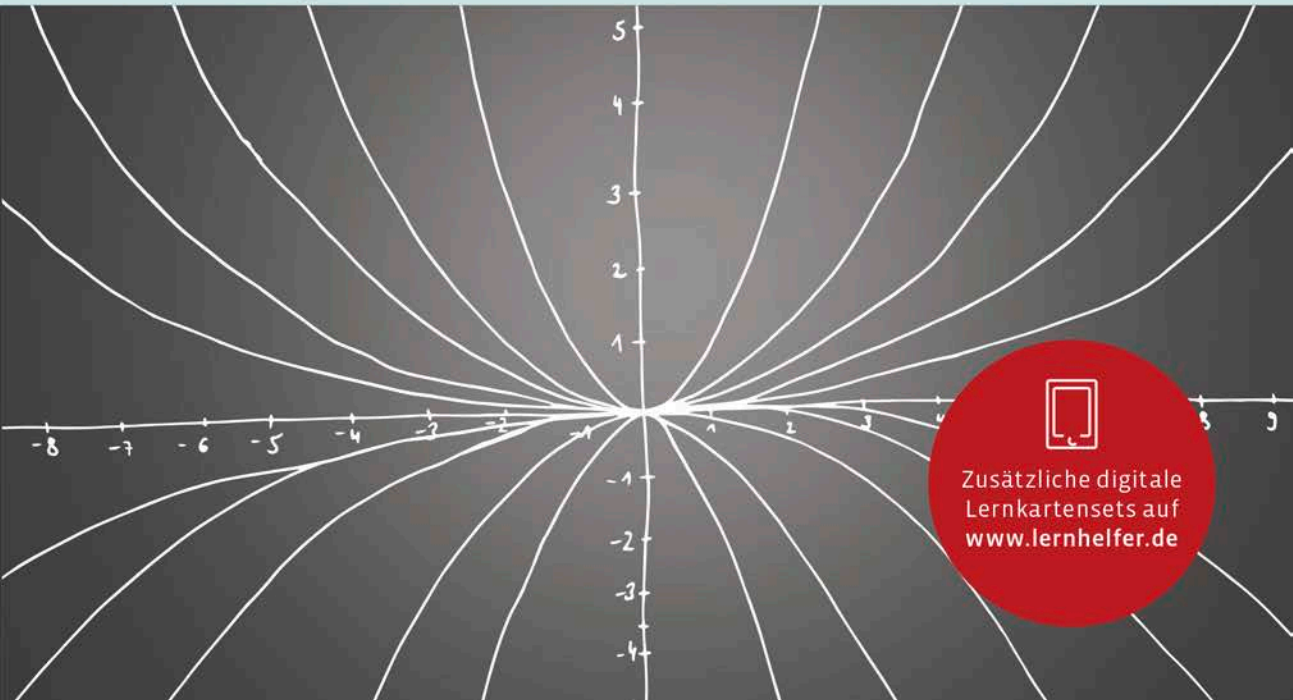
9. Klasse • Mathematik

DUDEN

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

9. Klasse
Mathematik

Dein Weg zu besseren Noten!



Schlaue Schnipsel

Wenn du „Pi mal Daumen" rechnest, machst du eine grobe Schätzung. π

Treffen sich zwei Geraden. Sagt die eine zur anderen: „Beim nächsten Mal gibst du einen aus."

Wie rechnen Milchmädchen?

Hast du schon einmal gehört, dass jemand eine Milchmädchenrechnung macht? Davon spricht man, wenn jemand etwas plant, dabei aber wichtige Umstände nicht berücksichtigt – bspw. bei der Planung eines Neubaus davon ausgeht, dass es den ganzen Winter keine Bauverzögerung durch Frost geben wird.
Die Redensart geht zurück auf eine Fabel, nach der eine Milchfrau einen Krug Milch auf dem Markt verkaufen will und auf dem Weg dahin hüpft – vor Vorfreude auf das, was sie mit dem verdienten Geld kaufen will. Bei dem Gehüpfe zerbricht der Krug jedoch und sie verschüttet die Milch. Sie hat in Gedanken also Geld ausgegeben, das sie noch nicht hatte und nun auch nicht mehr bekommen wird.

Was schätzt du, wie viel Wasser in den Ozeanen ist?

Etwa $1{,}4 \times 10^{21}$ Liter = 1 400 000 000 000 000 000 000 Liter

Was ist eigentlich eine Myriade?

Myriaden kennst du im Plural als Begriff für eine große Menge.
Aber 1 Myriade steht für 10 000.

Freunde …

gibt es nicht nur in Social Networks, sondern auch bei Zahlen. Zwei Zahlen sind befreundete Zahlen, wenn die Summe der Teiler der einen Zahl die jeweils andere Zahl ergibt.
220 und 284 sind die kleinsten Zahlen, die ein befreundetes Zahlenpaar bilden:
Teiler von 220 sind: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 und 110;
Summe = 284
Teiler von 284 sind: 1, 2, 4, 71 und 142; Summe = 220

Quadratur des Kreises

Hat dir schon einmal jemand gesagt, du versuchst die Quadratur des Kreises?
Damit wollte er dir sagen, dass du gerade versuchst, ein unlösbares Problem zu lösen.
Denn es ist eben unmöglich, aus einem Kreis ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt zu konstruieren.

So lernst du mit diesem Buch:

WISSEN

Hier wiederholst du Schritt für Schritt, was du zu jedem Lernthema wissen musst, um richtig vorbereitet zu sein.

