



Werner Helm, Andreas Pfeifer, Joachim Ohser

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Ein Lehr- und Übungsbuch für Bachelors

ISBN (Buch): 978-3-446-44593-2

ISBN (E-Book): 978-3-446-44592-5

Weitere Informationen oder Bestellungen unter

<http://www.hanser-fachbuch.de/978-3-446-44593-2>

sowie im Buchhandel.

Vorwort

Der vorliegende Band richtet sich speziell an Studierende der Wirtschaftswissenschaften im weitesten Sinne, an Berufsakademien, Hochschulen oder Universitäten und ist geeignet als vorlesungsbegleitendes Lehr- und Übungsbuch, kann aber auch wegen der Vielzahl von Beispielen und Aufgaben zum Selbststudium verwendet werden.

Die Autoren sind sich dessen bewusst, dass Studierende der Volks- und Betriebswirtschaft, der Wirtschaftsinformatik oder des Wirtschaftsingenieurwesens sowie verwandter Disziplinen eine fachgerichtete Aufbereitung der Mathematik – auch der Grundlagen der Mathematik – erwarten. Daher sind grundlegende Begriffe der Mathematik wie z. B. der der Funktion von einer oder mehreren Variablen oder der Begriff des Differenzials aus Sicht des Wirtschaftswissenschaftlers dargestellt und mit fachspezifischen Beispielen versehen. Ausführlich dargestellt ist das Thema betriebswirtschaftliche Kostenfunktionen. Insofern ist dieser Band in sich abgeschlossen und kann auch als umfassendes Mathematik-Lehrbuch für Studierende der Wirtschaftswissenschaften dienen. Die Autoren lassen ihre jahrelange vielfältige Lehr-erfahrung in dieses Buch einfließen. Vom Schwierigkeitsgrad zielt das Buch auf die Mitte: Da, wo in den Vorlesungen eine abstraktere Sicht auf die Mathematik betont wird, kann das Buch bei der unverzichtbaren praktischen Umsetzung helfen (Learning by Doing). An anderen Hochschulen mit einem geringen Stundenumfang in Mathematik kann das Buch als Universalreferenz dienen, deckt es doch einen sehr breiten Bereich an Inhalten ab, die auch für Lehrveranstaltungen relevant sind, die nicht die Bezeichnung Mathematik im Titel tragen, wie Kostenrechnung, Finanzierung oder Operations Research.

Das Vorgängerwerk *Lehr- und Übungsbuch MATHEMATIK in Wirtschaft und Finanzwesen* wurde gründlich überarbeitet, aktualisiert und an die Rahmenbedingungen der heutigen Bachelor-Studiengänge angepasst. Es bietet die **grundlegende Wirtschaftsmathematik komplett in einem Band**, geht an einigen Stellen leicht darüber hinaus und bildet Brücken aus zur praktischen Verwendung mathematischer Methoden auch in höheren Semestern. Ob Kostenfunktionen, Kundenwanderung, Lineare oder Nichtlineare Optimierung, Projektplanung oder Netzplantechnik – mit und ohne Computer – das Buch ist aus der Sicht der Nutzer und Anwender entwickelt, ohne dabei die mathematische Substanz zu opfern. Die kompakte und trotzdem vollständige Darstellung der klassischen Finanzmathematik vom Autor des in der fünften Auflage erschienenen Buches *Praktische Finanzmathematik* enthält zahlreiche Anwendungsbeispiele.

In den ersten fünf Kapiteln werden die Grundlagen der Mathematik für Volks- und Betriebswirte dargestellt und anhand von ökonomischen Problemen in einem praxisorientierten Zusammenhang erläutert. Dazu zählen Funktionen, Differenzial- und Integralrechnung und Lineare Algebra – Theorie eng verknüpft mit ökonomischen Anwendungen. Kapitel 6 enthält die Lineare Optimierung mit dem Simplex-Algorithmus. Kapitel 7 umfasst die gesamte Finanzmathematik von der Zinsrechnung bis zu den Abschreibungsarten auf aktuellem Stand und führt heran an die Begriffe *Rendite*, *Risiko*, *Call* und *Put*. In Kapitel 8 werden in knapper

Form weitere praktische Probleme und deren Lösungsmethoden dargestellt. Stichworte sind: Nichtlineare Programmierung, Optimierung eines Portfolios, Netzplantechnik (CPM, PERT) mit GANTT-Charts.

