



Leseprobe

Frank Paech

Analysis - anschaulich und anwendungsorientiert

ISBN (Buch): 978-3-446-43175-1

ISBN (E-Book): 978-3-446-43592-6

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-43175-1>

sowie im Buchhandel.

Funktionen mit zwei und mehr Variablen

3.

Die Kapitelüberschrift dürfte verwundern, denn in dem vorherigen Kapitel schienen bereits Funktionen mit mehr als zwei Variablen im Spiel zu sein. Ein oberflächlicher Rückblick täuscht, die Beschreibung von Bewegungszuständen mehr oder weniger komplizierter Systeme im Raum erfordert letzten Endes nur eine einzige unabhängige Variable – die Zeit. Natürlich können durchaus mehrere Variable involviert sein, dann handelt es sich aber um abhängige Variable. Betrachten wir einmal die Funktionen, mit denen sich die Bewegung von Systemen unter dem Einfluss empirischer Kräfte erfassen lassen, als „abgehakt“! Wenn es nun um die Kräfte und deren Entstehung selber geht, reichen Funktionen mit einer unabhängigen Variablen nicht mehr aus. Noch schlimmer: Außer der Gravitationskraft müssen Funktionen, mit denen sich die Kräfte beschreiben lassen, mühsam durch Integral- oder Differenzialgleichungen ermittelt werden. Aus diesem Grund ist es unumgänglich, sich mit der Erweiterung der Differenzial- und Integralrechnung auf Funktionen mit mehreren Variablen – der sogenannten Analysis II – zu befassen.

Newton'sche Bewegungsgleichungen sind gewöhnliche Differenzialgleichungen.

Trotz alledem: Empirische Formeln sind vielfach unverzichtbar.

3.1 Mehrstellige Funktionen und ihre Ableitungen

Was sich hinter den für den Anwender relevanten mehrstelligen Funktionen verbirgt, kann uns – wie zu seiner Zeit Otto Lilienthal – ein gefiederter Funktionsspezialist zeigen – ein *Weißstorch*. Stellen Sie sich vor, Sie sollten ein maximal 4 kg schweres Fluggerät konstruieren, das über Rechenkapazitäten sowohl für komplizierte Flugmanöver und als auch für weiträumige Navigation (ca. 10 000 km) verfügen soll. Weiterhin müssen sowohl der Bordrechner als auch die Fliegerei mit geringsten Energiemengen auskommen. Die Aufgabe wäre ein Alptraum. Ein Storch löst das Energiesparproblem beim Fliegen durch Ausnutzung der Strömungsgeschwindigkeit der Luft. Die Strömungsgeschwindigkeit ist in Betrag und Richtung von Ort zu Ort unterschiedlich und kann auch noch mit der Zeit variieren. Das heißt: Jeder Kombination aus Ortsvektor und Zeit ist genau ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet:

$$\vec{v}: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{r}, t \mapsto \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Es handelt sich also um eine eindeutige Zuordnung – um eine Funktion. Wenn man optional anstelle der Vektoren die Koordinaten ausschreibt, erkennt man, dass die Funktion drei vierstellige (drei Stellen für den Ort, eine für die Zeit) Funktionen involviert. Ein derartiges Funktionskonstrukt nennt man *Vektorfeld*.

Ein Alptraumprojekt!

Geier und Adler mögen entschuldigen – auch Lilienthal studierte Aerodynamik anhand von Störchen.

(3.1.1)

„Lebenswichtige“
Begriffe:
Vektorfeld
Feldstärke

Ein Vektorfeld aus konstanten Funktionen heißt homogen.