In der linken Spalte: Regeln und Arbeitsanleitungen
In der rechten Spalte: Beispiele und Veranschaulichungen

ÜBEN

Hier wendest du das Gelernte auf typische Übungsaufgaben an.

Damit du deinen Lernfortschritt selbst überwachen kannst, gibt es verschiedene Schwierigkeitsstufen:

Übungen zum Wiederholen des Lernstoffs

Übungen zu Standardaufgaben und für die nötige Sicherheit vor der Klassenarbeit

Übungen zu besonderen und anspruchsvolleren Problemen

WISSEN +

Diese Kästen geben dir zusätzliche Informationen, Tipps und Arbeitshinweise für das Bearbeiten der Übungen.

TESTEN

Hier testest du dein Wissen mit vermischten und übergreifenden Aufgaben eines Kapitels.

KLASSENARBEIT 1

Alle Lernthemen eines Kapitels werden wie in einer echten Klassenarbeit abgefragt.

60 Minuten

Die Minutenangabe sagt dir, wie viel Zeit du für die Bearbeitung einer Klassenarbeit hast.

Topthema im Schnellcheck:
Hier findest du wichtige Lernthemen zum schnellen Nachschlagen und Wiederholen.

LERNTIPP

Buchstaben in Formeln

Gleichungen

- Gleichungen treffen Aussagen über den Zusammenhang zwischen mathematischen Ausdrücken (Termen). Sie beschreiben in knapper und abstrakter Form die Beziehung von Zahlengrößen zueinander.

Eine Gleichung besteht aus Zahlen, Buchstaben und Rechenzeichen.

Beide Terme sind durch ein „=“ verbunden.

Der Term links vom Gleichheitszeichen hat denselben Wert wie der Term rechts.

Buchstaben sind Platzhalter

- Buchstaben stehen in Gleichungen stellvertretend für unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahlen und Werte als Platzhalter.
- Jeder Platzhalter hat in der Gleichung eine feste Bedeutung.

Es werden nicht nur lateinische Buchstaben (z. B. a, b, x, y), sondern auch griechische Buchstaben (z. B. für Winkel) verwendet.

Konstanten

- Als Konstanten stehen Buchstaben für einen festen, unveränderlichen Wert.
- Entweder repräsentieren sie einen Zahlenwert, den man in einer Gleichung nicht immer neu ausschreiben will, oder einem Buchstaben wird durch Vereinbarung ein fester Wert zugewiesen.

In Gleichungen der Form $ax + by = c$ haben die Konstanten a, b und c einen beliebigen, aber festen Wert, x und y sind variabel.

Der griechische Buchstabe π vertritt z. B. die Kreiszahl 3,14159...

Variable

- Als Variable stehen Buchstaben für Größen, die in einer Gleichung verschiedene, „veränderliche“ Werte annehmen können. Um eine Gleichung mit mehreren Variablen besser zu verstehen, variiert man eine als „unabhängige“ Variable und beobachtet, wie sich die anderen „abhängigen“ Variablen verändern müssen, um die Gleichung zu erfüllen.

$y = ax + b$: Was kannst du über das Verhältnis von x und y sagen (unabhängig von den Konstanten a und b)?

$v = s/t$: Wie muss sich die Geschwindigkeit ändern (v abhängig), wenn in einer festen Zeit (t konstant) bestimmte Wegstrecken zurückgelegt werden sollen (s unabhängig)?

Konstante oder Variable?

- In der Mathematik verwendet man die Buchstaben häufig wie folgt:
  - a, b, c stehen für beliebige Konstanten,
  - m, n stehen für Konstanten aus natürlichen Zahlen,
  - x, y, z kennzeichnen Variablen.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
(binomische Formel)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
(Potenzgesetz)

$y = 3x^2 - 5$, $y = a \cdot x^n + b \cdot x + c$
(Funktionsgleichungen)

Duden

WISSEN • ÜBEN • TESTEN

9. Klasse

Mathematik

4., aktualisierte Auflage

Dudenverlag
Berlin

Bildnachweis:
Bibliographisches Institut, Berlin: S. 39
G. Liesenberg, Berlin: S. 109

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

Bibliographisches Institut GmbH
Mecklenburgische Straße 53, 14197 Berlin

Redaktionelle Leitung Constanze Schöder
Redaktion Dr. Wiebke Salzmann
Autoren Michael Bornemann, Karin Hantschel, Lutz Schreiner, Dr. Wiebke Salzmann (Klappe)

Herstellung Uwe Pahnke
Layout Bachmann Design, Weinheim
Umschlaggestaltung Büroecco, Augsburg; Bachmann Design, Weinheim
Umschlagabbildung Selina Bauer, Berlin

Satz LemmeDESIGN, Berlin
Druck und Bindung AZ Druck und Datentechnik GmbH
Heisinger Straße 16, 87437 Kempten
Printed in Germany

978-3-411-72574-8
Auch als E-Book erhältlich unter: ISBN 978-3-411-91231-5

www.duden.de

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Zahlen

1.1 Irrationale Zahlen

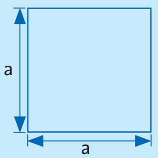
Quadrieren ist das Multiplizieren einer Zahl a mit sich selbst: $a \cdot a = a^2$.

$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$
$(-2) \cdot (-2) = (-2)^2 = 4$
$0 \cdot 0 = 0^2 = 0$

Es gilt stets: $a^2 \geq 0$.

Ein Quadrat mit der Seitenlänge a hat den Flächeninhalt $A = a^2$.