In allen Kapiteln enthalten sind viele praktische und zeitgemäße durchgerechnete Beispiele, die das Erlernen und Behalten der Begriffe wesentlich fördern. In vielen Fällen werden bei der Berechnung und Darstellung der Lösungen professionelle Softwaresysteme wie z. B. das System SAS verwendet. SAS gilt als die weltweit beste Analytics-Software, renommierte wie aufstrebende Fachbereiche *leisten* sich SAS. Damit wird eine Einführung in die Handhabung dieser auch in Wirtschaft und Industrie vielfach verwendeten Software gegeben. Das Buch enthält Hinweise auf Excel-Programme zur Finanzmathematik. Die zahlreichen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, sollen dem Festigen der erworbenen Kenntnisse und natürlich auch der Prüfungsvorbereitung dienen.

Für die vorliegende 2. Auflage wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen, Fehler wurden korrigiert, Ungenauigkeiten klargestellt und Anregungen von Studierenden eingearbeitet.

Autoren und Verlag hoffen, auch mit diesem Buch den Studierenden ein wertvolles Studienmaterial bereitzustellen. Hinweise, Erfahrungen und Anregungen seitens der Studierenden und der Lehrenden nehmen die Autoren und der Verlag gern entgegen.

Darmstadt, im Sommer 2015

Die Autoren

Inhaltsverzeichnis

1	Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	13
1.1	Mathematische Grundbegriffe	13
1.1.1	Funktionsbegriff	13
1.1.2	Ein Funktionenreservoir	17
1.1.3	Eigenschaften von Funktionen	21
1.1.4	Umkehrfunktion	24
1.2	Funktionen für ökonomische Zusammenhänge	29
1.3	Funktionen und ökonomisches Wachstum	30
	Aufgaben 1.1 bis 1.18	33
2	Differenzialrechnung für Funktionen einer reellen Variablen in ökonomischen Problemen	36
2.1	Einführung	36
2.2	Mathematische Grundlagen	37
2.2.1	Grenzwert	37
	Aufgaben 2.1 bis 2.6	43
2.2.2	Stetigkeit	44
2.2.3	Ableitung	47
	Aufgaben 2.7 bis 2.15	55
2.2.4	Differenzial	56
	Aufgabe 2.16	60
2.2.5	Untersuchung von Funktionen mithilfe ihrer Ableitungen	60
	Aufgaben 2.17 und 2.18	66
2.2.6	Nichtlineare Gleichungen in ökonomischen Problemen und deren Lösung	66
	Aufgaben 2.19 und 2.20	70
2.3	Ökonomische Probleme und Ableitungen von Funktionen	71
	Aufgaben 2.21 bis 2.29	78
2.4	Reagibilität und Ableitungen	79
	Aufgaben 2.30 bis 2.41	96
2.5	Extremwertaufgaben der Ökonomie	98
2.5.1	Extrema für Kostenfunktionen	98
	Aufgaben 2.42 bis 2.48	109
2.5.2	Gewinnmaximum	110
	Aufgaben 2.49 bis 2.57	140
2.6	Die Regel von de L'HOSPITAL	142
	Aufgabe 2.58	145
2.7	Reihen und Potenzreihen	145
2.7.1	Reihen	145
2.7.2	Potenzreihen	150
2.8	Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe	153
2.8.1	MACLAURINSche Reihen	153