Barometer

Thermometer

Windsack

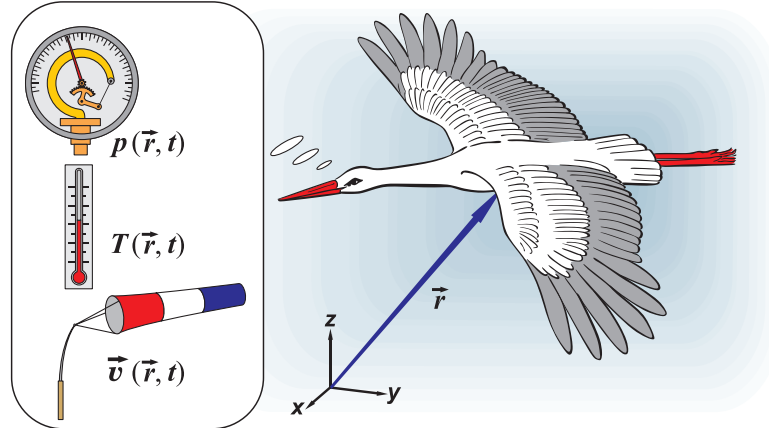


Bild 3.1.1

Ein Spezialist für Felder

Das Feld, mit bzw. in dem sich Störche auskennen, heißt dementsprechend *Strömungsfeld*. Die (vektoriellen) Funktionswerte eines Vektorfeldes heißen *Feldstärken*. Üblicherweise werden in Naturwissenschaft und Technik, solange es nicht um grundsätzliche mathematische Betrachtungen geht, für Feldstärke und Funktionen wie in (3.1.2) gleiche Bezeichnungen verwendet.

Tatsächlich muss sich unser filigranes Supertier auch noch mit anderen Funktionen auseinandersetzen. Das sind unter anderem Luftdruck und Lufttemperatur. Auch diese Größen sind Funktionen des Ortes und der Zeit. Allerdings handelt es sich bei den Funktionswerten um Skalare – man spricht von *skalaren Feldern*.

(3.1.2)

$$p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r}, t \mapsto p(\vec{r}, t) \text{ bzw. } T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \vec{r}, t \mapsto T(\vec{r}, t)$$

Die skalaren Felder (3.1.2) bestehen jeweils aus einer einzigen vierstelligen Funktion. Da für Naturwissenschaft und Technik sowohl skalare als auch vektorielle Felder eine zentrale Rolle spielen, werden wir überwiegend Funktionen vom „Feldtyp“ als Beispiele für den weiteren Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung bevorzugen. Die zugehörigen Begriffe sind in dem folgenden Anatomieschild illustriert:

Überaus wichtige Vokabeln!

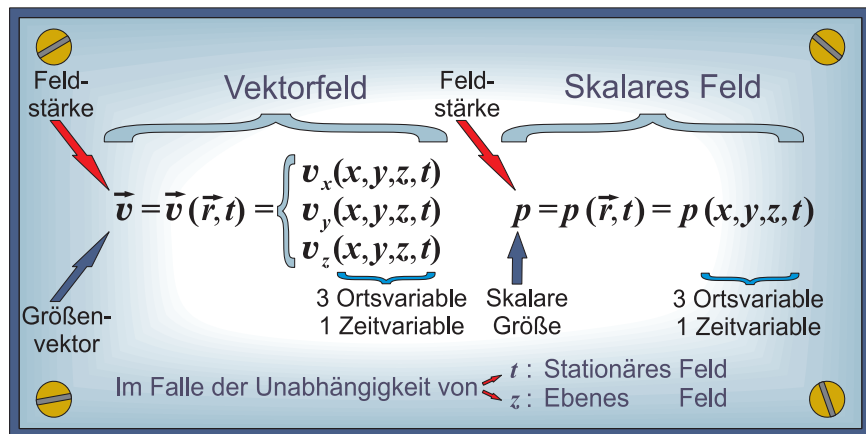


Bild 3.1.2

„Anatomie“ von räumlichen Feldern

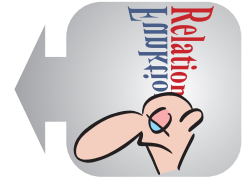
Sollte ein Feld nur von zwei Ortsvariablen abhängen, spricht man von einem ebenen Feld. Ein wichtiger Sonderfall sind Vektorfelder, die lediglich konstante Funktionen enthalten. Derartige Felder heißen *homogen*. Der folgende Merksatz zeigt, was bei Funktionen/Feldern und Relationen unter „...stellig“ gemeint ist.