Quadrieren funktioniert immer! Du kannst zu jeder rationalen Zahl a eine rationale Zahl a^2 finden.



$A = a \cdot a = a^2$

Die **Quadratwurzel** (kurz: **Wurzel**) aus einer nicht negativen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl c, die quadriert die Ausgangszahl a ergibt: $c^2 = a$.

$\sqrt{9} = 3$; da $3^2 = 9$; $a = 9$; $c = 3$
$\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, da $1{,}2^2 = 1{,}44$; $a = 1{,}44$; $c = 1{,}2$

Merke: $\sqrt{0} = 0$; da $0^2 = 0$

Für alle $a \geq 0$ gilt: $(\sqrt{a})^2 = a$.

$(\sqrt{11})^2 = 11$

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand.**

$\sqrt{1{,}44}$: Der Radikand ist die Zahl 1,44.

Merke: Da das Produkt zweier negativer Zahlen positiv ist, kann man aus negativen Zahlen keine Wurzel ziehen.

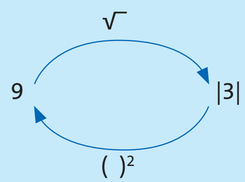
$(-4) \cdot (-4) = 16$ und $4 \cdot 4 = 16$
$\sqrt{-16}$ ist nicht definiert.

Ist a eine beliebige rationale Zahl, dann gilt: $\sqrt{a^2} = |a|$.

$|3| = 3$; $|-3| = 3$

$\sqrt{3^2} = |3| = 3$
$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

Quadrieren und **Wurzelziehen** sind zueinander entgegengesetzte (inverse) Rechenoperationen.
Beim Wurzelziehen wird zu einer Zahl a die Zahl x bestimmt, die mit sich selbst multipliziert a ergibt.



$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{0{,}5184} = 0{,}72$

WISSEN

Du kennst bereits einfache quadratische Gleichungen der Form $x^2 = a$.

$x^2 = 4$; dann gilt: $x = 2$ oder $x = -2$;
$x^2 = 9$; dann gilt: $x = 3$ oder $x = -3$

Wurzelziehen führt zu irrationalen Zahlen. Es gibt viele Gleichungen der Form $x^2 = a$, die *keine rationale Zahl* als Lösung für x haben.
Die Lösung solcher Gleichungen lässt sich nicht als Bruch darstellen.

Du erinnerst dich: **Rationale Zahlen** können entweder als
- abbrechende Dezimalzahlen oder als
- nicht abbrechende, periodische Dezimalzahlen dargestellt werden.

Merke: Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch schreiben.

$x^2 = 2$ hat keine rationale Zahl als Lösung.

Beweis: $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen, denn:
Angenommen, man könnte $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzten Bruch darstellen, dann gälte

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ und damit $2 = \frac{p^2}{q^2}$,
d. h., $\frac{p \cdot p}{q \cdot q}$ müsste kürzbar sein und
$\frac{p}{q}$ müsste ebenfalls kürzbar sein, was der Annahme widerspricht, dass der Bruch bereits vollständig gekürzt ist.

Die Wurzel einer rationalen Zahl ist meistens eine **irrationale Zahl.**
Irrationale Zahlen sind **nicht abbrechende** und **nicht periodische Dezimalzahlen.**

Merke: Irrationale Zahlen lassen sich nicht als Bruch darstellen. Durch Dezimalzahlen werden sie näherungsweise angegeben.

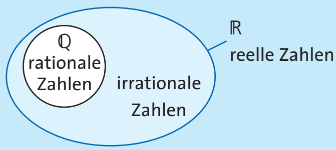
$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,562...$

Kreiszahl $\pi = 3{,}141\,592\,6...$

Näherung der Kreiszahl $\pi \rightarrow \pi \approx 3{,}142$

Näherung von $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$

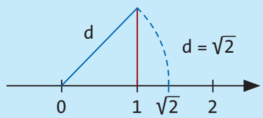
Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen.**



Darstellung reeller Zahlen:
Zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen liegen unendlich viele weitere rationale Zahlen.
Man sagt: **Die rationalen Zahlen liegen dicht.**

Auf der Zahlengeraden ist aber trotzdem für jede irrationale Zahl noch eine bestimmte Stelle frei.

Merke: Jede reelle Zahl lässt sich auf der Zahlengeraden darstellen.



Die Stelle von $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden findest du, indem du an der Stelle 1 eine senkrechte Strecke der Länge 1 errichtest und deren Endpunkt mit dem Nullpunkt verbindest.
Diese Strecke d hat nach dem Satz des Pythagoras die Länge $\sqrt{2}$, denn nach dem Satz des Pythagoras (↗ Kap. 6) gilt:

$1^2 + 1^2 = d^2$, also $d = \sqrt{2}$.

Trage die Strecke mit dem Zirkel auf der Zahlengeraden ab.

ÜBUNG 1 **Berechne.**

a) 2^2 b) $(\sqrt{27})^2$ c) $(-9)^2$ d) $0{,}04^2$ e) $\sqrt{(-4)^2}$ f) $(-0{,}75)^2$

ÜBUNG 2 **Handelt es sich um eine rationale oder um eine irrationale Zahl?**

	$3{,}451$	0	$-\sqrt{12}$	$0{,}31\overline{471}$	$\sqrt{256}$	$-2{,}3$	$\sqrt{0}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{24}$
rational	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
irrational	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

WISSEN

Intervallschachtelung – Bestimmung einer Näherung für $\sqrt{2}$
Mithilfe von immer engeren Intervallen, in denen $\sqrt{2}$ liegt, kann $\sqrt{2}$ beliebig genau angenähert werden. Dieses Verfahren heißt Intervallschachtelung.

