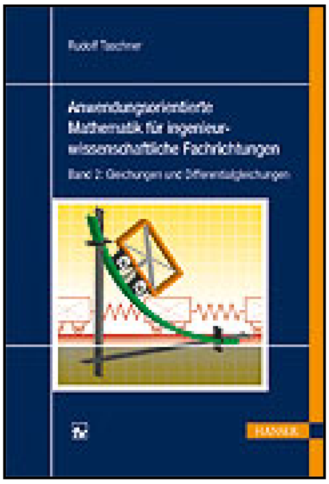
HANSER



Leseprobe

Rudolf Taschner

Anwendungsorientierte Mathematik für ingenieurwissenschaftliche Fachrichtungen

Band 2: Gleichungen und Differentialgleichungen

ISBN (Buch): 978-3-446-44056-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-43980-1

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44056-2

sowie im Buchhandel.

2 Nichtlineare Gleichungen

2.1 Halbierungs- und Newtonverfahren

Am Anfang der Mathematik stand das von babylonischen Gelehrten erörterte Problem, von einer positiven Größe a die Wurzel $\sqrt{a}$ zu ermitteln. Anhand des Beispiels $\sqrt{10}$ hatten wir im ersten Kapitel des ersten Bandes die Vorgangsweise der Babylonier erklärt: $x_0 = 3$ ist als Ansatz einer Näherung an $\sqrt{10}$ gut geeignet, denn es gilt $3^2 = 9 \approx 10$. Keine andere Quadratzahl kommt so nahe an 10 heran. Wenn man allgemein von einer Näherung x_n an $\sqrt{a}$ ausgeht, stellt a/x_n ebenfalls eine Näherung an $\sqrt{a}$ dar, und es ist klar, dass $\sqrt{a}$ selbst zwischen x_n und a/x_n liegt. Darum ermittelten die Babylonier die nächstbessere Näherung x_{n+1} an $\sqrt{a}$ als Mittel der beiden genannten, also als

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Dies ist die berühmte Formel des babylonischen Wurzelziehens. Im konkreten Beispiel $a = 10$ und $x_0 = 3$ bekommt man der Reihe nach:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = \frac{19}{6} = 3.16666\ldots ,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{6} + \frac{10}{\frac{19}{6}}\right) = \frac{721}{228} = 3.16228\ldots ,$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{721}{228} + \frac{10}{\frac{721}{228}}\right) = \frac{1\,039\,681}{328\,776} = 3.16227\ldots ,$$

also schon nach wenigen Schritten ein bemerkenswert genaues Resultat.

Die Methode der Babylonier war erstaunlich geschickt. Ein schlichteres Gemüt würde die Berechnung von $\sqrt{10}$ eher so vollziehen: Vor die Aufgabe gestellt, jenes positive $x = c$ zu ermitteln, das bei $f(x) = x^2 - 10$ die Gleichung $f(x) = 0$ löst, geht es von den zwei Näherungen $x = a_0 = 3$ und $x = b_0 = 4$ aus, für die einerseits $a_0 < b_0$ gilt und andererseits $f(a_0)$ und $f(b_0)$ verschiedene Vorzeichen tragen – im vorliegenden Beispiel ist $f(3) = -1 < 0$ und $f(4) = 6 > 0$. Denn man darf erwarten, dass die gesuchte Lösung $x = c$ zwischen a_0 und b_0 zu liegen kommt. Angenommen, der schlichte Mathematiker ist bereits zu zwei Werten a_n und b_n mit $a_n < b_n$ gelangt, bei denen $f(a_n)$ und $f(b_n)$ verschiedene Vorzeichen tragen, er daher davon ausgehen kann, dass die gesuchte Lösung $x = c$ mit $f(c) = 0$ zwischen a_n und b_n zu liegen kommt. Dann liegt es wieder nahe, den Mittelwert

