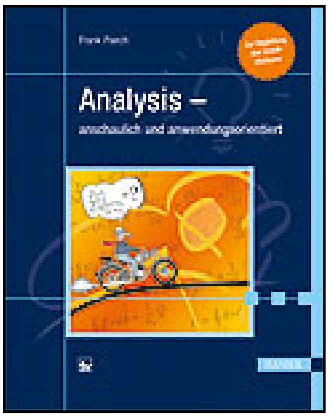
HANSER



Leseprobe

Frank Paech

Analysis - anschaulich und anwendungsorientiert

ISBN (Buch): 978-3-446-43175-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-43592-6

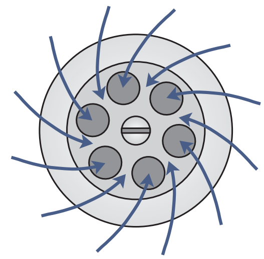
Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43175-1

sowie im Buchhandel.

6. Von Quellen, Senken und Wirbeln

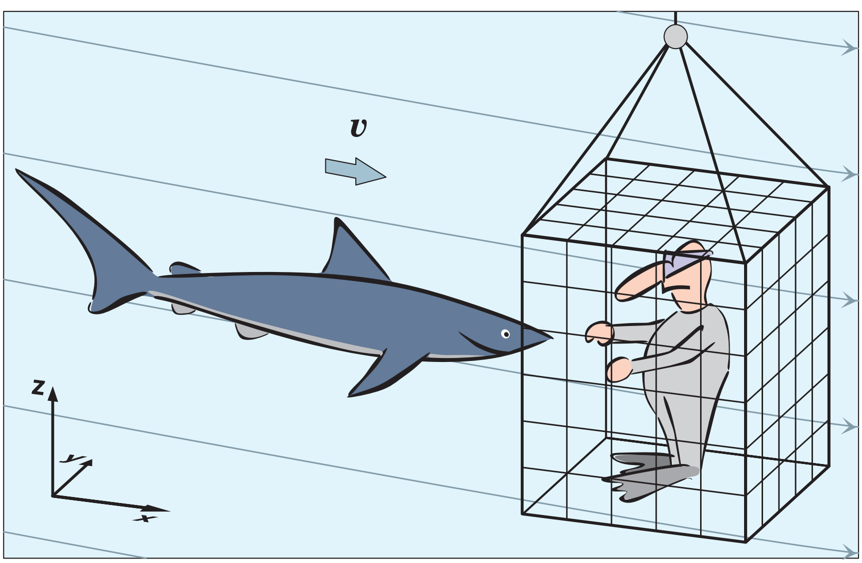
Die Überschrift zeigt, dass wir uns wieder mithilfe von Strömungsfeldern weiter in die Vektoranalysis vortasten werden. Natürlich wagen wir uns dabei nicht in turbulente Gefilde, sondern bleiben im Laminaren. Bei den drei anschaulichen Begriffen der Kapitelüberschrift handelt es sich um markante Eigenschaften eines Strömungsfeldes. Befindet man sich selbst in einem Strömungsfeld (Luft oder Wasser), wird man *Wirbel*, *Quellen* oder *Senken* wohl irgendwie bemerken – aber wie erkennt man diese Eigenschaften an einem durch Funktionsterme gegebenen Vektorfeld? Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Eigenschaften mithilfe der Analysis aufzuspüren. Natürlich lassen wir dabei nur stetig differenzierbare Funktionen zu. Endziel wird sein, Ihr Repertoire an mathematischen Werkzeugen zum Verständnis grundlegender Mechanismen von Natur und Technik zu erweitern.



Ein Ausguss bzw. ein Wasserhahn lässt sich nur dann als Senke bzw. Quelle betrachten, wenn deren Ab- bzw. Zufluss ignoriert wird.