2.8.2	Allgemeine TAYLOR-Reihen	157
	Aufgaben 2.59 bis 2.61	158
2.9	Komplexe Zahlen	159
2.9.1	Definition und Darstellung komplexer Zahlen	159
2.9.2	Das Rechnen mit komplexen Zahlen	163
3	Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.1	Definition und Darstellungsform von Funktionen mit mehreren Veränderlichen	169
3.2	Partielle Differenziation	172
	Aufgaben 3.1 bis 3.3	175
3.3	Partielle Ableitungen höherer Ordnung	175
	Aufgabe 3.4	177
3.4	Tangentialebene und das totale Differenzial	178
3.4.1	Geometrische Betrachtungen	178
	Aufgabe 3.5	179
3.4.2	Das totale Differenzial	179
3.5	Spezielle Ableitungstechniken	181
3.5.1	Differenziation nach einem Parameter	181
3.5.2	Implizite Differenziation	182
3.6	Anwendungen	182
3.6.1	Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme	183
3.6.2	Lokale Extrema und Sattelpunkte	185
3.6.3	Fehlerrechnung	190
3.6.4	Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen	191
	Aufgaben 3.6 bis 3.8	194
4	Integralrechnung	195
4.1	Integration als Umkehrung der Differenziation – das unbestimmte Integral	195
	Aufgaben 4.1 bis 4.3	202
	Aufgabe 4.4	203
4.2	Das bestimmte Integral – Hauptsatz der Integralrechnung	204
	Aufgaben 4.5 und 4.6	209
4.3	Uneigentliche Integrale	209
4.4	Geometrische Anwendungen	211
4.4.1	Flächenberechnung	211
4.4.2	Länge einer Kurve	213
4.4.3	Volumen und Oberfläche von Rotationskörpern	214
4.5	Anwendung der Integralrechnung in ökonomischen Zusammenhängen	216
4.6	Numerische Integration	219
	Aufgabe 4.7	221
4.7	Doppelintegrale	221
4.7.1	Doppelintegrale in kartesischen Koordinaten	221
4.7.2	Doppelintegrale in Polarkoordinaten	224
	Aufgabe 4.8	227

5	Lineare Algebra in Betriebs- und Volkswirtschaft	228
5.1	Einführende Beispiele ökonomischen Inhalts	228
	Aufgaben 5.1 und 5.2	231
5.2	Mathematische Grundlagen der Matrizen- und Vektorrechnung	231
5.2.1	Matrizen und Vektoren sowie ihre Spezifizierungen	232
	Aufgaben 5.3 und 5.4	236
5.2.2	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	236
	Aufgaben 5.5 bis 5.8	245
5.2.3	Inverse Matrix	245
	Aufgaben 5.9 bis 5.12	251
5.2.4	GAUSSscher Algorithmus	252
	Aufgaben 5.13 und 5.14	257
5.2.5	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren	258
	Aufgaben 5.15 bis 5.17	262
5.3	Matrizen und Vektoren in Betriebs- und Volkswirtschaft	263
	Aufgaben 5.18 bis 5.22	272
5.4	Mathematische Grundlagen linearer algebraischer Gleichungssysteme	275
5.4.1	Einführung	275
5.4.2	Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme: Begriff und Methode	277
	Aufgaben 5.23 bis 5.25	280
5.4.3	GAUSSscher Algorithmus zur Lösung linearer algebraischer Gleichungssysteme	281
	Aufgaben 5.26 bis 5.30	291
5.4.4	Basislösungen	292
	Aufgaben 5.31 bis 5.36	298
5.4.5	Zusammenfassende Aussagen über lineare algebraische Gleichungssysteme	299
	Aufgaben 5.37 bis 5.40	301
5.5	Lineare algebraische Gleichungssysteme in Betriebs- und Volkswirtschaft	302
	Aufgaben 5.41 und 5.42	310
5.6	Determinante einer Matrix	311
	Aufgaben 5.43 und 5.44	314
5.7	Das Eigenwertproblem für quadratische Matrizen	315
	Aufgabe 5.45	319
6	Lineare Optimierung in Volkswirtschaft und Betriebswirtschaft	320
6.1	Problemstellungen und Grundbegriffe	320
6.1.1	Aufgabenstellung und Beispiele	320
6.1.2	Das Rechnen mit Ungleichungen	323
6.1.3	Die grafische Lösung	326
6.1.4	Allgemeine mathematische Formulierung des linearen Optimierungsproblems	331
6.2	Der Simplex-Algorithmus	333
6.2.1	Die Grundideen des Simplex-Verfahrens	333
6.2.2	Der Austauschschritt im Simplex-Tableau	334
6.2.3	Die Simplex-Regeln	338