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$$

zu berechnen und für diesen das Vorzeichen von $f(c_n)$ zu ermitteln. Falls zufällig $f(c_n) = 0$ zutrifft, liegt mit $x = c = c_n$ die gesuchte Lösung vor. Im Allgemeinen wird einem dieses Glück aber nicht hold sein: es wird $f(c_n) \neq 0$ gelten. Tragen $f(a_n)$ und $f(c_n)$ verschiedene Vorzeichen, setzen wir $a_{n+1} = a_n$ und $b_{n+1} = c_n$. Tragen hingegen $f(c_n)$ und $f(b_n)$ verschiedene Vorzeichen, setzen wir $a_{n+1} = c_n$ und $b_{n+1} = b_n$. Auf diese Weise wird die Lösung $x = c$ mithilfe der ineinandergeschachtelten Intervalle $[a_0; b_0]$, $[a_1; b_1]$, ..., $[a_n; b_n]$, $[a_{n+1}; b_{n+1}]$, ..., jedes nachfolgende nur halb so lang wie das vorhergehende, immer genauer erfasst. Im vorliegenden Beispiel mit $f(x) = x^2 - 10$ lauten diese Rechnungen und die zugehörigen Intervalle der Reihe nach so:

$$\begin{array}{ll}
[3;4]\ , & f\left(\dfrac{3+4}{2}\right) = f(3.5) = 2.25 > 0 \\
[3;3.5]\ , & f\left(\dfrac{3+3.5}{2}\right) = f(3.25) = 0.56\ldots > 0 \\
[3;3.25]\ , & f\left(\dfrac{3+3.25}{2}\right) = f(3.125) = -0.23\ldots < 0 \\
[3.125;3.25]\ , & f\left(\dfrac{3.125+3.25}{2}\right) = f(3.1875) = 0.16\ldots > 0 \\
[3.125;3.1875]\ , & f\left(\dfrac{3.125+3.1875}{2}\right) = f(3.15625) = -0.03\ldots < 0 \\
[3.15625;3.1875]\ , & f\left(\dfrac{3.15625+3.1875}{2}\right) = f(3.171875) = 0.06\ldots > 0 \\
\ldots\ . &
\end{array}$$

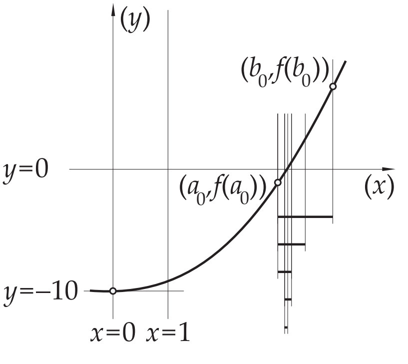


Bild 2.1 Veranschaulichung des Halbierungsverfahrens: Die enger werdenden Intervalle grenzen eine Nullstelle immer genauer ein.

Selbst nach diesen aufwendigen Rechnungen nur zu dem Resultat gelangt zu sein, dass $\sqrt{10}$ im Intervall $[3.15625; 3.171875]$ liegt, ist enttäuschend. Das hier geschilderte *Halbierungsverfahren* sticht gegen das babylonische Wurzelziehen jämmerlich ab. Trotzdem sollte man es nicht völlig verachten: Denn als Verfahren ist es nicht allein für einfach gestrickte Funktionen f wie $f(x) = x^2 - 10$, sondern auch für sehr kompliziert gestaltete stetige Funktionen $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ geeignet: Wenn man im offenen Intervall zwei Werte a und b mit $a < b$ so ausmachen kann, dass $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen tragen, führt mit dem Ansatz $a_0 = a$ und $b_0 = b$ das

Halbierungsverfahren – wenn auch mühselig langsam – im Allgemeinen zum Ziel, eine Lösung $x = c$ der Gleichung $f(x) = 0$ zu finden.

