

Werner Helm
Andreas Pfeifer
Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors



2., aktualisierte Auflage



HANSER

Helm • Pfeifer • Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Autoren

Prof. Dr. Werner Helm

Prof. Dr. Andreas Pfeifer

Prof. Dr. Joachim Ohser

unter Neubearbeitung von Teilen des Buches

Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen

von Mitautor Prof. Dr. Günter Zeidler

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

2., aktualisierte Auflage

Mit 119 Bildern, 368 Beispielen und 225 Aufgaben mit Lösungen



Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Autoren

Prof. Dr. Werner Helm
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Werner.Helm@h-da.de

Kapitel 6 und 8; Überarbeitung der Kapitel 1, 2, 5

Prof. Dr. Andreas Pfeifer
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Andreas.Pfeifer@h-da.de

Kapitel 7; Überarbeitung der Kapitel 1, 2, 5

Prof. Dr. Joachim Ohser
Hochschule Darmstadt
FB Mathematik und Naturwissenschaften
Joachim.Ohser@h-da.de

Kapitel 3 und 4



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN 978-3-446-44593-2
E-Book-ISBN 978-3-446-44592-5

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.
Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG genannten Sonderfälle –, reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2015 Carl Hanser Verlag München
www.hanser-fachbuch.de
Lektorat: Christine Fritzsch
Herstellung: Katrin Wulst
Satz: Die Autoren mit Unterstützung von
Dr.-Ing. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Hubert & Co, Göttingen
Printed in Germany

Vorwort

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehrererfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der fünften Auflage erschienenen Buches *Praktische Finanzmathematik* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper

Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Für die vorliegende 2. Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen, Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Darmstadt, im Sommer 2015

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	13
1.1	Mathematische Grundbegriffe	13
1.1.1	Funktionsbegriff	13
1.1.2	Ein Funktionenreservoir	17
1.1.3	Eigenschaften von Funktionen	21
1.1.4	Umkehrfunktion	24
1.2	Funktionen für ökonomische Zusammenhänge	29
1.3	Funktionen und ökonomisches Wachstum	30
	Aufgaben 1.1 bis 1.18	33
2	Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	36
2.1	Einführung	36
2.2	Mathematische Grundlagen	37
2.2.1	Grenzwert	37
	Aufgaben 2.1 bis 2.6	43
2.2.2	Stetigkeit	44
2.2.3	Ableitung	47
	Aufgaben 2.7 bis 2.15	55
2.2.4	Differenzial	56
	Aufgabe 2.16	60
2.2.5	Untersuchung von Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen	60
	Aufgaben 2.17 und 2.18	66
2.2.6	Nichtlineare Gleichungen in ökonomischen Problemen und deren Lösung	66
	Aufgaben 2.19 und 2.20	70
2.3	Ökonomische Probleme und Ableitungen von Funktionen	71
	Aufgaben 2.21 bis 2.29	78
2.4	Reagibilität und Ableitungen	79
	Aufgaben 2.30 bis 2.41	96
2.5	Extremwertaufgaben der Ökonomie	98
2.5.1	Extrema für Kostenfunktionen	98
	Aufgaben 2.42 bis 2.48	109
2.5.2	Gewinnmaximum	110
	Aufgaben 2.49 bis 2.57	140
2.6	Die Regel von de L'HOSPITAL	142
	Aufgabe 2.58	145
2.7	Reihen und Potenzreihen	145
2.7.1	Reihen	145
2.7.2	Potenzreihen	150
2.8	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	153
2.8.1	MACLAURINSche Reihen	153