6.1 Quellen, Senken und Divergenzen

Das folgende Bild zeigt einen Taucher, der sich mithilfe eines schützenden Käfigs in die Tiefe begeben hat, um dort gefahrlos Haie zu beobachten. Der Käfig befinde sich in einem schwachen (inhomogenen) Strömungsfeld – im Bild durch Feldlinien grob angedeutet. Feinheiten aufgrund von Verwirbelungen durch die Käfigstäbe und den Taucher seien vorhanden, aber nicht eingezeichnet.



Der Hai will nur spielen, denn Neopren schmeckt eklig!

Bild 6.1.1
Fluss in bzw. aus einer geschlossenen Hülle

Durch einige Gitterquadrate des Käfigs strömt Wasser hinein, durch andere hinaus. Jetzt kann das Flussintegral (*4.5.8*) ins Spiel kommen. Dazu wählen wir die „Hülle" des durch die Käfigstäbe begrenzten Gebiets als Integrationsfläche. Die Form des Käfigs spielt keine Rolle – er könnte genauso gut zylindrisch, kugelförmig oder verbeult sein. Anstelle der Gitterquadrate teilen wir die Hülle des Käfiggebiets in infinitesimale Flächenelemente ein. Um einströmende und ausströmende Flüsse durch Vorzeichen unterscheidbar zu machen, wird für Hüllen eine besondere Richtungskonvention erforderlich: Sämtliche Flächenvektoren sollen nach außen weisen. Das Skalarprodukt in der Fluss-Definition (*s.* (*4.5.7*), (*4.5.8*)) sorgt dann dafür, dass ausströmende Flüsse positiv und einströmende negativ zählen. Das Flächenintegral über die Käfighülle – man spricht von einem *Hüllenintegral* – liefert die Summe aller infinitesimalen Teilflüsse durch die Flächenelemente:

Flächennormalen einer geschlossenen Hülle weisen nach außen!

Hüllen (=Randfläche) eines Gebiets mit dem Volumen V werden hier mit ∂V benannt.

(6.1.1)

$$\phi = \oint_{(\partial V)} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{A} \qquad \left(\text{wenn Sie mögen auch so: } \oiint_{(\partial V)} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{A} \right)$$

Ist das Hüllenintegral gleich null, fließt genau so viel Wasser hinein wie hinaus. Sollte diese Summe jedoch ungleich null sein, muss im Inneren Wasser produziert oder vernichtet werden. Die „Produzenten" heißen *Quellen*, die „Vernichter" *Senken* oder auch *negative Quellen*. Im positiven Fall überwiegen die *Quellen* – im negativen die *Senken*. Das Flussintegral berechnet die Wassermenge, die das Gebiet insgesamt pro Sekunde liefert oder schluckt (je nach Vorzeichen). Sie heißt Gesamt-*Ergiebigkeit* des Quellgebiets (Einheit l/s oder m³/s).

Der Begriff „negative Quelle" macht den Begriff „Senke" überflüssig. Der Begriff „Quellen" schließt dann die Senken mit ein.

Um sicher zu gehen, dass sich höchstens eine Quelle (oder Senke) im Gebiet befindet, muss es auf infinitesimale Größe schrumpfen. Wir wählen der Einfachheit halber einen Mini-Quader im Inneren des Käfigs mit den Kantenlängen dx, dy und dz (*s. Bild 6.1.2*). Die Koordinaten einer Quaderecke sei x_0, y_0 und z_0. Mit dem Index Null wird angedeutet, dass die Koordinaten vorübergehend als gebundene Variable anzusehen sind.

Wir tun hier so, als ob im Falle einer Quelle Flüssigkeit aus dem „Nichts" entsteht bzw. im Falle einer Senke ins „Nichts" verschwindet. Phantasie ist erlaubt!

Die grauen Ebenen seien parallel zur y,z-Ebene.