6.2.4	Der Simplex-Algorithmus (Phase II)	340
6.2.5	Theoretische Ergänzungen und Sonderfälle	341
6.3	Der Simplex-Algorithmus für allgemeine lineare Programme	343
6.3.1	Minimumprobleme, Gleichungsrestriktionen, Varianten der Vorzeichen- beschränkungen, obere und untere Schranken	343
6.3.2	Simplex-Algorithmus: Phase I und Phase II	346
6.4	Dualität	348
6.4.1	Primal-Dual Beziehung und Dualitätssätze	348
6.4.2	Primal-Dual Beziehung und Komplementarität	351
6.4.3	Dualer Simplex-Algorithmus (Phase III)	353
6.4.4	Ökonomische Interpretationen der Größen in den Simplex-Tableaus	356
6.5	Weiterführende Aspekte	357
6.5.1	Modellbildung	357
6.5.2	Spezialfälle linearer Optimierung	359
6.5.3	Sensitivitätsanalyse bei der linearen Optimierung	362
6.5.4	Parametrische (lineare) Optimierung	363
6.5.5	Effizienz und Vergleich von LP-Solvern	363
6.5.6	Ganzzahlige lineare Optimierung	363
6.5.7	Nichtlineare Optimierung	364
	Aufgaben 6.1 bis 6.11	364
7	Finanzmathematik	368
7.1	Zinsrechnung	369
7.1.1	Einfache Zinsen und Zinseszinsen	369
7.1.2	Vorschüssige Verzinsung	375
7.1.3	Gemischte Verzinsung	377
7.1.4	Unterjährige Verzinsung	378
7.1.5	Stetige Verzinsung	380
	Aufgaben 7.1 bis 7.11	381
7.2	Barwert, Äquivalenz und Rendite	382
7.2.1	Barwert und Äquivalenz	382
7.2.2	Kapitalwertmethode	384
7.2.3	Rendite	386
7.2.4	Mittlerer Zahlungstermin und Duration	390
	Aufgaben 7.12 bis 7.20	391
7.3	Rentenrechnung	392
7.3.1	Nachschüssige und vorschüssige Renten	392
7.3.2	Aufgeschobene, abgebrochene und ewige Rente	398
7.3.3	Jährliche Verzinsung – unterjährige Rentenzahlung	400
7.3.4	Unterjährige Verzinsung	405
	Aufgaben 7.21 bis 7.31	406
7.4	Kreditrechnung	408
7.4.1	Grundbegriffe	408
7.4.2	Ratentilgung	410
7.4.3	Annuitätentilgung	410

7.4.4	Unterjährige Verzinsung, Tilgung und Rückzahlung	414
7.4.5	Ratenkredit	421
	Aufgaben 7.32 bis 7.41	422
7.5	Kurs- und Renditerechnung	424
7.5.1	Grundlagen	424
7.5.2	Zinsschuld	425
7.5.3	Annuitätenschuld	429
	Aufgaben 7.42 bis 7.48	433
7.6	Abschreibung	434
7.6.1	Grundlagen	434
7.6.2	Lineare Abschreibung	435
7.6.3	Geometrisch-degressive Abschreibung	436
7.6.4	Weitere Abschreibungsarten	437
7.6.5	Vergleich linearer und geometrisch-degressiver Abschreibung	439
	Aufgaben 7.49 bis 7.55	441
7.7	Weitergehende Betrachtungen	442
7.7.1	Rendite und Risiko	442
7.7.2	„Neuere“ Finanzprodukte	444
	Aufgaben 7.56 bis 7.58	445
8	Weitere praktische Probleme und deren Lösung	446
8.1	Nichtlineare Optimierung	446
8.1.1	Problemstellung, Grundlagen und grafische Lösungen	447
8.1.2	Karush-Kuhn-Tucker-Theorie (KKT-Theorie)	454
8.1.3	Nichtlineare Optimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen	458
8.1.4	Bausteine der allgemeinen NLP-Techniken (Übersicht)	460
	Aufgaben 8.1 bis 8.5	462
8.2	Problemlösungen mit einem Standard-Software-System	462
8.2.1	(Allgemeine) LP-Probleme	463
8.2.2	Ausgewählte NLP-Probleme	467
8.2.3	Portfolio-Probleme	468
8.2.4	Transportprobleme	471
8.2.5	Zuordnungsprobleme	473
8.2.6	Netzwerkprobleme	474
8.2.7	Netzplantechniken	476
8.2.8	Kundenwanderung	483
8.2.9	Verwaltung von Modellen: Algebraische Eingabe und Solver	485
	Lösungen	488
	Literaturverzeichnis	521
	Sachwortverzeichnis	523

Für die Größen x und y einer Funktion (1.1b) werden folgende Namen synonym verwendet:

x **unabhängige Variable**, Urbildpunkt, **Argument**,

y **abhängige Variable**, Bildpunkt, **Funktionswert**.