1. Schritt: Suche ein Intervall, in dem $\sqrt{2}$ liegt.

Es ist $1^2 = 1 \leq 2$
und $2^2 = 4 \geq 2$ → $\sqrt{2}$ liegt im Intervall [1; 2], denn $1^2 \leq 2 \leq 2^2$ → $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$
Intervalllänge: $2 - 1 = 1$

2. Schritt: Suche ein kürzeres Intervall, das im Intervall [1; 2] liegt.

$1{,}1^2 = 1{,}21 \leq 2$
$1{,}2^2 = 1{,}44 \leq 2$
$1{,}3^2 = 1{,}69 \leq 2$
$1{,}4^2 = 1{,}96 \leq 2$
$1{,}5^2 = 2{,}25 \geq 2$
→ $\sqrt{2}$ liegt im Intervall [1,4; 1,5], denn $1{,}4^2 \leq 2 \leq 1{,}5^2$ → $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$
Intervalllänge:
$1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1$

Mit jedem weiteren Schritt wird die Intervalllänge verkleinert und eine immer genauere Näherung für $\sqrt{2}$ gefunden.

ÜBUNG 3 **Führe den dritten Schritt der Intervallschachtelung von $\sqrt{2}$ durch, indem du vom gefundenen Intervall [1,4; 1,5] (↗ Kasten) ausgehst.**

ÜBUNG 4 **Überprüfe, ob es sich um eine Intervallschachtelung handeln kann.**

a) [1; 2]
[1; 2,1]
[1; 2,11]
[1; 2,111] …

b) [0; 1]
[0; 0,1]
[0; 0,01]
[0; 0,001]

c) [4; 5]
[4,1; 5,1]
[4,11; 5,11]
[4,111; 5,111] …

d) [2; 3]
[2,2; 2,75]
[2,3; 2,6]
[2,35; 2,55]

ÜBUNG 5 **Führe eine Intervallschachtelung für $\sqrt{7}$ bis zur Intervalllänge 0,01 durch.**

1.2 Potenzgesetze

Das **Potenzieren** einer Zahl a ist das n-fache Multiplizieren der Zahl a mit sich selbst.
a^n heißt **Potenz,** a **Basis** und n heißt **Exponent:**

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{} = a^n \leftarrow \text{Exponent}$$

Basis ↑ (a)

($a \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 1$)
Für alle $a \neq 0$ gilt: $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.
Der Ausdruck 0^0 ist nicht definiert.

Für **negative Exponenten** gelten die folgenden Schreibweisen:

$a^{-1} = \frac{1}{a}$; $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^6 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 15\,625$

$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64}$

$5^0 = 1$ $\quad 0{,}5^0 = 1$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

$5^1 = 5$ $\quad 0{,}5^1 = 0{,}5$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$

$12^{-1} = \frac{1}{12}$ $\quad 0{,}5^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$3^{-4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$

Für **Potenzen mit negativer Basis** gilt:

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{wenn n gerade ist,} \\ -a^n, & \text{wenn n ungerade ist.} \end{cases}$$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Potenzgesetze

Sind $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $m, n \in \mathbb{Z}$, so gilt:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $a^m : a^n = a^{m-n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $a^n : b^n = (a : b)^n$ oder $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$

Merke: Potenzrechnung geht vor Punktrechnung!

$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
$3^7 : 3^5 = 3^{7-5} = 3^2 = 9$
$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4 = 6^4 = 1\,296$
$6^3 : 2^3 = (6 : 2)^3 = 3^3 = 27$
$(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = (7^3)^2 = 117\,649$

WISSEN

ÜBUNG 6 **Fasse die Terme mithilfe der Potenzschreibweise zusammen.**

a) $4xyxxyyx$ b) $-4x \cdot 5xz \cdot (-2xy)$ c) $-16 \cdot a^2 \cdot 4ab^2 \cdot (-2)a$

d) $10 \cdot b^5 \cdot (-b)^3$ e) $12am^2 \cdot 13ma$ f) $4y^2z^3 \cdot 2v^2y \cdot (-4zv)$

ÜBUNG 7 **Berechne, indem du zunächst die Potenzgesetze anwendest.**

a) $0{,}25^7 \cdot 4^7$ b) $(2^2)^3$ c) $2{,}67^0 \cdot (-1{,}24)^0$ d) $\frac{3^4}{6^4}$

WISSEN

Rationale Exponenten
Die Potenzgesetze gelten auch für Potenzen mit rationalen Exponenten:

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$	$2^{\frac{5}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{9}{6}}$
$a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$	$2^{\frac{5}{6}} : 2^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$
$a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = (a \cdot b)^{\frac{m}{n}}$	$3^{\frac{3}{4}} \cdot 0{,}5^{\frac{3}{4}} = (3 \cdot 0{,}5)^{\frac{3}{4}} = 1{,}5^{\frac{3}{4}}$
$a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = (a : b)^{\frac{m}{n}}$	$3^{\frac{3}{4}} : 0{,}5^{\frac{3}{4}} = (3 : 0{,}5)^{\frac{3}{4}} = 6^{\frac{3}{4}}$
$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$	$\left(17^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{2}{3}} = 17^{\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}} = \left(17^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 17^{\frac{1}{2}}$

($a, b \in \mathbb{R}$; $a, b \geq 0$; $m, n \in \mathbb{N}$; $m, p \geq 1$; $n, q \geq 2$)

