



# Springer-Lehrbuch

W. Hauger · V. Mannl<sup>†</sup> · W. Wall · E. Werner

# Aufgaben zu Technische Mechanik 1–3

Statik, Elastostatik, Kinetik

7. Auflage



Springer

Professor Dr. Werner Hauger  
Institut für Mechanik  
Technische Universität Darmstadt  
Hochschulstraße 1  
64289 Darmstadt  
Deutschland

Professor Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall  
Lehrstuhl für Numerische Mechanik  
Technische Universität München  
Boltzmannstraße 15  
85748 Garching  
Deutschland

Dr. Volker Mann†  
Professor Dr. mont. Dr. h.c. Ewald Werner  
Lehrstuhl für Werkstoffkunde und  
Werkstoffmechanik  
Technische Universität München  
Boltzmannstraße 15  
85748 Garching  
Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-21185-0

e-ISBN 978-3-642-21186-7

DOI 10.1007/978-3-642-21186-7

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1991, 1994, 2001, 2005, 2006, 2008, 2012

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

## Vorwort

Ein wirkliches Verständnis der Mechanik kann man nur durch das selbständige Lösen von Aufgaben erlangen. In diesem Sinne ist die vorliegende Aufgabensammlung als studienbegleitendes Übungsbuch konzipiert, dessen Inhalt sich am Stoff der Vorlesungen in Technischer Mechanik an deutschsprachigen Hochschulen orientiert. Sie bietet den Studierenden die Möglichkeit, über die Lehrveranstaltungen hinaus ihren Kenntnisstand zu überprüfen und zu verbessern.

Die Aufgaben dienen dem Zweck, die prinzipielle Anwendung der Grundgleichungen der Mechanik zu üben. Die Lösung wird für jede Aufgabe stichwortartig erläutert. Dabei haben wir uns meist auf einen Lösungsweg beschränkt (auf die Anwendung der graphischen Verfahren haben wir verzichtet). Wir raten den Studierenden allerdings dringend, die Lösungen nicht nur nachzuvollziehen, sondern die Aufgaben selbständig zu bearbeiten und auch andere als die von uns gewählten Lösungswege zu gehen. Die zum Lösen der Aufgaben benötigten Formeln wurden kapitelweise zusammengestellt. Sie geben dem Leser die bequeme Möglichkeit zum Nachschlagen, können aber keinesfalls ein Lehrbuch ersetzen. Die Terminologie und die Symbole stimmen weitestgehend mit denjenigen überein, die in den Springer-Lehrbüchern über Technische Mechanik verwendet werden.

Aus pädagogischen Gründen haben wir die Reihenfolge des Inhalts umgestellt. In der aktuellen Auflage des Buches folgen die Lösungen kapitelweise der Formelsammlung und den Aufgaben. Das Erscheinungsbild des Buches wurde den Lehrbüchern angepasst. Außerdem wurden einige neue Aufgaben, die aktuellen Prüfungsfragen entsprechen, im Kapitel Elastostatik eingefügt.

Wir danken an dieser Stelle allen Kollegen und Mitarbeitern, die uns bei der Abfassung, Gestaltung und Durchsicht der Auflagen bis zur jetzigen unterstützt haben, insbesondere Frau C. Schwarz und Herrn C. Kremphaszky. Dem Springer-Verlag danken wir für die Berücksichtigung unserer Wünsche und für die ansprechende Ausstattung des Buches.