2.8.2	Allgemeine TAYLOR-Reihen	157
	Aufgaben 2.59 bis 2.61	158
2.9	Komplexe Zahlen	159
2.9.1	Definition und Darstellung komplexer Zahlen	159
2.9.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	163
3	Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.1	Definition und Darstellungsform von Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.2	Partielle Differenziation	172
	Aufgaben 3.1 bis 3.3	175
3.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	175
	Aufgabe 3.4	177
3.4	Tangentialebene und das totale Differenzial	178
3.4.1	Geometrische Betrachtungen	178
	Aufgabe 3.5	179
3.4.2	Das totale Differenzial	179
3.5	Spezielle Ableitungstechniken	181
3.5.1	Differenziation nach einem Parameter	181
3.5.2	Implizite Differenziation	182
3.6	Anwendungen	182
3.6.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	183
3.6.2	Lokale Extrema und Sattelpunkte	185
3.6.3	Fehlerrechnung	190
3.6.4	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	191
	Aufgaben 3.6 bis 3.8	194
4	Integralrechnung	195
4.1	Integration als Umkehrung der Differenziation – das unbestimmte Integral	195
	Aufgaben 4.1 bis 4.3	202
	Aufgabe 4.4	203
4.2	Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Integralrechnung	204
	Aufgaben 4.5 und 4.6	209
4.3	Uneigentliche Integrale	209
4.4	Geometrische Anwendungen	211
4.4.1	Flächenberechnung	211
4.4.2	Länge einer Kurve	213
4.4.3	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	214
4.5	Anwendung der Integralrechnung in ökonomischen Zusammenhängen	216
4.6	Numerische Integration	219
	Aufgabe 4.7	221
4.7	Doppelintegrale	221
4.7.1	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	221
4.7.2	Doppelintegrale in Polarkoordinaten	224
	Aufgabe 4.8	227

5	Lineare Algebra in Betriebs- und Volkswirtschaft	228
5.1	Einführende Beispiele ökonomischen Inhalts	228
	Aufgaben 5.1 und 5.2	231
5.2	Mathematische Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	231
5.2.1	Matrizen und Vektoren sowie ihre Spezifizierungen	232
	Aufgaben 5.3 und 5.4	236
5.2.2	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	236
	Aufgaben 5.5 bis 5.8	245
5.2.3	Inverse Matrix	245
	Aufgaben 5.9 bis 5.12	251
5.2.4	GAUSSscher Algorithmus	252
	Aufgaben 5.13 und 5.14	257
5.2.5	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	258
	Aufgaben 5.15 bis 5.17	262
5.3	Matrizen und Vektoren in Betriebs- und Volkswirtschaft	263
	Aufgaben 5.18 bis 5.22	272
5.4	Mathematische Grundlagen linearer algebraischer Gleichungssysteme	275
5.4.1	Einführung	275
5.4.2	Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme: Begriff und Methode	277
	Aufgaben 5.23 bis 5.25	280
5.4.3	GAUSSscher Algorithmus zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme	281
	Aufgaben 5.26 bis 5.30	291
5.4.4	Basislösungen	292
	Aufgaben 5.31 bis 5.36	298
5.4.5	Zusammenfassende Aussagen über lineare algebraische Gleichungssysteme	299
	Aufgaben 5.37 bis 5.40	301
5.5	Lineare algebraische Gleichungssysteme in Betriebs- und Volkswirtschaft	302
	Aufgaben 5.41 und 5.42	310
5.6	Determinante einer Matrix	311
	Aufgaben 5.43 und 5.44	314
5.7	Das Eigenwertproblem für quadratische Matrizen	315
	Aufgabe 5.45	319
6	Lineare Optimierung in Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft	320
6.1	Problemstellungen und Grundbegriffe	320
6.1.1	Aufgabenstellung und Beispiele	320
6.1.2	Das Rechnen mit Ungleichungen	323
6.1.3	Die grafische Lösung	326
6.1.4	Allgemeine mathematische Formulierung des linearen Optimierungsproblems	331
6.2	Der Simplex-Algorithmus	333
6.2.1	Die Grundideen des Simplex-Verfahrens	333
6.2.2	Der Austauschschritt im Simplex-Tableau	334
6.2.3	Die Simplex-Regeln	338