Als die Differentialrechnung erfunden wurde, bestand der Ehrgeiz der Mathematiker darin, für stetig differenzierbare Funktionen $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ Verfahren zur Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ zu entwerfen, die nicht so beschwerlich wie das Halbierungsverfahren, sondern ähnlich wirksam wie das babylonische Wurzelziehen sind. Newton selbst verfiel auf eine brillante Idee, die später von seinen Zeitgenossen Joseph Raphson und Thomas Simpson in diejenige Form gegossen wurde, wie sie hier dargestellt wird: Newtons Gedanke war, von einer Näherung x auszugehen, für die $f(x)$ bereits ziemlich nahe bei Null liegt. (Wir gehen in Bild 2.2 von $f(x) > 0$ aus.) Legt Newton durch den Punkt $\big(x, f(x)\big)$ die Tangente an die Funktionskurve, stimmt diese in einer kleinen Umgebung von x ziemlich gut mit der Funktionskurve überein. Darum liegt es nahe, jenen Wert x^*, bei dem die Tangente die x-Achse schneidet, als nächstbessere Näherung an die gesuchte Nullstelle der Funktion f zu wählen. Weil das Anstiegsdreieck dieser Tangente (im hier betrachteten Fall $x^* < x$) offenkundig $x - x^*$ als Länge der waagrechten Kathete und $f(x)$ als Länge der senkrechten Kathete besitzt und $f'(x)$ den Anstieg der Hypotenuse dieses Anstiegsdreiecks mitteilt, besteht die Beziehung

$$\frac{f(x)}{x - x^*} = f'(x) \ .$$

Aus ihr entnimmt man nach den Umformungen $f(x) = f'(x)(x - x^*)$ und $x - x^* = f(x)/f'(x)$ die Formel

$$\boxed{x^* = x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung nennen wir die *Newtonformel*. Sie stellt sich tatsächlich als unerhört mächtiges Instrument für das Lösen von Gleichungen heraus.

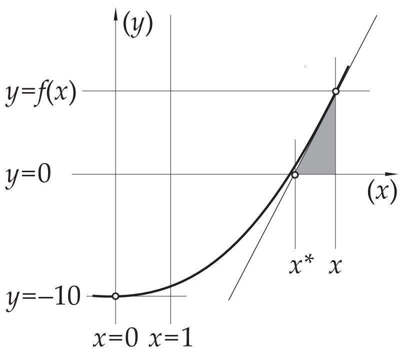


Bild 2.2 Veranschaulichung des Newtonverfahrens: Das grau unterlegte Dreieck ist das Anstiegsdreieck an die Funktionskurve, dessen Hypotenuse den Anstieg $f'(x)$ besitzt.

Als Beispiel betrachten wir für ein positives a und eine Zahl n mit $n > 1$ die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n - a$. Wegen $f'(x) = nx^{n-1}$ lautet für sie die Newtonformel

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^n - a}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n}\left((n-1)\,x + \frac{a}{x^{n-1}}\right) .$$

Zunächst bemerken wir, dass die Newtonformel hier bei $x = 0$ nicht definiert ist. Wir schränken uns auf positive x ein, was naheliegt, weil uns die positive Lösung der Gleichung $x^n = a$ interessiert. Im Falle $n = 2$ liefert die Newtonformel offenkundig die Methode des babylonischen Wurzelziehens. Nun aber können wir mit der Newtonformel beliebige Wurzeln positiver Größen ermitteln. Als Beispiel sei gezeigt, wie schnell mit ihr zum Beispiel $\sqrt[3]{2}$ berechnet werden kann: Wir betrachten also $f(x) = x^3 - 2$ mit der Newtonformel

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{2}{x^2}\right)$$

und beginnen bei $x = 1$. Dann ergibt sich der Reihe nach:

$$\frac{1}{3}\left(2 \times 1 + \frac{2}{1^2}\right) = \frac{4}{3} = 1.33333\ldots$$

$$\frac{1}{3}\left(2 \times \frac{4}{3} + \frac{2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}\right) = \frac{91}{72} = 1.26388\ldots\,.$$

Für die praktischen Rechnungen braucht man natürlich nicht die exakten Brüche in die Newtonformel einzusetzen. Es reicht, Dezimalzahlen einzusetzen, welche mit diesen Brüchen im Rahmen der vereinbarten Rechengenauigkeit – hier zum Beispiel auf fünf Nachkommastellen – übereinstimmen. Darum lauten die weiteren Rechnungen:

$$\frac{1}{3}\left(2 \times 1.26388 + \frac{2}{1.26388^2}\right) = 1.25993$$

$$\frac{1}{3}\left(2 \times 1.25993 + \frac{2}{1.25993^2}\right) = 1.25992\,.$$

Und weil bei 1.25992 die Newtonformel den gleichen Wert reproduziert, ist mit $\sqrt[3]{2} = 1.25992$ der gesuchte Wert auf fünf Nachkommastellen genau berechnet.