Des Weiteren sind die Bezeichnungen Funktionsterm für $f(x)$ und Zuordnungsvorschrift oder Funktionsrelation für $y = f(x)$ gebräuchlich.

Hier werden nur reelle Funktionen betrachtet, und daher wird der Zusatz „reell“ künftig nicht angegeben.

Die Menge aller derjenigen Werte y , die sich für eine Funktion f aus ihrer Zuordnungsvorschrift $y = f(x)$ ergeben, wenn x den gesamten Definitionsbereich $D(f)$ durchläuft, wird **Wertebereich** genannt und mit $W(f)$ bezeichnet.

Zur Vorgabe einer Funktion gehören unbedingt die beiden Elemente „Zuordnungsvorschrift“ und „Definitionsbereich“ (siehe 1.1b)¹⁾. Durch sie ist der Wertebereich eindeutig festgelegt, was jedoch nicht bedeutet, dass seine Ermittlung in jedem Falle elementar verläuft. Die Angabe des Definitionsbereiches einer Funktion ist besonders für angewandte Probleme von Bedeutung, weil die Ergebnisse wesentlich vom Definitionsbereich abhängen können.

BEISPIEL

1.2 Einfluss des Definitionsbereiches auf Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion $y = f_1(x)$, $x \in [0, 10]$, mit $f_1(x) = (x - 3)^2 + 1$ hat wegen $(x - 3)^2 \geq 0$ die Eigenschaft $f_1(x) \geq 1$ für alle $x \in [0, 10]$. Dabei wird der kleinste Funktionswert für $x = 3$ angenommen: $f_1(3) = 1$.

Ändert man für f_1 den Definitionsbereich und betrachtet beispielsweise $y = f_2(x)$, $x \in [5, 10] = D(f_2)$, mit $f_2(x) = (x - 3)^2 + 1$, so gilt hier $(x - 3)^2 \geq 2^2 = 4$ für alle $x \in D(f_2)$, und der kleinste Funktionswert wird für $x = 5$ angenommen:

$$f_2(x) \geq f_2(5) = 5. \quad \blacksquare$$

Aus den Argumenten x und den Funktionswerten y einer Funktion f können geordnete Wertepaare $(x; y)$ gebildet werden, bei denen immer x an erster und y an zweiter Stelle steht. Die Wertepaare $(x; y)$ lassen sich als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem darstellen. Die Gesamtheit aller Punkte $(x; y)$, die man erhält, wenn x alle Werte von $D(f)$ durchläuft, bildet den **Graphen** G_f der Funktion.

BEISPIEL

1.3 Darstellung von Funktionen mittels ihres Graphen

Der Graph der Funktion $y = 0,5x + 1$, $-3 \leq x \leq 6$, ist eine Strecke (s. *Bild 1.1*). Der Graph der Funktion $y = (x - 3)^2 + 1$, $0 \leq x \leq 5$, ist ein Pabelabschnitt (s. *Bild 1.2*).

¹⁾ Ausgenommen hiervon ist der Fall, dass die Funktion nur aus endlich vielen, aufgelisteten Wertepaaren $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, besteht.

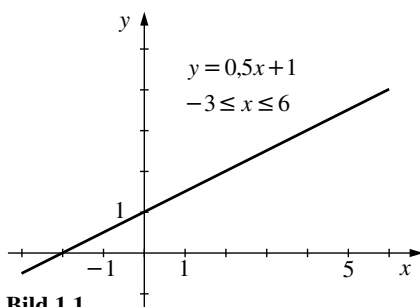


Bild 1.1

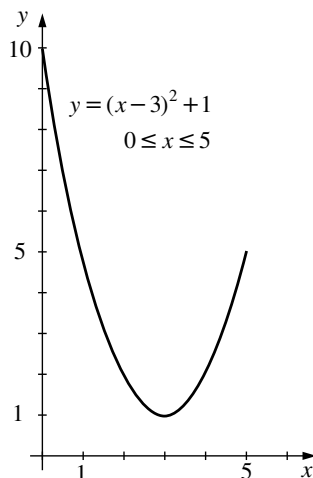


Bild 1.2

Graphen von Funktionen können Strecken, Streckenzüge, Geraden, Kurven, Punktfolgen oder aus den genannten Elementen zusammengesetzt sein.