Darmstadt und München, im Juli 2011

W. Hauger  
W. Wall  
E. Werner

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Statik</b>	<b>1</b>
	Formelsammlung . . . . .	3
	Aufgaben . . . . .	13
	I.1 Zentrale Kraftsysteme . . . . .	13
	I.2 Allgemeine Kraftsysteme . . . . .	15
	I.3 Schwerpunkt . . . . .	18
	I.4 Lagerreaktionen . . . . .	20
	I.5 Fachwerke . . . . .	24
	I.6 Schnittgrößen . . . . .	26
	I.7 Arbeit . . . . .	30
	I.8 Haftung und Reibung . . . . .	34
	I.9 Seil unter Eigengewicht . . . . .	36
	Lösungen . . . . .	41
	I.1 Zentrale Kraftsysteme . . . . .	41
	I.2 Allgemeine Kraftsysteme . . . . .	48
	I.3 Schwerpunkt . . . . .	54
	I.4 Lagerreaktionen . . . . .	64
	I.5 Fachwerke . . . . .	73
	I.6 Schnittgrößen . . . . .	79
	I.7 Arbeit . . . . .	92
	I.8 Haftung und Reibung . . . . .	103
	I.9 Seil unter Eigengewicht . . . . .	109
<b>II</b>	<b>Elastostatik</b>	<b>121</b>
	Formelsammlung . . . . .	123
	Aufgaben . . . . .	139
	II.1 Zug und Druck . . . . .	139
	II.2 Biegung . . . . .	141
	II.3 Torsion . . . . .	147
	II.4 Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	149
	II.5 Spannungszustand, Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz . . . . .	156
	II.6 Knickung . . . . .	158
	II.7 Querkraftschub . . . . .	160

Lösungen . . . . .	163
II.1 Zug und Druck . . . . .	163
II.2 Biegung . . . . .	171
II.3 Torsion . . . . .	190
II.4 Prinzip der virtuellen Kräfte . . . . .	195
II.5 Spannungszustand, Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz . . . . .	216
II.6 Knickung . . . . .	222
II.7 Querkraftschub . . . . .	228
<b>III Kinetik</b>	<b>239</b>
Formelsammlung . . . . .	241
Aufgaben . . . . .	257
III.1 Kinematik des Punktes . . . . .	257
III.2 Kinematik des starren Körpers . . . . .	259
III.3 Kinetik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme . . . . .	263
III.4 Relativbewegung des Massenpunktes . . . . .	267
III.5 Kinetik des starren Körpers . . . . .	270
III.6 Schwingungen . . . . .	281
III.7 Prinzipien der Mechanik . . . . .	284
Lösungen . . . . .	291
III.1 Kinematik des Punktes . . . . .	291
III.2 Kinematik des starren Körpers . . . . .	298
III.3 Kinetik des Massenpunktes und der Massenpunktsysteme . . . . .	310
III.4 Relativbewegung des Massenpunktes . . . . .	322
III.5 Kinetik des starren Körpers . . . . .	332
III.6 Schwingungen . . . . .	370
III.7 Prinzipien der Mechanik . . . . .	379



Kapitel I  
**Statik**





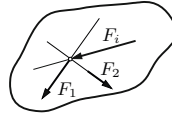
# I Statik

## Formelsammlung

### I.1 Zentrale Kraftsysteme

Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}.$$



Komponentenschreibweise:

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0, \quad \sum_i F_{iz} = 0.$$

### I.2 Allgemeine Kraftsysteme

a) Momentenvektor einer Kraft  $\mathbf{F}$  bezüglich eines Punktes  $A$ :

$$\mathbf{M}^{(A)} = \mathbf{r} \times \mathbf{F};$$

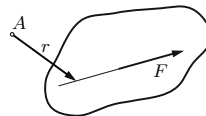
$\mathbf{r}$ : Vektor von  $A$  zu einem Punkt auf der Wirkungslinie von  $\mathbf{F}$ .

Komponentenschreibweise:

$$M_x^{(A)} = r_y F_z - r_z F_y,$$

$$M_y^{(A)} = r_z F_x - r_x F_z,$$

$$M_z^{(A)} = r_x F_y - r_y F_x.$$



b) Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \sum_i \mathbf{M}_i^{(A)} = \mathbf{0}.$$

(Die Momentensumme enthält auch eingeprägte und Reaktionsmomente).

Komponentenschreibweise:

$$\begin{aligned} \sum_i F_{ix} &= 0, & \sum_i F_{iy} &= 0, & \sum_i F_{iz} &= 0, \\ \sum_i M_{ix}^{(A)} &= 0, & \sum_i M_{iy}^{(A)} &= 0, & \sum_i M_{iz}^{(A)} &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Kräftegleichgewichtsbedingungen können ganz oder teilweise durch Momentengleichgewichtsbedingungen bezüglich geeigneter Punkte ersetzt werden.