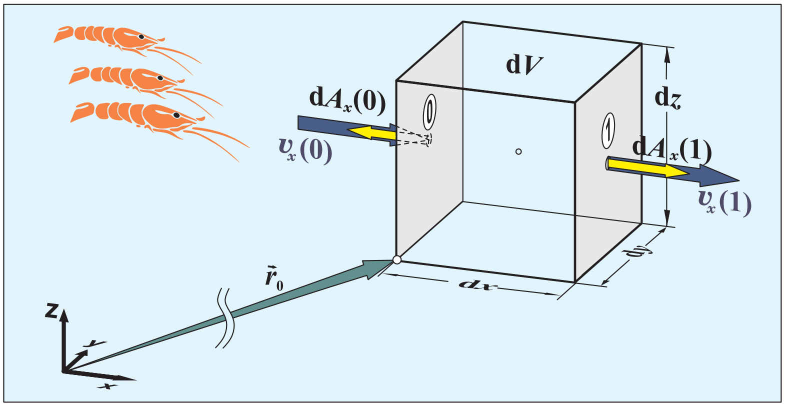


Bild 6.1.2
Fluss in bzw. aus einem infinitesimalen Quader

Gesucht ist die Ergiebigkeit des Miniquaders. Dazu ist die Summe der Flüsse durch die drei Flächenpaare des Quaders zu ermitteln. Wir konzentrieren uns zunächst auf die beiden Flüsse (*vgl.* (*4.5.7*)) durch die im Bild grau gezeichneten Mini-Flächen. Wegen der infinitesimalen Größe der Flächen kann die jeweilige

Strömungsgeschwindigkeitskomponente an den Flächenmitten als repräsentativ für die ganze Fläche angesehen werden. Für Flüsse und Flächenelemente gilt dann:

$$\mathrm{d}A_x(0) = -\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\ \mathrm{d}A_x(1) = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,\ \mathrm{d}\phi_x(0) = v_x(0)\cdot\mathrm{d}A_x(0),\ \mathrm{d}\phi_x(1) = v_x(1)\cdot\mathrm{d}A_x(1)$$
$$\mathrm{d}\phi_x = \mathrm{d}\phi_x(0) + \mathrm{d}\phi_x(1) = \big(v_x(1) - v_x(0)\big)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \underline{\underline{\mathrm{d}v_x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}} \qquad (6.1.2)$$

Beachten Sie die Richtungskonvention der Flächenvektoren!

Die Summe der beiden Flüsse (*s. unten rechts in* (*6.1.2*)) weist eine Differenz von Funktionswerten dicht zusammenliegender Argumente auf. Die Differenz der Argumente beträgt dx. Eine derartige Differenz benachbarter Funktionswerte erfasst man mithilfe des totalen Differenzials:

$$\mathrm{d}v_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\cdot\mathrm{d}x + \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial y}}\cdot\mathrm{d}y + \cancel{\frac{\partial v_x}{\partial z}}\cdot\mathrm{d}z \quad \text{für}\ \ \mathrm{d}y = \mathrm{d}z = 0 \qquad (6.1.3)$$

Eingesetzt in das Ergebnis von (*6.1.2*) ergänzt der hinzugekommene Faktor dx das Flächenelement zu einem Volumenelement. So erhält man schließlich für die Summe der Flüsse in x-Richtung:

$$\mathrm{d}\phi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{d}\phi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}V \qquad (6.1.4)$$

Für die Flüsse durch die übrigen beiden Flächenpaare gilt Analoges – es brauchen lediglich die Indizes ausgetauscht werden. Damit ergibt sich für den gesamten Fluss in bzw. aus dem Mini-Quader ein Ausdruck von kaum fassbarer Kompaktheit:

Wundersame Kompaktheit!

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}V + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}V + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \qquad (6.1.5)$$

Die Summe der partiellen Ableitungen der Komponenten des Vektorfeldes hat also eine konkrete Bedeutung. Bezieht man den Fluss auf das infinitesimale Volumen dV, handelt es sich um die *Quelldichte* des Strömungsfeldes an einer bestimmten Stelle – im Falle einer Senke ist die Quelldichte negativ. Der Nablaoperator ermöglicht es, die Quelldichte elegant durch ein *formales* Skalarprodukt ausdrücken:

Statt „Dichte der Ergiebigkeit“ sagt man lieber Quelldichte.

