosophische, spekulativ-metaphysische, ästhetische und psychologische Untersuchungen der Logik zugeordnet. Demgegenüber wollen wir dem heute üblichen engeren Sinn des Wortes „Logik“ folgen und unter Logik die *formale Logik* verstehen. Was also ist der Gegenstand der formalen Logik?

In der philosophischen Tradition umfasst die formale Logik eine *Lehre vom Begriff*, eine *Lehre vom Urteil* und eine *Lehre vom Schluss*. Die Entwicklung einer Lehre vom Schließen setzt aber eine Analyse der Urteile schon voraus, denn ein Schluss ist ein Schluss von gewissen Urteilen auf ein anderes Urteil. Und da die Urteile mit Begriffen gebildet werden, muss einer Analyse der Urteile eine Analyse der Begriffe vorausgehen. Wir können die formale Logik deshalb einfach als Theorie des Schließens kennzeichnen:

> *Die Logik, als formale Logik, ist eine Theorie des Schließens.*

Wir haben damit die Frage nach dem Gegenstand der Logik zurückgeführt auf die Frage, was ein logischer Schluss ist.

Ein Beispiel eines einfachen Schlusses stellt folgende Figur dar:

$$
\begin{array}{ll}
(P_1) & \text{Alle Logiker sind musikalisch.} \\
(P_2) & \text{Heinrich ist ein Logiker.} \\
\hline
(K) & \text{Heinrich ist musikalisch.}
\end{array}
$$

Wir lesen diese Figur so: Wenn alle Logiker musikalisch sind und wenn Heinrich ein Logiker ist, so ist Heinrich musikalisch. Hier wird aus den beiden Sätzen P_1 und P_2 auf den Satz K geschlossen. Die Sätze eines Schlusses, *aus* denen wir schließen – in unserem Fall die Sätze P_1 und P_2 – nennen wir *Prämissen* des Schlusses, den Satz, *auf* den wir schließen – in unserem Fall der Satz K – nennen wir *Konklusion* des Schlusses. Jeder Schluss enthält eine oder mehrere Prämissen und eine Konklusion.

Ein Schluss ist *gültig*, wenn unter der Voraussetzung, dass alle Prämissen wahr sind, auch die Konklusion wahr ist. Wenn wir behaupten, ein Schluss sei gültig, so behaupten wir weder, dass die Prämissen wahr sind, noch, dass die Konklusion wahr ist; wir behaupten vielmehr nur, dass die Konklusion wahr ist, falls alle Prämissen wahr sind. Die Konklusion eines gültigen Schlusses kann also durchaus auch falsch sein; dann ist aber auch mindestens eine Prämisse falsch. Wenn z. B. die Konklusion unseres Schlusses – der Satz „Heinrich ist musikalisch“ – falsch ist, so sind dann eben nicht alle Logiker musikalisch; und wenn alle Logiker musikalisch sind, so kann Heinrich kein Logiker sein.

Die Logik heißt nun *formal*, weil sie sich nicht für beliebige Figuren der Art

$$
\begin{array}{cc}
(P_1) & \dots \\
\vdots & \vdots \\
(P_n) & \dots \\
\hline
(K) & \dots
\end{array}
$$

interessiert, für die gilt, dass, falls alle Prämissen P_1 bis P_n wahr sind, auch die Konklusion K ein wahrer Satz ist. Die formale Logik interessiert sich vielmehr nur für solche Schlüsse, die auch dann gültig bleiben, wenn man die in ihnen vorkommenden nichtgrammatikalischen Wörter durch andere Wörter ersetzt. Wir erhalten z. B. aus unserem

Schluss wieder einen gültigen Schluss, wenn wir das Wort „Logiker" ersetzen durch „Mensch", „musikalisch" durch „sterblich" und „Heinrich" durch „Sokrates". Wir erhalten dann den Schluss:

(P_1)	Alle Menschen sind sterblich.
(P_2)	Sokrates ist ein Mensch.
(K)	Sokrates ist sterblich.

Entsprechendes gilt für beliebige andere Ersetzungen. Wir können deshalb in unserem Schlussbeispiel statt der Wörter „Logiker", „musikalisch" und „Heinrich" die Buchstaben S, P und a setzen, die beliebige Substantive, Adjektive und Namen vertreten. Wir erhalten dann die Schlussfigur:

(P_1)	Alle S sind P.
(P_2)	a ist ein S.
(K)	a ist ein P.

Aus dieser Figur entsteht ein gültiger Schluss, unabhängig davon, welche Substantive, Adjektive und Namen man für S, P und a einsetzt. Die Gültigkeit dieser Schlüsse beruht also nicht auf besonderen Bedingungen, die für Logiker und deren Musikalität oder für Menschen und deren Sterblichkeit gelten, sondern sie beruht auf einem abstrakten Verhältnis zwischen Begriffen: Wenn alle Objekte einer Art S eine Eigenschaft P haben, muss auch jedes einzelne Objekt a der Art S die Eigenschaft P haben.