### 1.3 Schwerpunkt

a) Volumenschwerpunkt:

$$x_s = \frac{1}{V} \int x \, dV, \quad y_s = \frac{1}{V} \int y \, dV, \quad z_s = \frac{1}{V} \int z \, dV.$$

Zusammengesetzter Körper:

$$x_s = \frac{\sum_i x_i V_i}{\sum_i V_i}, \quad y_s = \frac{\sum_i y_i V_i}{\sum_i V_i}, \quad z_s = \frac{\sum_i z_i V_i}{\sum_i V_i};$$

$x_i, y_i, z_i$ : Schwerpunktskoordinaten der Teilkörper,

$V_i$ : Teilvolumina.

b) Flächenschwerpunkt (ebene Flächen):

$$x_s = \frac{1}{A} \int x \, dA \quad \text{bzw.} \quad x_s = \frac{\sum_i x_i A_i}{\sum_i A_i}, \quad y_s: \text{entsprechend.}$$

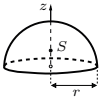
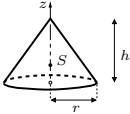
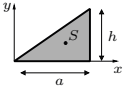
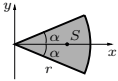
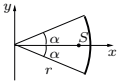
Flächenmomente erster Ordnung (statische Momente):

$$S_y = \int x \, dA, \quad S_x = \int y \, dA.$$

c) Linienschwerpunkt (ebene Kurven):

$$x_s = \frac{1}{l} \int x \, dl \quad \text{bzw.} \quad x_s = \frac{\sum_i x_i l_i}{\sum_i l_i}, \quad z_s: \text{entsprechend.}$$

Tabelle I.3.1: Schwerpunktskoordinaten

Halbkugel 	$V = \frac{2\pi}{3} r^3$	$z_s = \frac{3}{8} r$
Kreiskegel 	$V = \frac{\pi}{3} h r^2$	$z_s = \frac{1}{4} h$
rechtwinkeliges Dreieck 	$A = \frac{1}{2} a h$	$x_s = \frac{2}{3} a, \quad y_s = \frac{1}{3} h$
Kreisabschnitt 	$A = \alpha r^2$	$x_s = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Kreisbogen 	$l = 2 \alpha r$	$x_s = r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

## I.4 Lagerreaktionen

Tabelle I.4.1: Lagerungen für ebene Tragwerke (Auswahl)






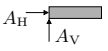

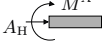



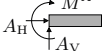







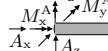
	Symbol	Schnittbild
Pendelstütze (einwertig)		
gelenkiges Lager (einwertig)		
gelenkiges Lager (zweiwertig)		
Parallelführung (zweiwertig)		
Schiebehülse (zweiwertig)		
Einspannung (dreiwertig)		

Tabelle I.4.2: Lagerungen für räumliche Tragwerke (Auswahl)

	Symbol	Schnittbild
gelenkiges Lager (einwertig)		
gelenkiges Lager (dreiwertig)		
Loslager (vierwertig)		
Einspannung (sechswertig)		

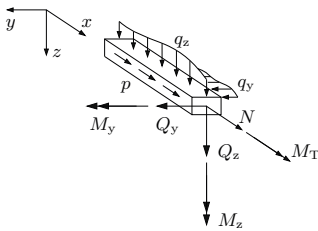
Systeme, deren Reaktionen sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen eindeutig ermitteln lassen, nennt man statisch bestimmt. Andernfalls heißen sie statisch unbestimmt.

### 1.5 Fachwerke

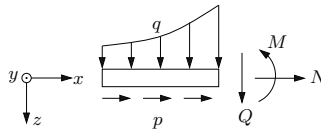
An Knoten von Fachwerken sind die Beziehungen zentraler Kraftsysteme (s. Abschn. I.1) anzuwenden. Für ein Gesamtfachwerk gelten die Beziehungen für allgemeine Kraftsysteme und Lagerreaktionen (s. Abschn. I.2 und I.4).