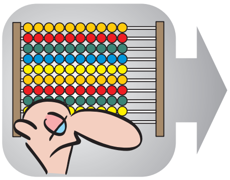
$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}\right) = \underline{\underline{\vec{\nabla}\bullet\vec{v}}} \qquad (6.1.6)$$

Die Operation „Nabla punkt Vektorfeld“ nennt man *Divergenz* des Vektorfeldes und schreibt alternativ div $\boldsymbol{v}$. Im Falle der Divergenz eines Strömungsfeldes wird damit eine exotische Größe formuliert: „Volumen-Quelldichte“. Damit wird ausgedrückt, wie viel Liter oder Kubikmeter pro Sekunde bezogen auf das jeweilige Volumenelement aussprudelt oder verschwindet (je nach Vorzeichen):

Wir verzichten auf ein Formelzeichen.

$$\text{(Volumen-) Quelldichte}\left[\text{in } \frac{\mathrm{m^3/s}}{\mathrm{m^3}}\right] = \vec{\nabla}\bullet\vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{div}\,\vec{v} \qquad (6.1.7)$$

Die Divergenz ist wegen der Linearität der partiellen Ableitungen und des (formalen) Skalarprodukts eine lineare Operation. Wenn $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ für zwei beliebige Vektorfelder und U (wieder) für ein beliebiges skalares Feld steht, ergeben sich folgende Regeln:



Merksatz 6.1.1

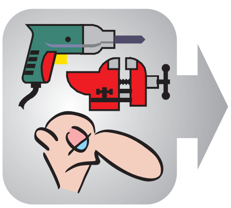
Rechenregeln für Divergenzen:

Linearität: $\vec{\nabla}\bullet\left(a\vec{F}_1+b\vec{F}_2\right)= a\vec{\nabla}\bullet\vec{F}_1+b\vec{\nabla}\bullet\vec{F}_2 \quad \forall a,b\in\mathbb{R}$

Produktregel (1): $\vec{\nabla}\bullet\left(U\cdot\vec{F}\right) = U\vec{\nabla}\bullet\vec{F}+\vec{F}\bullet\vec{\nabla}U$

Produktregel (2): $\vec{\nabla}\bullet\left(\vec{F}_1\times\vec{F}_2\right) = \vec{F}_2\bullet\vec{\nabla}\times\vec{F}_1-\vec{F}_1\bullet\vec{\nabla}\times\vec{F}_2$

Vektorfelder können auch in alternativen Koordinatensystemen dargestellt werden. Die wichtigsten sind wieder Polarkoordinaten (bei ebenen Feldern) sowie Zylinder- und Kugelkoordinaten. Die Richtungen der Feldkomponenten entsprechen denen der Richtungsvektoren in den *Bildern 3.2.5* und *3.2.6*. Um rasch Divergenzen ohne Rücktransformation in kartesische Koordinaten ermitteln zu können, muss man wissen, wie diese Operation im alternativen Koordinatensystem vonstattengeht. Wir ersparen uns das Nachrechnen:



Merksatz 6.1.2

Koordinatendarstellungen der Divergenzen:

Polar-: $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$

Zylinder-: $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\cdot F_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$

Kugel-: $\vec{\nabla}\bullet\vec{F}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\cdot F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(F_\vartheta\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}+\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}\right)$

Lassen Sie sich bitte von den komplizierten Koordinatendarstellungen nicht abschrecken! Bei entsprechenden Feld-Symmetrien bringen sie beträchtliche Erleichterungen.

Wie praktisch das Arbeiten mit dem Nablaoperator ist, zeigt sich, wenn es um die wichtigste Teilmenge aus der Menge der Vektorfelder geht – um Potenzialfelder/konservative Felder. Potenzialfelder sind Vektorfelder, die sich als Gradient eines skalaren Feldes darstellen lassen (*s.* (*5.4.10*)). Prüfen wir, ob sich Besonderheiten bei der Berechnung der Divergenzen ergeben.