6.2.4	Der Simplex-Algorithmus (Phase II)	340
6.2.5	Theoretische Ergänzungen und Sonderfälle	341
6.3	Der Simplex-Algorithmus für allgemeine lineare Programme	343
6.3.1	Minimumprobleme, Gleichungsrestriktionen, Varianten der Vorzeichen- beschränkungen, obere und untere Schranken	343
6.3.2	Simplex-Algorithmus: Phase I und Phase II	346
6.4	Dualität	348
6.4.1	Primal-Dual Beziehung und Dualitätssätze	348
6.4.2	Primal-Dual Beziehung und Komplementarität	351
6.4.3	Dualer Simplex-Algorithmus (Phase III)	353
6.4.4	Ökonomische Interpretationen der Größen in den Simplex-Tableaus	356
6.5	Weiterführende Aspekte	357
6.5.1	Modellbildung	357
6.5.2	Spezialfälle linearer Optimierung	359
6.5.3	Sensitivitätsanalyse bei der linearen Optimierung	362
6.5.4	Parametrische (lineare) Optimierung	363
6.5.5	Effizienz und Vergleich von LP-Solvern	363
6.5.6	Ganzzahlige lineare Optimierung	363
6.5.7	Nichtlineare Optimierung	364
	Aufgaben 6.1 bis 6.11	364
7	Finanzmathematik	368
7.1	Zinsrechnung	369
7.1.1	Einfache Zinsen und Zinseszinsen	369
7.1.2	Vorschüssige Verzinsung	375
7.1.3	Gemischte Verzinsung	377
7.1.4	Unterjährige Verzinsung	378
7.1.5	Stetige Verzinsung	380
	Aufgaben 7.1 bis 7.11	381
7.2	Barwert, Äquivalenz und Rendite	382
7.2.1	Barwert und Äquivalenz	382
7.2.2	Kapitalwertmethode	384
7.2.3	Rendite	386
7.2.4	Mittlerer Zahlungstermin und Duration	390
	Aufgaben 7.12 bis 7.20	391
7.3	Rentenrechnung	392
7.3.1	Nachschüssige und vorschüssige Renten	392
7.3.2	Aufgeschobene, abgebrochene und ewige Rente	398
7.3.3	Jährliche Verzinsung – unterjährige Rentenzahlung	400
7.3.4	Unterjährige Verzinsung	405
	Aufgaben 7.21 bis 7.31	406
7.4	Kreditrechnung	408
7.4.1	Grundbegriffe	408
7.4.2	Ratentilgung	410
7.4.3	Annuitätentilgung	410

7.4.4	Unterjährige Verzinsung, Tilgung und Rückzahlung	414
7.4.5	Ratenkredit	421
	Aufgaben 7.32 bis 7.41	422
7.5	Kurs- und Renditerechnung	424
7.5.1	Grundlagen	424
7.5.2	Zinsschuld	425
7.5.3	Annuitätenschuld	429
	Aufgaben 7.42 bis 7.48	433
7.6	Abschreibung	434
7.6.1	Grundlagen	434
7.6.2	Lineare Abschreibung	435
7.6.3	Geometrisch-degressive Abschreibung	436
7.6.4	Weitere Abschreibungsarten	437
7.6.5	Vergleich linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung	439
	Aufgaben 7.49 bis 7.55	441
7.7	Weitergehende Betrachtungen	442
7.7.1	Rendite und Risiko	442
7.7.2	„Neuere“ Finanzprodukte	444
	Aufgaben 7.56 bis 7.58	445
8	Weitere praktische Probleme und deren Lösung	446
8.1	Nichtlineare Optimierung	446
8.1.1	Problemstellung, Grundlagen und grafische Lösungen	447
8.1.2	Karush-Kuhn-Tucker-Theorie (KKT-Theorie)	454
8.1.3	Nichtlineare Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	458
8.1.4	Bausteine der allgemeinen NLP-Techniken (Übersicht)	460
	Aufgaben 8.1 bis 8.5	462
8.2	Problemlösungen mit einem Standard-Software-System	462
8.2.1	(Allgemeine) LP-Probleme	463
8.2.2	Ausgewählte NLP-Probleme	467
8.2.3	Portfolio-Probleme	468
8.2.4	Transportprobleme	471
8.2.5	Zuordnungsprobleme	473
8.2.6	Netzwerkprobleme	474
8.2.7	Netzplantechniken	476
8.2.8	Kundenwanderung	483
8.2.9	Verwaltung von Modellen: Algebraische Eingabe und Solver	485
	Lösungen	488
	Literaturverzeichnis	521
	Sachwortverzeichnis	523