Merke:

Funktionen sind Spezialfälle der *Relationen*. Eine Relation mit n Koordinaten heißt n -stellig. Handelt es sich bei der Relation um eine *Funktion*, ergibt sich eine Koordinate (*abhängige Variable*) durch eine Zuordnungsvorschrift aus den übrigen (*Argumente, unabhängige Variable*): Die n -stellige Relation wird als $(n - 1)$ -stellige Funktion angesprochen. Eine zweistellige Funktion ist demnach Spezialfall einer dreistelligen Relation.

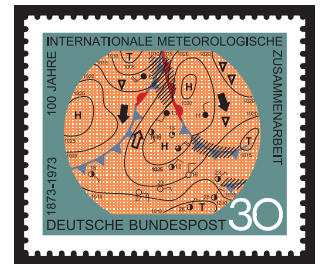
Oft ein nützliches Modell: ein homogenes Vektorfeld

Zur Festigung der Begriffe:



Merksatz 3.1.1

Leider ist der oben angesprochene Ausbau der Differenzial- und Integralrechnung mit Schwierigkeiten verbunden. Wir erinnern uns, zweistellige reelle Relationen lassen sich problemlos in der Ebene – einem zweidimensionalen Raum – grafisch darstellen. Bereits grafische Darstellungen dreistelliger Relationen sind problematisch. Sie erfordern einen dreidimensionalen Raum. Steht nur eine Zeichenebene zur Verfügung, müssen mehr oder weniger aufwendige Perspektivtechniken herangezogen werden. Aber für die Darstellung von Feldfunktionen reicht der dreidimensionale Anschauungsraum nicht mehr aus. Die drei für den Storch wichtigen Feldgrößen in *Bild 3.1.1* sind die für die jeweilige Wetterlage relevanten Größen. Damit stellt sich eine Wetterkarte als „plattgebügelte“ Darstellung der Felder Druck (mithilfe von Isobaren) und Strömungsgeschwindigkeit (durch gefiederte Fähnchen) heraus. Mathematische Überlegungen lassen sich natürlich auf der Basis populärer Wetterkartentechnik nicht illustrieren.



Gibt die für das Wetter relevanten Felder nur grob wieder: die Wetterkarte

Für das weitere Vorgehen gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder verzichtet man vollständig auf grafische Illustrationen. Das liegt nahe, denn die Graphen der Feldrelationen liegen außerhalb des Anschauungsraumes. Man könnte aber auch zunächst in die „Niederungen“ zweistelliger Funktionen herabsteigen. Dann liegen die Graphen im Anschauungsraum und man könnte versuchen, die dort gewonnenen Erkenntnisse auf reale Felder zu übertragen. Auch wenn die zweite Möglichkeit sich freundlicher anhört, hat sie doch gewichtige Nachteile. Sie verleitet dazu, sich bei Feldern an Anschauungen zu klammern, wo keine Anschauung (mehr) möglich ist. Wir riskieren trotzdem diesen Weg.

Benutzen Sie die Anschauungsmodelle als Starthilfe in höhere Sphären!

Zunächst betrachten wir anstelle der geneigten ebenen Bergwiese (s. *Bild 2.5.1*) eine gewölbte Bergwiese als Graph einer zweistelligen Funktion mit dem phantasielosen Namen f (s. *Bild 3.1.3*). Der Definitionsbereich sei ein in der x,y -Ebene gelegenes Rechteck.

$$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z \quad \text{mit} \quad z = -0,01(x^2 + y^2) + 0,38x + 0,32y + 6,03$$

Gämse und Maulwurf im Bild weisen auf die eindeutige Zuordnung hin: Jedem Koordinatenpaar des Definitionsbereichs (x, y) ist genau eine Höhe z zugeordnet. Um den räumlichen Eindruck besser zu vermitteln, wurden noch sogenannte *Höhenlinien* eingetragen. Höhenlinien sind Graphen zweistelliger Relationen, die sich aus der Funktion ergeben, indem man die abhängige Variable – hier z – zu

f als Feld: eben, skalar, stationär, Feldstärke (Höhe) z

(3.1.3)

Höhenlinien:
überaus wichtig!