BEISPIEL

1.4 Punktfolgen und Streckenzüge als Graphen von Funktionen

Der Graph der Durchschnittskostenfunktion $k = k(P)$ aus *Tabelle 1.1* ist eine Punktfolge (s. *Bild 1.3*).

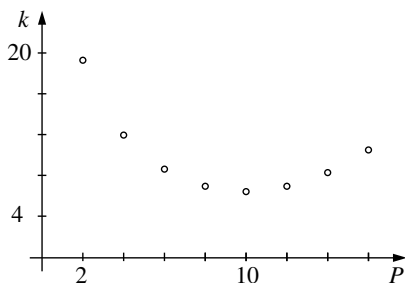


Bild 1.3

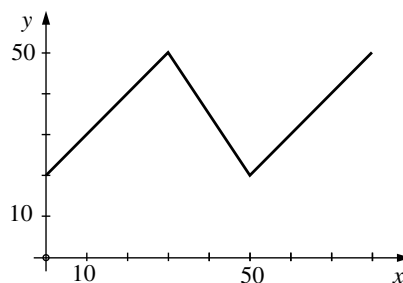


Bild 1.4

Bild 1.4 zeigt einen Streckenzug als Graphen. Er ist aus 3 Strecken zusammengesetzt. ■

Graphen von Funktionen besitzen eine charakteristische Eigenschaft: Jede Parallele zur vertikalen Achse des kartesischen Koordinatensystems schneidet den Graphen höchstens in einem Punkt. Ursache hierfür ist der Sachverhalt, dass jedem Argument x genau ein Funktionswert y zugeordnet ist. Man vergleiche hierzu die *Bilder 1.1* bis *1.4*. Deshalb muss durchaus nicht jede Kurve in einem kartesischen Koordinatensystem Graph einer Funktion sein. So stellen beispielsweise die Kurven in den *Bildern 1.5* und *1.6* keine Funktionen dar. Dagegen können

Die dargelegten Aussagen (2.99) und (2.100) spiegeln sich bei einer grafischen Darstellung von Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten wie folgt wider (vgl. *Bild 2.18*). Die Graphen von $K'(x)$ und $k(x)$ schneiden sich im Punkt $(x_D^*; k(x_D^*))$. Die Tangente an den Graphen von $K(x)$ im Punkt $(x_D^*; K(x_D^*))$ verläuft durch den Koordinatenursprung (vgl. mit (2.55) und *Bild 2.14* aus *Abschnitt 2.3*).

Die Bestimmungsgleichung für die Schwelle des Ertragsgesetzes lautet

$$K''(x_W) = 0. \tag{2.101}$$

Sie muss flankiert werden durch die hinreichenden Minimumbedingungen

$$K''(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_W - \delta < x < x_W \\ > 0 & \text{für } x_W < x < x_W + \delta \end{cases} \tag{2.102}$$