### 1.6 Schnittgrößen

- a) Vorzeichenkonvention: Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in die positiven Koordinatenrichtungen.



räumlicher Fall



ebener Fall

- b) Zusammenhang zwischen der Belastung und den Schnittgrößen:







$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -p, & \frac{dM_y}{dx} &= Q_z, & \frac{dQ_z}{dx} &= -q_z, \\ & & \frac{dM_z}{dx} &= -Q_y, & \frac{dQ_y}{dx} &= -q_y. \end{aligned}$$

Ebener Sonderfall

( $q_y \equiv 0, q_z = q, Q_y \equiv 0, Q_z = Q, M_y = M, M_z \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= -p, \\ \frac{dM}{dx} &= Q, & \frac{dQ}{dx} &= -q & \rightarrow & \frac{d^2M}{dx^2} = -q. \end{aligned}$$

Tabelle I.6.1: Randbedingungen (ebener Fall)

		$N$	$Q$	$M$
freies Ende (ohne eingeprägte Lasten)		0	0	0
gelenkiges Lager		$\neq 0$	$\neq 0$	0
		0		
Parallelführung		$\neq 0$	0	$\neq 0$
Schiebehülse		0	$\neq 0$	$\neq 0$
Einspannung		$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

c) Föpl-Symbol:

$$\langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ (x - a)^n & \text{für } x > a. \end{cases}$$

Rechenregeln:

$$\frac{d}{dx} \langle x - a \rangle^n = n \langle x - a \rangle^{n-1},$$

$$\int \langle x - a \rangle^n dx = \frac{1}{n+1} \langle x - a \rangle^{n+1} + C.$$

## 1.7 Arbeit

a) Prinzip der virtuellen Arbeit

Wenn die virtuelle Arbeit der äußeren Lasten (Kräfte und Momente) bei einer beliebigen virtuellen Starrkörperverrückung eines mechanischen Systems aus seiner Lage verschwindet, ist diese Lage eine Gleichgewichtslage:

$$\delta W = 0: \quad \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_j M_j \cdot \delta \varphi_j = 0;$$

$\delta \mathbf{r}_i$ : virtuelle Verrückung des Kraftangriffspunkts,

$\delta \varphi_j$ : virtuelle Verdrehung des Körpers, an dem das Moment angreift.

- b) Gleichgewichtslagen eines konservativen Systems mit einem Freiheitsgrad und ihre Stabilität

Die Potentialkurve hat an der Stelle, die einer Gleichgewichtslage zugeordnet ist, eine waagrechte Tangente:

$$E'_p = 0 ; \quad E_p: \text{potentielle Energie};$$

( )': Ableitung nach der Koordinate des Freiheitsgrads.

Stabilitätskriterium:

$$E''_p > 0: \text{ stabile Gleichgewichtslage,}$$

$$E''_p < 0: \text{ instabile Gleichgewichtslage,}$$

$$E''_p = 0: \text{ höhere Ableitungen entscheiden über die Stabilität.}$$

Beispiele für Potentiale:

- 1) Potential einer Federkraft / eines Drehfeder Moments

$$E_p = \frac{1}{2} c x^2, \quad E_p = \frac{1}{2} c_T \varphi^2 ;$$

$c$ : Federkonstante,  $x$ : Längenänderung der (ungespannten) Feder,  
 $c_T$ : Drehfederkonstante,  $\varphi$ : Verdrehwinkel.

- 2) Potential einer Gewichtskraft

$$E_p = Gz ;$$

$z$ : Höhe des Schwerpunkts über einem Nullniveau.

## 1.8 Haftung und Reibung

- a) Bedingung für Haften:

$$|H| \leq \mu_0 N ;$$

$H$ : Haftungskraft,  $\mu_0$ : Haftungskoeffizient,  $N$ : Normalkraft.

Die Haftungskraft ist eine Reaktionskraft. Ihre Orientierung ergibt sich bei statischer Bestimmtheit aus den Gleichgewichtsbedingungen.