Parametern degradiert und für sie ein passendes Höhenraster vorgibt. Die Höhenlinien für unser Beispiel ergeben sich aus den folgenden Relationen:

(3.1.4)

$$H : -0,01(x^2 + y^2) + 0,38x + 0,32y + 6,03 = h, \quad h \in \{3; 4; \dots; 12\}, \quad (x, y) \in \mathbb{D}$$

Höhenlinien haben den großen Vorteil, dass für sie keine perspektivische Darstellung notwendig ist. Man kann sie ohne Verzerrung in die x,y -Ebene einzeichnen. Die Graphen ergeben dann eine Vogelperspektive des Graphen der zweistelligen Funktion. Diese Darstellungstechnik wird auf Wetterkarten für Luftdruckfelder angewendet. Die Relationsgraphen heißen dort *Isobaren*.

Wichtig:
Die Gämse steht am Punkt (x, y, z) . Da es sich hier bei der z -Koordinate um die abhängige Variable handelt, ist es auch üblich zu sagen: „Die Gämse steht an der Stelle (x, y) .“

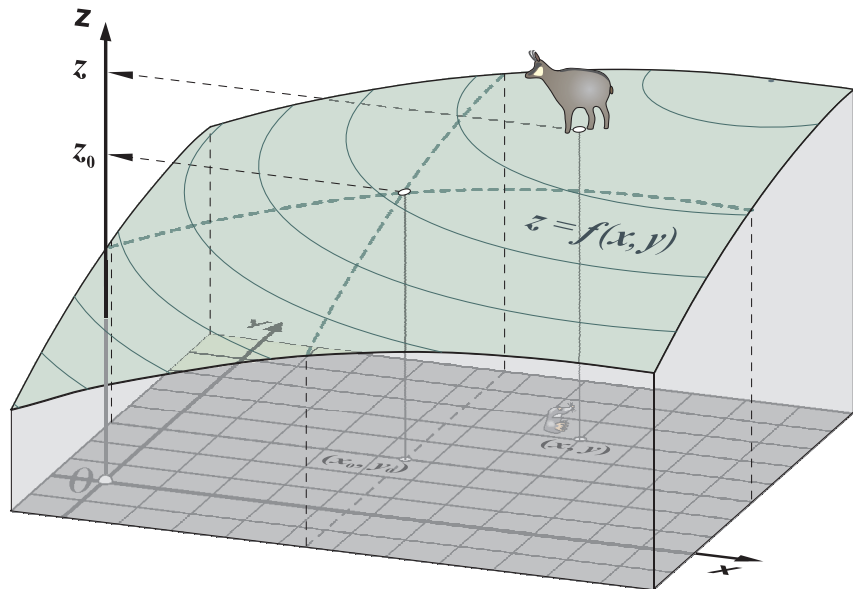
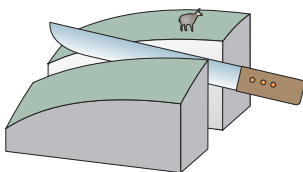