ÜBUNG 8 **Hier wurde mithilfe der Potenzgesetze umgeformt. Ergänze.**

a) $(p-q)^2 \cdot$ ______ $= (p-q)^6$

b) ______ $: 30^{\frac{3}{4}} = 16^{\frac{3}{4}}$

c) ______ $\cdot\, a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{8}{12}} = a^{\frac{2}{3}}$

d) $\left(2^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{4}{n^2}} =$ ______ $= \left(2^{\frac{4}{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} =$ ______

ÜBUNG 9 **Vereinfache die Terme mithilfe der Potenzgesetze.**

a) $\left(2^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right)^2$ b) $(a+b)^{\frac{2}{3}} \cdot (a^2 + 2ab + b^2)^{\frac{2}{3}}$

c) $(x-5y)^{\frac{1}{2}} \cdot (x+5y)^{\frac{1}{2}}$ d) $(2a^2)^{\frac{1}{4}} \cdot (4ab^3)^{\frac{1}{4}} \cdot (2ab)^{\frac{1}{4}}$

1.3 Wurzeln und Wurzelterme

Die **n-te Wurzel** ($n \geq 2$) einer nicht negativen reellen Zahl a ist diejenige nicht negative Zahl c, die mit n potenziert a ergibt:
$c^n = a$. Man schreibt für c auch: $c = \sqrt[n]{a}$.

Beachte: Du kennst bereits die **Quadratwurzel:**
Statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man kurz: $\sqrt{a}$

Bei der Quadratwurzel schreibt man den Wurzelexponenten also nicht dazu.

$2^3 = 8$; $\sqrt[3]{8} = 2$

$0{,}5^4 = 0{,}0625$; $\sqrt[4]{0{,}0625} = 0{,}5$

$10^5 = 100\,000$; $\sqrt[5]{100\,000} = 10$

$1^{17} = 1$; $\sqrt[17]{1} = 1$

$3^2 = 9$; $\sqrt[2]{9} = \sqrt{9} = 3$

Potenzen und Wurzeln

Man schreibt für $\sqrt[n]{a}$ auch $a^{\frac{1}{n}}$.

$$\underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\text{Wurzelschreibweise}} \qquad \underbrace{a^{\frac{1}{n}}}_{\text{Potenzschreibweise}}$$

Für die **Quadratwurzel** gilt: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

$a^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{a}$

$n = 2$ (Quadratwurzeln): $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Entsprechend der Potenzgesetze gilt:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2{,}5} = \sqrt[3]{2 \cdot 2{,}5} = \sqrt[3]{5}$

$\sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{8 : 4} = \sqrt[4]{2}$

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[3 \cdot 4]{5} = \sqrt[12]{5}$

Rechnen mit Wurzeln:
Du kannst

- *gleiche* Wurzeln bei Addition und Subtraktion zusammenfassen;
- das Distributivgesetz anwenden;
- die Quadratwurzel aus einem quadratischen Faktor des Radikanden ziehen;
- den Nenner durch Erweitern rational machen.

Merke: Du darfst bei Addition und Subtraktion nur gleiche Wurzeln zusammenfassen.

$3\sqrt{5} + 7\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

$\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + 5) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot 5$
$= \sqrt{6} + 5 \cdot \sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$

$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{25} + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7$, aber
$\sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} = 5{,}3851\ldots$

WISSEN

ÜBUNG 10 **Forme in die Potenzschreibweise bzw. Wurzelschreibweise um.**

a) $\sqrt{17} =$

b) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{4}{5}} =$

c) $(x + 5y)^{\frac{2}{7}} =$

d) $(x + 5y)^{-\frac{2}{7}} =$

e) $\sqrt[4]{(3-d)^5} =$

f) $\sqrt[3n]{b^{4m}} =$

ÜBUNG 11 **Forme mithilfe der Wurzelgesetze um und berechne.**

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

b) $\sqrt{\frac{9}{25}}$

c) $\sqrt{0{,}0004}$

d) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$

e) $(\sqrt{2})^6$

f) $(\sqrt[4]{2})^8$

g) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{15\,625}}$

h) $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{64}$

WISSEN

Wurzelterme
Ein Term heißt **Wurzelterm,** wenn der Radikand mindestens eine Variable enthält. Da der Radikand stets größer oder gleich null sein muss, musst du auf die **Definitionsmenge** achten.

Wurzelterm: $\sqrt{x-4}$
Wann ist der Radikand positiv oder null?
$x - 4 \geq 0$, also $x \geq 4$

Definitionsmenge: $D = \{x \mid x \geq 4\}$

Rechnen mit Wurzeltermen
Du kannst
- gleiche Wurzeln bei Addition und Subtraktion zusammenfassen (1);
- das Distributivgesetz anwenden (2);
- die Quadratwurzel aus einem quadratischen Faktor des Radikanden ziehen (3);
- den Nenner durch Erweitern rational machen (4).