(6.1.8)

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\phi:\ \vec{\nabla}\bullet\vec{F}=\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla}\phi=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi$$
$$=\underline{\underline{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi:=\Delta\phi}}$$

Vorsicht Benennungskonflikt! Der Laplace-Operator könnte mit dem „Delta“ (für Differenz) verwechselt werden!

Formal ergibt sich aus dem skalaren Produkt aus zwei Nablaoperatoren wieder ein Differenzialoperator, mit dem die Divergenz eines Potenzialfeldes direkt aus der Potenzialfunktion berechnet werden kann. Prüfen Sie nach: Bilden Sie zuerst den Gradienten und führen danach das skalare Produkt mit dem Nablaoperator aus – Sie erhalten dasselbe Ergebnis wie bei Anwendung des Operatorkonstrukts. Der neue (skalare) Operator heißt *Laplace-Operator* und erhält ein umgedrehtes

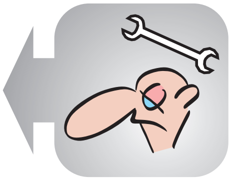
Nabla (ohne Pfeil) als Operatorzeichen. Auch für die Operationen mit dem Laplace-Operator benötigt man Darstellungen in den drei wichtigsten Koordinatensystemen:

Koordinatendarstellungen der Laplace - Operation:

Polar-: $\Delta\phi(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi}$

Zylinder-: $\Delta\phi(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$

Kugel-: $\Delta\phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)+\sin^2\vartheta\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}\right\}$



Merksatz 6.1.3

Die Anwendung des *Divergenz*-Operators auf ein Strömungsfeld liefert fast gratis die Quellergiebigkeiten (positiv und negativ) für alle infinitesimalen Volumenelemente innerhalb einer geschlossenen Oberfläche. „Summiert“ man all diese lokalen Ergiebigkeiten auf, erhält man die Ergiebigkeit des kompletten „Quell-Senk-Ensembles“ innerhalb des Gebiets. Die Summe lässt sich durch ein Volumenintegral über das Gebiet ausdrücken:

Keine Sorge, die Koordinatendarstellungen sind Bestandteil Ihrer Formelsammlung.

$$\phi = \int_{(V)} \vec{\nabla}\bullet v\,\mathrm{d}V \quad \left(\text{bzw.} \iiint_{(V)} \vec{\nabla}\bullet v\,\mathrm{d}V\right) \qquad (6.1.9)$$

Wir erinnern uns: Die Gesamt-Ergiebigkeit eines Quellgebietes wurde in (*6.1.1*) durch ein Flächenintegral über eine geschlossene Hülle ausgedrückt. Die Überlegungen an den infinitesimalen Volumenelementen liefern jetzt eine Alternative: Die komplette Ergiebigkeit kann alternativ durch ein Volumenintegral berechnet werden (*s.* (*6.1.9*)). Genau das ist auch die Aussage des nach Gauß benannten *Integralsatzes* für stetig differenzierbare dreidimensionale Vektorfelder:

Bitte unbedingt noch einmal zurückblättern, denn das Ergebnis (Gaußscher Integralsatz) ist überwältigend.

Gaußscher Integralsatz (für Vektorfelder):

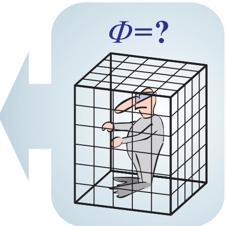
$\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ \vec{r}\mapsto\vec{F}(\vec{r})$, stetig differenzierbar

Dem Vektorfeld sei ein beliebiges kompaktes Gebiet zugeordnet:

(V) Gebiet im $\mathbb{R}^3$, (∂V) einfach geschlossene Hüllfläche von (V),
$\mathrm{d}\vec{A}$ nach außen weisender infinitesimaler Flächenvektor, $\mathrm{d}\vec{A}\subset(\partial V)$

Dann sind die folgenden Integrale gleichwertig:

$$\oint_{(\partial V)} \vec{F}\bullet\mathrm{d}\vec{A} = \int_{(V)} \vec{\nabla}\bullet\vec{F}\,\mathrm{d}V \quad \left(\text{wenn Sie mögen auch so: } \oiint_{(\partial V)} \vec{F}\bullet\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_{(V)} \vec{\nabla}\bullet\vec{F}\,\mathrm{d}V\right)$$



Merksatz 6.1.4

Mit dem Gaußschen Integralsatz ist Ihr Rüstzeug zur Bearbeitung von „Quellen und Senken“ komplett und kann an praktischen Beispielen erprobt werden.