Bild 3.1.3
Bergwiese als Graph einer zweistelligen Funktion



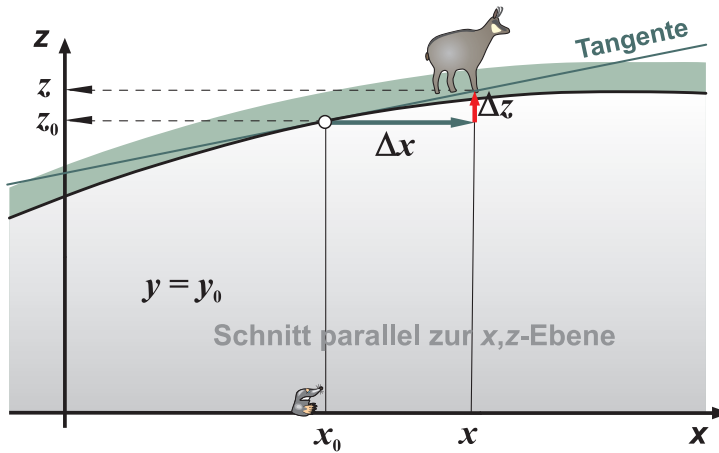
Schnitt entlang des Trampelpfades

In der x,y -Ebene in Bild 3.1.3 finden Sie noch einen weiteren mit (x_0, y_0) bezeichneten Punkt. Anders als im Falle des Punktes (x, y) sind dessen Variablen bestimmte Werte zugewiesen (hier: $x_0 := 9, y_0 := 6$). Man spricht von *gebundenen Variablen*. (Üblicherweise kennzeichnet man gebundene Variable mit Indizes und lässt sie wieder fort, sobald die Variable in die Freiheit entlassen wird.) Auf der Wiese erkennen Sie zwei (spezielle) Trampelpfade der Gämse. Der eine verläuft in x -, der andere in y -Richtung – beide enthalten den durch das Wertetripel aus den gebundenen Variablen gebildeten Punkt (x_0, y_0, z_0) .

Wir wollen zunächst den unter dem Bergwiesengeviert liegenden Erdblock entlang des in x -Richtung verlaufenden Trampelpfades parallel zur x,z -Ebene aufschneiden. Keine Sorge, die Gämse steht während des Schnittes außerhalb der Trampelpfade und wird die Prozeduren schadlos überstehen. Das folgende Bild zeigt, dass der Pfad zum Graphen einer ganz gewöhnlichen einstelligen Funktion mit der gebundenen Variable y_0 als Parameter wird:

(3.1.5)

$$\varphi_{y_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto z \quad \text{mit} \quad z = f(x, y_0)$$



Die Gämse steht jetzt an der Stelle x_0, y_0 .

Bild 3.1.4
Schnitt durch das Bergwiesengeviert

In unserem Beispiel ist $y_0 = 6$. Wenn wir das in die konkrete Funktion (3.1.3) einsetzen und die Summanden zusammenfassen, erhalten wir für den Pfad einen harmlosen Parabelbogen:

$$\varphi_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto z \quad \text{mit} \quad z = -0,01x^2 + 0,38x + 7,59$$

Möglicherweise ärgern Sie sich über den neuen Funktionsnamen φ : Zwar geht die „Pfad-Funktion“ (3.1.5) aus der Originalfunktion f hervor, ihre Bezeichnung sollte sich aber wegen der Beschränkung auf eine Variable vom Original unterscheiden – hier wurde „ φ “ gewählt. Funktionsparameter werden in der Regel als tief gestellter Postfix an den Funktionsnamen gehängt. Die durch die Gämse angedeutete Steigung des Pfades in x -Richtung errechnet sich problemlos aus der Ableitung der Funktion φ_6 an der Stelle $x = 9$. In unserem konkreten Beispiel ergibt sich:

$$\frac{d\varphi_6(x)}{dx} = -0,02x + 0,38, \quad \left. \frac{d\varphi_6(x)}{dx} \right|_{x=9} = \underline{\underline{0,2}}$$

Auch wenn das hier noch nicht einsehbar ist: Die Neudefinition einer einstelligen Pfad-Funktion ist zwar korrekt, aber unpraktisch, denn in der Funktionsgleichung steht ohnehin die Originalfunktion f . Also müssen sich Ableitungen und die Berechnung von Steigungen auch mit der Originalfunktion formulieren lassen:

$$\left. \frac{d\varphi_{y_0}(x)}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} := \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$$

Die ∂ -Symbole für die Darstellung des Differenzialquotienten sind notwendig, um anzuzeigen, dass alle Variablen – außer der im Nenner aufgeführten – bei der Grenzwertbildung lediglich Parameterstatus haben.

Entlässt man die Variablen x_0 und y_0 aus ihrer Bindung – das deutet man an, indem man sie indexfrei schreibt – definiert (3.1.8) eine Ableitungsfunktion: Jedem Punkt der x, y -Ebene wird eindeutig die Steigung eines Pfades in x -Richtung zu-

← (3.1.6)

Eine gern verwendete Methode, um Verwandtschaften anzudeuten: Gleiche Bezeichnung, aber andere Schriftart (hier gr.)