2.2 Kontrahierende Abbildungen

Woran liegt es, dass bei einer stetig differenzierbaren Funktion $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ die durch die Newtonformel

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

an allen Stellen x aus J mit $f'(x) \neq 0$ definierte Funktion g ein so machtvolles Instrument zur Ermittlung der Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$ darstellt? Wobei die geschickte Wahl des ersten Näherungswertes an diese Lösung den eigentlich heiklen Punkt im gesamten Verfahren darstellt: Dieser Näherungswert muss sich nämlich „genügend nahe“ bei der gesuchten Lösung aufhalten – und es ist alles andere als einfach, für dieses „genügend nahe“ klare Kriterien zu nennen. Wenn zum Beispiel die Funktionskurve starke Schwankungen aufweist, ist die Gefahr gegeben, dass die Tangente weit weg von der gesuchten Nullstelle die x-Achse schneidet und das Verfahren im Nirgendwo versandet.

Wenn das Newtonverfahren funktioniert, liegt es daran, dass die Funktion g an der gesuchten Lösung $x = c$ der Gleichung $f(x) = 0$ einen sogenannten *Fixpunkt* besitzt. Damit ist gemeint, dass $x = c$ die *Fixpunktgleichung* $g(x) = x$ löst. Erst im 20. Jahrhundert hatte der polnische Mathematiker Stefan Banach in voller abstrakter Allgemeinheit erkannt, wie man bei Vorliegen einer im Grunde sehr einfachen Eigenschaft der Funktion g zur Lösung der Fixpunktgleichung $g(x) = x$ gelangen kann.

Banach geht von einer Funktion $g : A \longrightarrow A$ aus. Er verlangt also, dass die Funktionswerte von g wieder im Argumentwertebereich von g liegen. Denn nur dann kann man von irgendeinem Argumentwert x aus A ausgehen, diesen in die Funktion g einsetzen und hieraus einen Funktionswert $x^* = g(x)$ erhalten, der seinerseits wieder als Argumentwert von g zur Verfügung steht. Genau dieses unentwegt Ineinander-Einsetzen, das Beginnen bei einem x_0 aus A und das Berechnen von

$$x_1 = g(x_0)\ , \quad x_2 = g(x_1)\ , \quad \ldots, \quad x_{n+1} = g(x_n)\ , \quad \ldots$$

ist, wenn $g(x)$ für die Newtonformel steht, das Kennzeichen des Newtonverfahrens. Und um die Möglichkeit dieses ständig Ineinander-Einsetzens gewährleisten zu können, muss Banach die Forderung $g : A \longrightarrow A$ erheben.

Als zweites verlangt Banach, dass g eine sogenannte *kontrahierende Abbildung* oder eine *Kontraktion* ist. Damit meint er Folgendes: Es existiert eine positive Größe q mit $q < 1$ und der Eigenschaft, dass für beliebige Argumentwerte x' und x'' aus A

$$\left|g(x') - g(x'')\right| \le q\left|x' - x''\right|$$

zutrifft. In Worten ausgedrückt: Der Abstand zweier Funktionswerte voneinander ist höchstens das q-Fache des Abstandes der Argumentwerte voneinander. Wir schreiben diese Kontraktionsbedingung allgemeiner in der Form

$$\left\|g(x') - g(x'')\right\| \le q\left\|x' - x''\right\|$$

denn der Argumentwertebereich A von g muss nicht unbedingt aus reellen Größen bestehen. Er kann auch aus Vektoren bestehen. Ja – und dies ist ein entscheidender Punkt in Banachs abstrakter Gedankenführung – er kann sogar eine ganz beliebige Menge von „Punkten" sein, einzig ein „Abstand" $\left\|x' - x''\right\|$ zwischen zwei derartigen „Punkten" muss definiert sein. Dabei verlangt Banach von einem *Abstand* nur drei Eigenschaften:

Erstens: Der Abstand von zwei voneinander verschiedenen Punkten ist stets eine positive reelle Größe. Es gilt also bei $x' \neq x''$ stets $\left\|x' - x''\right\| > 0$.