Solche Schlüsse, die gültig sind aufgrund abstrakter begrifflicher Beziehungen, nicht aber nur aufgrund der besonderen sachbezogenen Bedingungen, die für die Gegenstände gelten, auf die sich die Prämissen und die Konklusion beziehen, nennt man auch *formal gültig*. Wir können deshalb unsere Kennzeichnung der formalen Logik präzisieren:

> *Die formale Logik ist die Theorie der formal gültigen Schlüsse.*

1.2 Die Bedeutung der Logik

Wozu beschäftigt man sich mit formaler Logik? Worin liegt ihr Nutzen? Ist die Beschäftigung mit der Logik nicht nur ein spezielles und etwas esoterisches Hobby, das kein allgemeineres Interesse für sich beanspruchen kann als z. B. das Briefmarkensammeln oder das Lösen von Kreuzworträtseln?

Für diejenigen Wissenschaftler, die sich hauptsächlich oder ausschließlich mit Logik befassen, ist natürlich das immanente Interesse an der Logik ausschlaggebend, ebenso wie für den Physiker das immanente Interesse an der Physik leitend ist und nicht der Gesichtspunkt ihrer möglichen technischen Anwendung. Die elementare Logik ist darüber hinaus für die Wissenschaft von allgemeinem Interesse. Deshalb gehört die Logik zur wissenschaftlichen Propädeutik, d. h. zu den Themen, mit denen jeder Student und Wissenschaftler sich, systematisch gesehen, beschäftigen sollte, bevor er sich den speziellen Problemen seines Fachs zuwendet, weil diese Themen für jegliche Art wissenschaftlicher Untersuchung grundlegend sind.

Ganz allgemein charakterisiert ist die Logik die Schule des korrekten, klaren und folgerichtigen Denkens. Da aber wissenschaftliches Denken zumindest ein in dieser Weise qualifiziertes Denken sein muss, sollte jeder Wissenschaftler diese Schule einmal besuchen. Diese Schule wird aber tatsächlich nur wenig besucht, weil sich zum einen viele Menschen für denkerische Naturbegabungen halten und weil zum andern die wissenschaftlichen Begriffs- und Theorienbildungen vielfach noch so einfach sind, dass man sie mit einer gesunden logischen Intuition durchaus meistern kann.

Grundsätzlich ist aber zu sagen, dass das korrekte, klare und folgerichtige Denken eine durchaus anspruchsvolle und keineswegs immer leichte Tätigkeit ist, die man ohne gründliche Ausbildung nicht ausreichend beherrschen kann. Wenn man z. B. bemerkt, dass in der Umgangssprache das Wort „denken“ von vielen nur im Sinne von „fälschlich vermuten“ gebraucht wird, so wird einem klar, dass man mit dieser Art naturwüchsigen Denkens in den Wissenschaften kaum viel ausrichten kann. Uns allen ist geläufig, dass man gehen, sprechen, essen und Fußball spielen lernen muss, warum also ausgerechnet das Denken nicht?

Versuchen Sie z. B. die Verneinung des einfachen Satzes „Es ist nicht alles Gold, was glänzt“ zu bilden. Welcher der folgenden Sätze ist die Verneinung?

- Einiges Gold glänzt nicht.
- Einiges, was glänzt, ist nicht Gold.
- Alles, was glänzt, ist Gold.
- Alles Gold glänzt nicht.

Oder versuchen Sie festzustellen, ob der folgende Schluss gültig ist:

> Wenn Friedrich nicht zu den Tätern gehört, wenn alle am Tatort anwesenden Amtspersonen Täter oder über achtzig Jahre alt waren und keine Amtsperson über achtzig Jahre alt ist und wenn Friedrich eine Amtsperson ist, so war Friedrich nicht am Tatort anwesend.

Vielleicht wird Ihnen an solchen konkreten Fällen deutlich, dass eine Übung des logischen Denkens nicht überflüssig ist.

Aber abgesehen von der allgemeinen Charakterisierung als Schule des Denkens, ist die Logik auch aus folgenden Gründen für alle Wissenschaften von Bedeutung: In den Wissenschaften spielen Argumentationen für oder gegen eine Behauptung eine wesentliche Rolle, und unter den wissenschaftlichen Argumenten kommt den Beweisen eine ausgezeichnete Rolle zu. Ein Beweis, denken Sie etwa an das Beispiel eines mathematischen Beweises, ist jedoch nichts anderes als eine Folge von Schlüssen, deren erste Prämissen bereits bewiesene Sätze sind und deren letzte Konklusion die zu beweisende Behauptung darstellt. Damit ein Beweis akzeptiert wird, fordert man im allgemeinen nur, dass jeder Schritt des Beweises, jeder einzelne Schluss, als richtig einleuchte. Dieses „Einleuchten“ ist jedoch kein unproblematisches Kriterium, denn es hat schon manchem etwas eingeleuchtet, was sich später als falsch erwiesen hat. Will man den Beweisen größtmögliche Strenge sichern und sie einer genauen Kontrolle zugänglich machen, wird man sich auf eine Theorie des Beweisens, d. h. aber eine Theorie des Schließens stützen, man wird deshalb die Logik zu Rate ziehen müssen.

