Werner Helm
Andreas Pfeifer
Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

2., aktualisierte Auflage

fv

HANSER

Helm • Pfeifer • Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Autoren

Prof. Dr. Werner Helm
Prof. Dr. Andreas Pfeifer
Prof. Dr. Joachim Ohser

unter Neubearbeitung von Teilen des Buches
Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen
von Mitautor Prof. Dr. Günter Zeidler

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

2., aktualisierte Auflage

Mit 119 Bildern, 368 Beispielen und 225 Aufgaben mit Lösungen

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren

Prof. Dr. Werner Helm — *Kapitel 6 und 8*; Überarbeitung der *Kapitel 1, 2, 5*
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Werner.Helm@h-da.de

Prof. Dr. Andreas Pfeifer — *Kapitel 7*; Überarbeitung der *Kapitel 1, 2, 5*
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Andreas.Pfeifer@h-da.de

Prof. Dr. Joachim Ohser — *Kapitel 3 und 4*
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Joachim.Ohser@h-da.de

FSC MIX Papier aus verantwortungsvollen Quellen FSC® C016439 www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-446-44593-2
E-Book-ISBN 978-3-446-44592-5

www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Die Autoren mit Unterstützung von
Dr.-Ing. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrerfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der fünften Auflage erschienenen Buches *Praktische Finanzmathematik* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper

Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Für die vorliegende 2. Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen, Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Darmstadt, im Sommer 2015 — Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	$8{,}6\overline{3}$	7	6,5	$6{,}9\overline{6}$	8,33	10,55

■

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P;K)$ bzw. $(P;k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** $\boldsymbol{f}$. Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.
Als Symbole dienen

$$f\colon\ M_1 \to M_2 \quad \text{oder ausführlicher} \tag{1.1a}$$

$$y = f(x),\ x \in D(f). \tag{1.1b}$$

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,
y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell" künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y, die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift" und „Definitionsbereich" (siehe 1.1b) [1]. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geqq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geqq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.
Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y=f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$, so gilt hier $(x-3)^2 \geqq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:
$f_2(x) \geqq f_2(5) = 5$. ■

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0{,}5x + 1$, $-3 \leqq x \leqq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leqq x \leqq 5$, ist ein Parabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

[1] Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1,2, \dots n$, besteht.