(1) $2\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 4\sqrt{x}$

(2) $\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 2) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot 2$
$= x + 2 \cdot \sqrt{x}$

(3) $\sqrt{50x} = \sqrt{25 \cdot 2x} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2x}$
$= 5 \cdot \sqrt{2x}$

(4) $\frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{x}$

ÜBUNG 12 **Gib die Definitionsmenge für die Wurzelterme an. Vereinfache die Wurzelterme, wenn dies möglich ist.**

a) $\sqrt{6x-2}$ D =

b) $(\sqrt[3]{x-1})^9$ D =

c) $\sqrt{x^2+1}$ D =

d) $\sqrt{\frac{3}{8}x + \frac{5}{4}}$ D =

ÜBUNG 13 **Vereinfache die Wurzelterme so weit wie möglich.**

a) $\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$

b) $(\sqrt{x} - 2\sqrt{y})^2$

ÜBEN

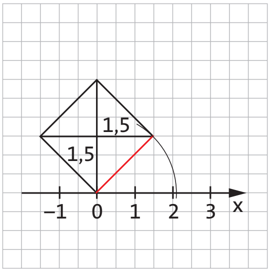
KLASSENARBEIT 1

45 Minuten

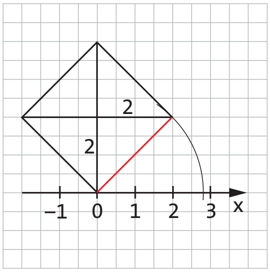
TESTEN

AUFGABE 1 **Notiere, welche reelle Zahl jeweils dargestellt wird.**

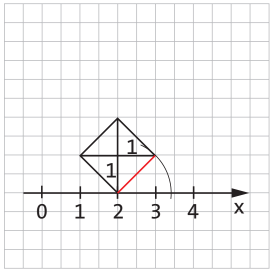
a)



b)



c)



AUFGABE 2 **Forme mithilfe der Potenzgesetze um.**

a) $\frac{4}{5}a^4b^{-2}\cdot\frac{5}{8}a^{-3}b^5 + 2{,}5ab^3 =$

b) $\left(\frac{5}{a-b}\right)^2 =$

c) $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(a^2+ab)^{-\frac{1}{2}} =$

AUFGABE 3 **Forme um. Nutze die Wurzelgesetze oder die Informationen im Abschnitt „Rechen mit Wurzeln“ (↗ Kap. 1.3).**

a) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-7\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{32}:\sqrt[3]{4}$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{81}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{3}}$

AUFGABE 4 **Vereinfache die Wurzelterme. Gib jeweils die Definitionsmenge an.**

a) $\sqrt[6]{x^5y^3z}\cdot\sqrt[6]{x^7y^3z^5}$

D =

b) $\sqrt{\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{6}xy+\frac{1}{9}y^2}$

D =

c) $\sqrt{1-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{a}}$

D =

d) $\sqrt[n]{\frac{a^{n+2}b^{n+2}}{a^2b^2}}$

D =

AUFGABE 5 **Nähere $\sqrt{5}$ in drei Schritten durch eine Intervallschachtelung. Was passiert, wenn du bei der Schachtelung die Intervalle halbierst? Führe drei Schritte aus.**

2 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

2.1 Lineare Gleichungen

Zwei Terme, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, bilden eine **Gleichung.** Die Zahlen bzw. Elemente, die man für die Variablen in die Gleichung einsetzen darf, werden in der **Grundmenge** zusammengefasst. Eine Einsetzung, die zu einer wahren Aussage führt, heißt **Lösung** der Gleichung. In der **Lösungsmenge** fasst man alle Lösungen einer Gleichung zusammen.	$2x + 3 = 10$ $3x^2 + 4 = 16$ Grundmenge: $\mathbb{N}$; $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3 \ldots\}$ $3x^2 + 4 = 16$ $3 \cdot 3^2 + 4 = 16$ falsche Aussage $3 \cdot 2^2 + 4 = 16$ wahre Aussage Lösung: $x = 2$; Lösungsmenge: $L = \{2\}$ $2x + 3 = 10$: keine Lösung in $\mathbb{N}$ ($L = \{\ \}$); ist die Grundmenge $\mathbb{R}$, so gilt: $L = \{3{,}5\}$.
Gleichungen der Form $a \cdot x + b = 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$) heißen **lineare Gleichungen.** **Lineare Gleichungen lösen**	$4x - 28 = 0$ Lösung: $x = 7$; $L = \{7\}$
Mithilfe von Äquivalenzumformungen kannst du eine lineare **Gleichung lösen,** indem du sie „nach x auflöst“. Du erhältst eine Gleichung der Form $x = k$ (k ist eine bestimmte Zahl). **Äquivalenzumformungen** sind Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern, z. B.: ■ Klammern auflösen; ordnen, zusammenfassen; ■ beidseitige Addition oder Subtraktion derselben Zahl (bzw. desselben über der Grundmenge definierten Terms); ■ beidseitige Multiplikation mit derselben von 0 verschiedenen Zahl (bzw. demselben über der Grundmenge definierten Term); ■ beidseitige Division durch dieselbe von 0 verschiedene Zahl.	Löse die Gleichung: $x + 2(x - 3) = 5x - 4(2x - 9)$ $x + 2(x - 3) = 5x - 4(2x - 9)$ | ausmultiplizieren $x + 2x - 6 = 5x - 8x + 36$ | zusammenfassen und ordnen $3x - 6 = -3x + 36$ | $+ 3x + 6$ $6x = 42$ | $: 6$ (dividieren) $x = 7$ Lösungsmenge: $L = \{7\}$ Probe: $7 + 2 \cdot (7 - 3) = 5 \cdot 7 - 4 \cdot (2 \cdot 7 - 9)$ $15 = 15$