Ferner spielen in allen Wissenschaften Definitionen eine wesentliche Rolle. Damit die definierten Begriffe vernünftig gebildet und ausreichend bestimmt sind, müssen die Definitionen gewissen Bedingungen genügen, die man in der Definitionslehre untersucht. Die Definitionslehre gehört aber als Teil der Lehre vom Begriff zur Logik.

Darüber hinaus wäre auch hinzuweisen auf die Bedeutung der Logik für die mathematische Grundlagenforschung, auf ihre Rolle bei der Entwicklung von Computern, auf ihren Einfluss auf die moderne Sprachwissenschaft usw.

Wir wollen uns mit diesen Hinweisen auf den Gegenstand und die Bedeutung der Logik begnügen. Eine genauere Charakterisierung ist erst nach der Entwicklung der elementaren Theorien der Logik möglich.

Zum Schluss dieser Einleitung müssen wir noch rechtfertigen, warum wir von „moderner" Logik sprechen. Versteht es sich nicht von selbst, dass eine Einführung in die Logik sich nicht auf antiquierte und überholte Formen bezieht, sondern auf ihre moderne Gestalt? Der Zusatz ist tatsächlich nur historisch zu erklären: Die Logik als wissenschaftliche Disziplin ist von ARISTOTELES begründet worden. Diese Begründung war eine so geniale Tat, dass ihr in den folgenden 2000 Jahren nichts Wesentliches hinzugefügt werden konnte. Noch IMMANUEL KANT hat behauptet, dass die Logik seit Aristoteles keinen Schritt vor noch zurück habe tun können. Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts hat sich eine ganz neue Entwicklung in der Logik angebahnt, eingeleitet durch Arbeiten von GEORGE BOOLE (1815-1864), AUGUSTUS DE MORGAN (1806-1871) und GOTTLOB FREGE (1848-1925).

Im Laufe dieser Entwicklung ist die moderne Logik über die aristotelische Logik ähnlich weit hinausgewachsen wie die moderne Mathematik über die Mathematik des PYTHAGORAS.

Diesen Fortschritt verdankt die Logik nicht zuletzt der Methode der *Formalisierung*, die wir im Folgenden noch kennenlernen werden. Diese Methode hatte zuvor schon die Mathematik mit großem Gewinn angewandt, und wegen dieser Ähnlichkeit der Methoden bezeichnet man die moderne Logik auch oft als *mathematische Logik* oder als *symbolische Logik*, denn die Formalisierung beruht auf der

Einführung künstlicher Symbole.

Diese Entwicklung hat aus der modernen Logik eine eigenständige wissenschaftliche Spezialdisziplin gemacht, die in mancher Hinsicht heute der Mathematik näher steht als der Philosophie, zu der sie früher gehörte. Und es gibt immer noch Versuche, neben die moderne oder mathematische Logik eine „philosophische“ Logik im Sinn der aristotelischen Logik zu stellen. Aber die Adjektive „philosophisch“ und „mathematisch“ bezeichnen dann nicht verschiedene wissenschaftliche Disziplinen mit verschiedenen Gegenstandsbereichen, sondern nur verschiedene Entwicklungsphasen derselben Logik; daher ist diese Terminologie recht überflüssig. Wir wollen also festhalten:

> *Die moderne, mathematische oder symbolische Logik ist die heutige Gestalt der von Aristoteles begründeten formalen Logik.*

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-1. Ersetzen Sie in dem Schluss

$$\begin{array}{ll} (P_1) & \text{Alle Menschen sind sterblich.} \\ (P_2) & \text{Alle Griechen sind Menschen.} \\ \hline (K) & \text{Alle Griechen sind sterblich.} \end{array}$$

die nicht grammatikalischen Wörter durch einen der Buchstaben M, P und S, so dass eine abstrakte Schlussfigur entsteht. Prüfen Sie, ob diese Figur formal gültig ist.

Aufgabe 1-2. Ermitteln Sie in den beiden folgenden Figuren jeweils eine Konklusion zu den angegebenen Prämissen, so dass ein gültiger Schluss entsteht:

$$\begin{array}{ll} (P_1) & \text{Alle } M \text{ sind } P. \\ (P_2) & \text{Einige } S \text{ sind } M. \\ \hline (K) & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (P_1) & \text{Alle } P \text{ sind nicht } M. \\ (P_2) & \text{Einige } S \text{ sind } M. \\ \hline (K) & \end{array}$$

Aufgabe 1-3. Geben Sie eine Prämisse P_1 so an, dass aus dem folgenden Schema eine gültige Schlussfigur entsteht:

$$\begin{array}{ll} (P_1) & \\ (P_2) & \text{Einige } S \text{ sind nicht } M. \\ \hline (K) & \text{Einige } S \text{ sind nicht } P. \end{array}$$