6.2 Vektorfelder mit Quellen und Senken

Klammern Sie sich nie an Denkmodelle. Werfen Sie sie gnadenlos über Bord, wenn sie ihre Schuldigkeit getan haben!

Sie haben sicherlich schon gemerkt, dass man das Beispiel mit dem Taucher im Käfig nicht überstrapazieren darf. Es ist zwar verlockend, einen verängstigten Taucher zur „Quelle“ werden zu lassen, er verkompliziert aber weitere Überlegungen unnütz. Wir lassen deshalb den Taucher fort und sehen das Meerwasser als ideale inkompressible Flüssigkeit an. Unter diesen Voraussetzungen kann sich in einem Unterwassergebiet weder Quelle noch Senke befinden. Es ist nun einmal nicht möglich, dass Wasser aus dem Nichts entstehen bzw. ins Nichts verschwinden kann. Unter Wasser gilt daher für die Quelldichten durchweg die folgende homogene *partielle Differenzialgleichung*:

(6.2.1)

$$\vec{\nabla} \bullet \vec{v} = 0 \quad \left(\text{bzw. } \operatorname{div} \vec{v} = 0\right)$$

Sehen wir uns an, was für Konsequenzen diese Gleichung im Falle des wasserdurchströmten Rohres nach sich zieht (*vgl. Abschnitt 5.1*).

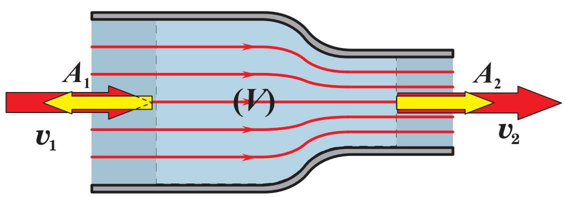


Bild 6.2.1
Planfigur zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung

Wir teilen ein (Integrations-)Gebiet (V) vor und nach der Engstelle ab und nehmen an, dass es sich um eine wirbelfreie Strömung handelt. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert dann die Konstanz des Produktes aus Strömungsgeschwindigkeit und Querschnittsfläche (*Kontinuitätsgleichung*):

(6.2.2)

$$\int_{(V)} \vec{\nabla} \bullet \vec{v} \, \mathrm{d}V = \oint_{\partial V} \vec{v} \bullet \mathrm{d}\vec{A} = -\bar{v}_1 A_1 + \underbrace{0}_{\text{Rohrinnenwand}} + \bar{v}_2 A_2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\bar{v}_1 A_1 = \bar{v}_2 A_2}}$$

Integrationen über die beiden Querschnittflächen kann man sich sparen, wenn man mit den mittleren Strömungsgeschwindigkeiten in Hauptstromrichtung arbeitet. Die Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit bei Verringerung der Querschnittsfläche wurde bereits in *Abschnitt 5.1* angesprochen.

Geheimnisumwittert: elektrische Quellen und Senken

Sehen wir uns einmal eine „elektrische Quelle“ an. Der Zusammenhang zwischen Quelle und Vektorfeld wird im stationären Fall durch die ersten beiden *Maxwellschen Gleichungen* beschrieben:

(6.2.3)

$$\text{I: } \vec{\nabla} \bullet \vec{E} = \tfrac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad \text{II: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Wenn doch: www.PTB.de

Die zweite Gleichung ist nichts weiter als die in eine Vektorgleichung gezwängte Integrabilitätsbedingung (*5.4.11*) und sichert hier, dass stationäre *E*-Felder immer Potenzialfelder sind (*s.* (*5.4.16*)). Legen Sie bitte keine Geheimnisse in die *Feld-*