WISSEN

ÜBEN

ÜBUNG 1 **Überprüfe, ob die in Klammern angegebenen Zahlen die Gleichung lösen. Du darfst den Taschenrechner benutzen.**

a) $1{,}2x - 3{,}6 = 1{,}32$ (3,9; 4,1; −4,1)
b) $15 - 9x + 63 = 24$ (2; −2; 6; −6)
c) $\frac{2x + 3}{9} = \frac{x + 2}{5}$ (0; 1; 2; 3)
d) $4x - (2 - 6x) = -6x + 10 + 14x$ (−4; 0; 2; 6)

ÜBUNG 2 **Löse folgende Gleichungen. Führe immer eine Probe durch.**

a) $2(x + 1) = 4(x - 7)$
b) $x - (7x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 8)$
c) $15 + 11m - 7 = 4m - 9 + 19m + 5$
d) $0{,}1 \cdot (20x - 30) = (-1) \cdot (7x - 6)$

ÜBUNG 3 **Finde die gesuchten Zahlen, indem du Gleichungen aufstellst und sie löst.**

a) Vermindert man 92 um die gesuchte Zahl und multipliziert die Differenz mit 7, so erhält man 392. Wie heißt diese Zahl?
b) Gibt es vier aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren Summe 322 beträgt?
c) Lukas sagt: „Ich habe zwei Zahlen aufgeschrieben, von denen die eine um 2 kleiner ist als die andere. Wenn ich die größere mit 4, die kleinere mit 3 multipliziere und die beiden Produkte addiere, so erhalte ich 57.“ Welche Zahlen hat Lukas sich aufgeschrieben?

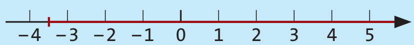
WISSEN +

Ungleichungen
Sind zwei Terme durch eines der Relationszeichen <, >, ≠, ≤ oder ≥ verbunden, so liegt eine Ungleichung vor.

Beachte: Beim Multiplizieren und Dividieren mit einer negativen Zahl wird das Relationszeichen umgekehrt.

Die Lösungsmenge einer linearen Ungleichung kann man grafisch darstellen.

$-4x < 14 \quad | : (-4)$
$x > \frac{14}{-4}$
$x > -3{,}5$
$L = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3{,}5\}$



ÜBUNG 4 **Löse folgende Ungleichungen.**

a) $3x < 48$
b) $24x < 120$
c) $10x > 43$
d) $4{,}5k + 13 > 17{,}5$
e) $4(2x + 3) < x - 3(3 - 2x)$
f) $1 + \frac{x}{5} > \frac{x}{3} - 1$

2.2 LGS grafisch lösen

Gleichungen der Form $ax + by = c$ ($a, b \neq 0$) heißen **lineare Gleichungen mit zwei Variablen.**
Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen besteht aus einer Menge von Zahlenpaaren $(x|y)$.
Du erhältst die Lösungen einer solchen Gleichung, indem du sie nach einer Variablen (meist y) auflöst und Werte für die andere Variable (meist x) einsetzt.

$4x + 5y = 10$

$y = -\frac{4}{5}x + 2$

x	−5	−2	0	3	5	8
y	6	$\frac{18}{5}$	2	$-\frac{2}{5}$	−2	$-\frac{22}{5}$

$L = \left\{\ldots; (-5|6); \left(-2\middle|\frac{18}{5}\right); (0|2); \left(3\middle|-\frac{2}{5}\right); \ldots\right\}$

Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen x und y bilden ein **lineares Gleichungssystem.**
Allgemeine Darstellung:

$$\begin{array}{llllllll} \text{(I)} & a_1 & x & + & b_1 & y & = & c_1 \\ \text{(II)} & a_2 & x & + & b_2 & y & = & c_2 \end{array}$$

Eine Lösung $(x_1|y_1)$ (auch: $(x_1; y_1)$) des LGS erfüllt jede Gleichung des Systems.

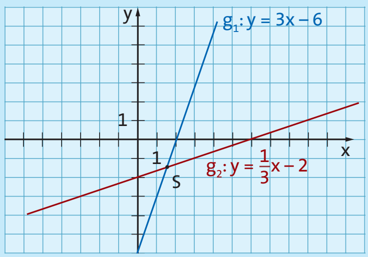
(I) $3x - y = 6$
(II) $x - 3y = 6$

$(1{,}5|-1{,}5)$ ist die Lösung des Systems.

Um ein LGS **grafisch** zu lösen,
- löse jede der beiden Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen nach y auf;
- zeichne die Graphen der zwei zugehörigen linearen Funktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
- Die Koordinaten des Schnittpunkts entsprechen der Lösung des LGS: $L = \{(x_1|y_1)\}$.

Hinweis: Der Graph einer linearen Funktion $y = f(x) = mx + n$ ist eine Gerade: Der Anstieg m und das absolute Glied n bestimmen den Verlauf der Geraden.

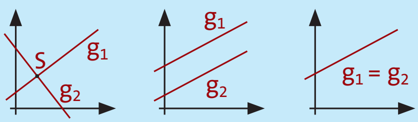
Gegeben:	*Auflösen nach y ergibt:*
(I) $3x - y = 6$	(I) $y = 3x - 6$
(II) $x - 3y = 6$	(II) $y = \frac{1}{3}x - 2$



$x = 1{,}5$; $y = -1{,}5$; Lösung: $S(1{,}5|-1{,}5)$;
$L = \{(1{,}5|-1{,}5)\}$

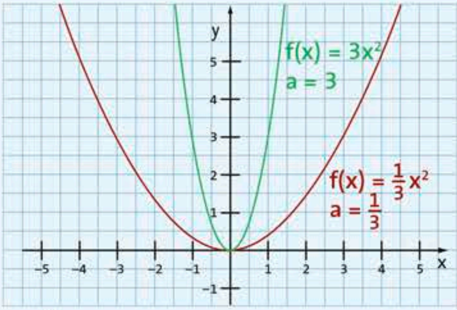
Es gibt folgende Möglichkeiten:
Die beiden Geraden …
- schneiden sich in einem Punkt: Es gibt **eine Lösung.** (1)
- sind zueinander parallel: Es gibt **keine Lösung.** (2)
- sind identisch: Es gibt **unendlich viele Lösungen.** (3)