Zweitens: Der Abstand von zwei Punkten ist *symmetrisch*, d.h. unabhängig davon, von welchem der beiden Punkte zu welchem man den Abstand misst. Es gilt also stets $\left\|x' - x''\right\| = \left\|x'' - x'\right\|$.

Drittens: Der Abstand gehorcht der *Dreiecksungleichung*, die Folgendes besagt: Die Summe der Abstände zweier Punkte von einem dritten Punkt ist mindestens so groß, wie der direkte Abstand der beiden Punkte voneinander. Es gilt also stets $\left\|x' - x\right\| + \left\|x'' - x\right\| \ge \left\|x' - x''\right\|$.

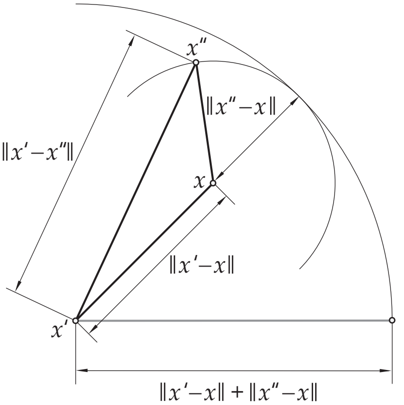


Bild 2.3 Veranschaulichung der Dreiecksungleichung: Keine Seite des Dreiecks mit x, x', x'' als Ecken kann länger sein als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

Wie sich zeigen wird, sind es tatsächlich nur diese drei Eigenschaften eines Abstandes, die in Banachs Überlegungen eine Rolle spielen.

Zunächst überlegen wir uns, dass $g: A \longrightarrow A$ als kontrahierende Abbildung stetig, ja sogar gleichmäßig stetig ist. Zu diesem Zweck betrachten wir ein beliebiges positives ε und wählen $\delta = \varepsilon/2$. Wenn x einen Berührpunkt von A bezeichnet und die beiden Argumentwerte x' und x'' aus A von diesem Berührpunkt weniger als δ entfernt sind, also $\|x' - x\| < \delta$ und $\|x'' - x\| < \delta$ gilt, folgt aus der Kontraktionsbedingung einerseits und der Dreiecksungleichung andererseits

$$\left\|g\left(x'\right) - g\left(x''\right)\right\| \le q\left\|x' - x''\right\| < \left\|x' - x''\right\| \le \left\|x' - x\right\| + \left\|x'' - x\right\| < 2\delta = \varepsilon\,.$$

Damit ist die Stetigkeit von g am Berührpunkt x bereits bewiesen.

Wegen der Stetigkeit von g an allen Berührpunkten von A können wir – und dies soll ab nun geschehen – davon ausgehen, dass die Menge A, wie man sagt, *vollständig* ist, sie alle ihre Berührpunkte enthält.

Als Nächstes überlegen wir uns, dass $g: A \longrightarrow A$ als kontrahierende Abbildung höchstens einen einzigen Fixpunkt besitzen kann. Denn wenn $g\left(x'\right) = x'$ und $g\left(x''\right) = x''$ bei verschiedenen Punkten x' und x'' zuträfe, ergäbe sich aus

$$\left\|x' - x''\right\| = \left\|g\left(x'\right) - g\left(x''\right)\right\| \le q\left\|x' - x''\right\|$$

nach Division durch die positive Größe $\left\|x' - x''\right\|$ der Widerspruch $1 \le q$ zur Voraussetzung $q < 1$.

Schließlich zeigt Banach, dass mit dem Verfahren, von irgendeinem x_0 aus A auszugehen und der Reihe nach $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_{n+1} = g(x_n)$, … zu berechnen, eine Methode zur Ermittlung der Lösung $x = c$ der Fixpunktgleichung $g(x) = x$ vorliegt. Zuerst schätzt Banach mithilfe der Kontraktionsbedingung, und diese mehrfach angewendet, für irgendeine Zahl m den Abstand zwischen x_{m+1} und x_m so ab:

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \left\|g(x_m) - g(x_{m-1})\right\| \le q\,\|x_m - x_{m-1}\| = q\left\|g(x_{m-1}) - g(x_{m-2})\right\| \le$$

$$\le q^2\,\|x_{m-1} - x_{m-2}\| \le \ldots \le q^m\,\|x_1 - x_0\|\,.$$