1 Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen

Zusammenhänge zwischen den Größen wirtschaftlicher Erscheinungen als mathematische Funktion zu betrachten und aus ihrer formal-mathematischen Analyse inhaltlich-ökonomische Informationen zu gewinnen, hat sich zu einem bewährten Hilfsmittel entwickelt. Davon zeugen unter anderem die vielfältigen Produktionsfunktionen in Betriebs- und Volkswirtschaft sowie die verschiedenen Typen von Wachstumsfunktionen.

1.1 Mathematische Grundbegriffe

1.1.1 Funktionsbegriff

BEISPIEL

1.1 Zuordnungen als ein Grundelement von Funktionen

Die Herstellung eines Produktes verursacht Kosten. Setzt man sie ins Verhältnis zur Zahl der erzeugten Exemplare des Produktes (zur Produktionsmenge), erhält man die Durchschnittskosten. Letztere werden auch Stückkosten oder spezifische Kosten genannt. Sowohl Kosten als auch Durchschnittskosten ändern sich mit der Produktionsmenge. Dabei wird – gewisse Produktionsbedingungen innerhalb eines Zeitraumes als konstant vorausgesetzt – jeder Produktionsmenge eine bestimmte Kostensumme zugeordnet, und umgekehrt gehört zu jeder Kostensumme eine bestimmte Produktionsmenge. Für die Durchschnittskosten gilt nur Ersteres, während zu einer gegebenen Höhe von Durchschnittskosten durchaus zwei verschiedene Produktionsmengen gehören können. *Tabelle 1.1* zeigt eine mögliche konkrete Zuordnung der genannten ökonomischen Größen.

Tabelle 1.1 Produktionsmenge P (in Mengeneinheiten ME), Kosten K (in Geldeinheiten GE) und Durchschnittskosten k (in GE/ME)

P in ME	2	4	6	8	10	12	14	16
K in GE	38,6	47,6	51,8	56	65	83,6	116,6	168,8
k in GE/ME	19,3	11,9	8,6 $\bar{3}$	7	6,5	6,9 $\bar{6}$	8,33	10,55

Das Charakteristische im *Beispiel 1.1* besteht darin, dass jedem Wert P genau ein Wert K bzw. genau ein Wert k zugeordnet wird. Es ergeben sich Wertepaare $(P; K)$ bzw. $(P; k)$.

Sind M_1 und M_2 zwei Mengen reeller Zahlen ($M_1, M_2 \subseteq \mathbf{R}$), und ist jedem $x \in M_1$ genau ein $y \in M_2$ zugeordnet, so heißt die dadurch gegebene paarweise Zuordnung reelle **Funktion** f . Dabei heißt M_1 Definitionsbereich von f ; er wird mit $D(f)$ bezeichnet.

Als Symbole dienen

$$f: M_1 \rightarrow M_2 \quad \text{oder ausführlicher} \quad (1.1a)$$

$$y = f(x), x \in D(f). \quad (1.1b)$$

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,

y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y , die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b)¹⁾. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x - 3)^2 + 1$, so gilt hier $(x - 3)^2 \geq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$$f_2(x) \geq f_2(5) = 5. \quad \blacksquare$$

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0,5x + 1$, $-3 \leq x \leq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist ein Pabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

¹⁾ Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, besteht.