← (3.1.7)

Links in (3.1.8) steht der ganz normale Differenzialquotient einer einstelligen Funktion!

← (3.1.8)

Lassen Sie sich nicht von den exotischen Zeichen beeindrucken! Mit ihnen wird lediglich der spezielle Grenzwert des Differenzenquotienten in (3.1.8) formuliert.

geordnet. Bezüglich der Originalfunktion f nennt man diese Ableitungsfunktion *partielle Ableitung nach x* (der Zuweisungsvermerk kann entfallen):

(3.1.9) →

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{oder kurz: } f_x(x, y) \quad \text{oder als Operation: } \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

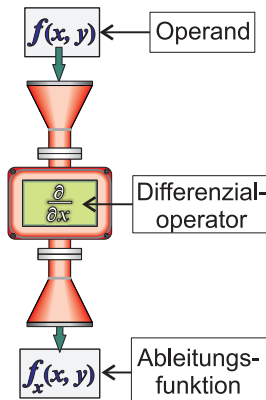
Anstelle des Funktionsnamens kann alternativ der Namen der abhängigen Variablen – hier z – eingesetzt werden.

Eine analoge Betrachtung kann für den Trampelpfad in y -Richtung angestellt werden. Es muss lediglich x gegen y ausgetauscht werden. Der unter dem Bergwiesengeviert liegenden Erdblock wird in diesem Fall parallel zur y,z -Ebene aufgeschnitten. Dabei ergibt sich qualitativ das Gleiche wie in Bild 3.1.3. Auch in y -Richtung lässt sich die Steigung aus dem Grenzwert eines Differenzenquotienten bilden. Für die nach der Freigabe der gebundenen Variablen entstandene *partielle Ableitung nach y* schreibt man:

(3.1.10) →

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \quad \text{oder kurz: } f_y(x, y) \quad \text{oder als Operation: } \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

Das ist der Postfix-Hochstrich: $f'(x)$



Die Darstellung von Ableitungen mithilfe der d - bzw. ∂ -Symbole ist platzraubend. Deshalb begnügt man sich gerne mit kompakten Postfixschreibweisen. Leider kann der Postfixhochstrich bei partiellen Ableitungen nicht benutzt werden, denn es muss zwischen den Ableitungen nach unterschiedlichen Variablen unterschieden werden. Man behilft sich bei partiellen Ableitungen mit tiefgestellten Postfixen. Leider kollidiert diese Schreibweise mit vielen anderen, insbesondere der für Vektorkoordinaten. Sie ist deshalb nur begrenzt einsetzbar. Wie bei einstelligen Funktionen ist es vorteilhaft, das partielle Ableiten als *Operation* aufzufassen. Die abzuleitende Funktion wird zum *Operanden* und die Kombination aus ∂ -Symbolen, Bruchstrich und Variable mutiert zum (Differenzial-) *Operator* (s. nebenstehende „Ein-Ausgabe-Maschine“: Die Phantasiemaschine schluckt Funktionen und formt daraus die Ableitungsfunktion).

Anfangs mögen Ihnen partielle Ableitungen fremd vorkommen. Da sie aber auf Differenzenquotienten mit einer Variablen basieren, ergeben sich **keine** neuen Ableitungsregeln. Sie müssen lediglich Ihr Befremden unterdrücken, wenn vertraute Variable vorübergehend als Parameter angesehen werden müssen. Für unser Bergwiesengebiet ergibt sich:

(3.1.11) →

$$f(x, y) = -0,01(x^2 + y^2) + 0,38x + 0,32y + 6,03$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -0,02x + 0,38, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -0,02y + 0,32$$

Für das partielle Ableiten sind keine neuen Ableitungsregeln erforderlich!

Die Bildung einer partiellen Ableitung beschränkt sich nicht auf zweistellige Funktionen – die folgende Beispielfunktion ist vierstellig!

(3.1.12) →

$$f(x, y, z, t) = 5 \sin(314t - 2x - 3y - 7z), \quad \frac{\partial}{\partial y} f = ?$$