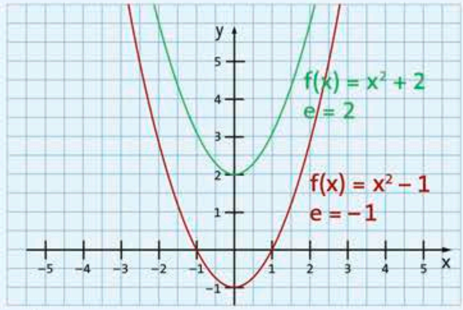
(1) (2) (3)



Stichwortfinder

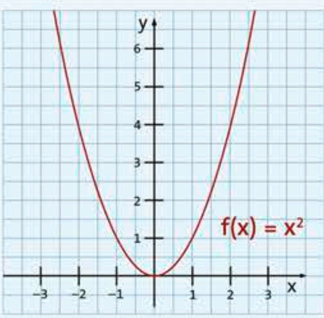
Graphen quadratischer Funktionen

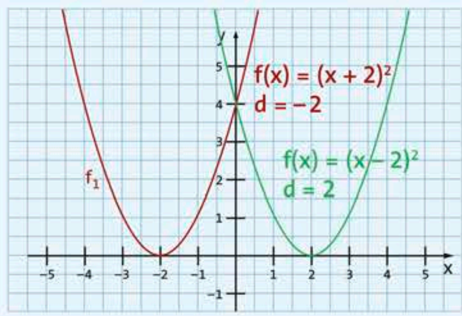




$f(x) = x^2 + e$
$e > 0$: Verschiebung nach oben
$e < 0$: Verschiebung nach unten

$f(x) = ax^2$
$0 < a < 1$ Stauchung
$a > 1$ Streckung

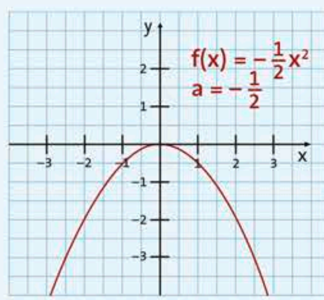


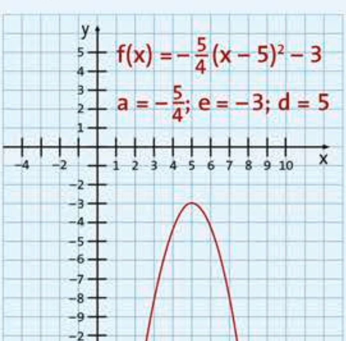


$f(x) = (x - d)^2$
$d > 0$: Verschiebung nach rechts
$d < 0$: Verschiebung nach links

Verschiebung
+ Spiegelung
+ Streckung

$f(x) = ax^2$
$a < 0$: Spiegelung





$f(x) = a(x - d)^2 + e$
$a < 0$: Spiegelung
$|a| > 1$: Streckung
$e < 0$: Verschiebung nach unten
$d > 0$: Verschiebung nach rechts

Quadratische Gleichungen lösen

allgemeine Form

$ax^2 + bx + c = 0$

Quadratische Gleichungen in der allgemeinen Form müssen vor der Lösung in die Normalform gebracht werden, indem sie durch a dividiert werden.

Normalform

$x^2 + px + q = 0$

Spezialfall für $p = 0$

rein quadratische Gleichungen:

$x^2 - r = 0 \ (r > 0)$

Lösen durch Wurzelziehen mithilfe der 3. binomischen Formel:

$x^2 - r = 0$
$(x + \sqrt{r})\,(x - \sqrt{r}) = 0$
$x_1 = -\sqrt{r};\ x_2 = \sqrt{r}$

Für $r < 0$ gibt es keine Lösung!

Spezialfall für $q = \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 0$

Lösen mithilfe der 1. oder 2. binomischen Formel:

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$
$x = -\frac{p}{2}$

Spezialfall für $q = 0$

gemischt quadratische Gleichungen:

$x^2 + px = 0$

Lösen durch Faktorisieren:

$x^2 + px = 0$
$x(x + p) = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = -p$

Geht bei quadratischen Gleichungen in Normalform immer:

Lösen mithilfe der p-q-Formel:

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

DUDEN

Für nur 1,– Euro!
Das passende
digitale Lernpaket
www.lernhelfer.de/
wuet

9. Klasse • Mathematik

Mit dabei: Schlaue Schnipsel – Mathewissen
zum Staunen, Lachen und Weitererzählen

Bessere Noten in drei Schritten:

- WISSEN: Alle Regeln, alle Merksätze, alle Lerninhalte
- ÜBEN: Viele Übungen von leicht bis richtig knifflig
- TESTEN: Training für den Ernstfall – mit Klassenarbeiten wie in der Schule

Mit separatem Lösungsheft.

Geeignet für alle Bundesländer.
Für Gymnasium, Realschule und Gesamtschule.

Auf die aktuellen Bildungspläne abgestimmt.

ISBN 978-3-411-72574-8
13,99 € (D) · 14,40 € (A)
9 783411 725748