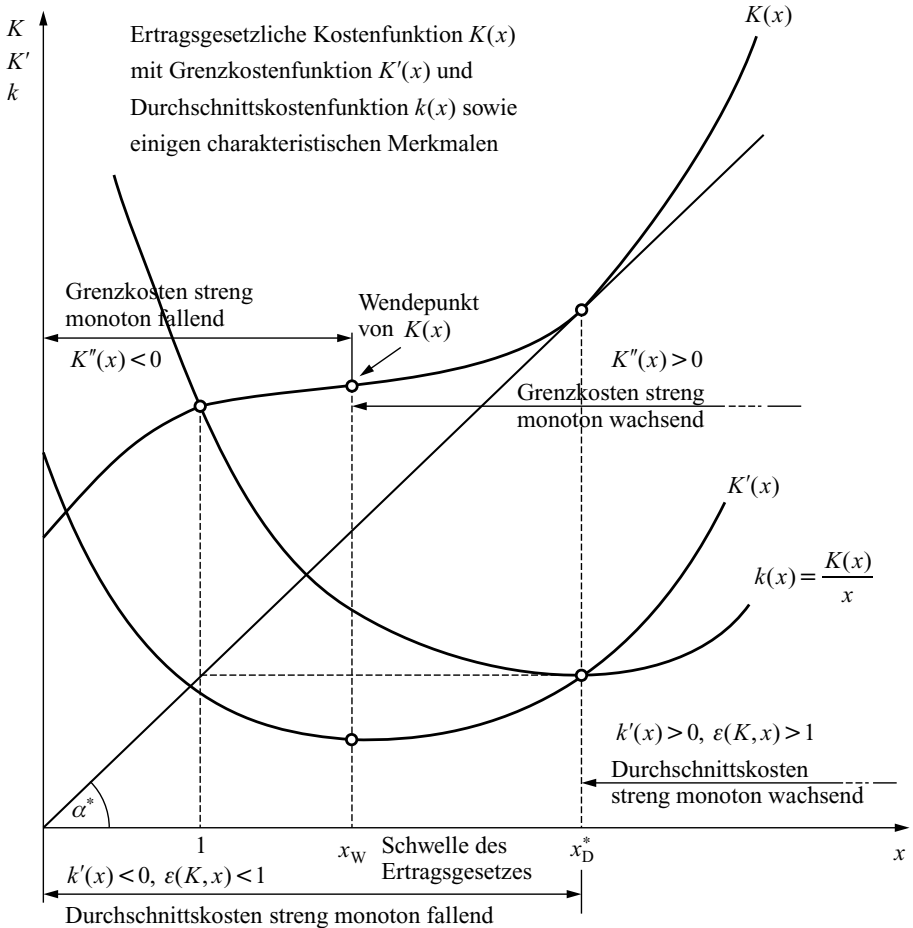


Bild 2.18 Die Kostenfunktionen aus der Darstellung des Ertragsgesetzes

wobei $\delta > 0$ eine hinreichend kleine positive Zahl ist. Damit wird klar, dass die Schwelle des Ertragsgesetzes mathematisch einen Wendepunkt der Kostenfunktion $K = K(x)$ darstellt. Die Schwelle x_W des Ertragsgesetzes trennt die anfängliche Rechtskrümmung von der nachfolgenden Linkskrümmung (vgl. *Bild 2.18*) des Graphen für $K = K(x)$.

Das *Bild 2.18* dient der *qualitativen* Darstellung der bisher erhaltenen Ergebnisse. Es ist ergänzt um die Aussagen $\varepsilon(K, x) < 1$ bzw. $\varepsilon(K, x) > 1$ für gewisse Intervalle. Ihr Nachweis beruht auf (2.97) (Einzelheiten siehe Aufgabe 2.42). Die im *Bild 2.18* gewählte Lage von x_W und x_D^* ist nicht zufällig. Es gilt nämlich die allgemeine **Aussage** (siehe Aufgabe 2.44):

Für ertragsgesetzliche Kostenfunktionen ist die Schwelle x_W des Ertragsgesetzes immer kleiner als das Betriebsoptimum x_D^*

$$x_W < x_D^*.$$

In der Kostentheorie hat es sich bewährt, eine bestimmte Klasse von Polynomen 3. Grades als ertragsgesetzliche Kostenfunktionen $K = K(x)$, $0 \leq x_0 \leq x \leq x_1$, zu verwenden. Mit ihnen hat $K(x)$ die Darstellung

$$K(x) = a + bx - cx^2 + dx^3, \quad (2.103)$$

wobei $a, b, c, d > 0$ gewisse positive Zahlen sind, von denen b, c und d der Bedingung

$$c^2 < 3bd \quad (2.103a)$$

genügen müssen. Diese Bedingung garantiert, dass $K(x)$ streng monoton wächst (vgl. Aufgabe 2.43).

BEISPIEL

2.46 Minimum für Durchschnitts- und Grenzkosten (Betriebsoptimum und Schwelle des Ertragsgesetzes)

Gegeben ist die ertragsgesetzliche Kostenfunktion $K = K(x)$ mit

$$K(x) = 96 + 150x - 22,5x^2 + 1,5x^3, \quad 0 \leq x \leq 10,$$

wobei $K(x)$ die Gesamtkosten (in GE) in Abhängigkeit vom Output x (in ME) angibt.

- Es ist die Funktion der Durchschnittskosten zu bilden und deren Minimum zu ermitteln.
- Für $x = 6, 7, 8, 9$ und 10 sind die Elastizitäten $\varepsilon(K, x)$ zu berechnen, und die erhaltenen Werte sind in Relation zu *Bild 2.18* zu setzen.
- Es sind die Grenzkosten sowie deren Minimum zu ermitteln.
- Die Gesamtkosten sowie ihre Durchschnitts- und Grenzkosten sind unter Markierung charakteristischer Punkte und Intervalle darzustellen (vgl. *Bild 2.18*)!

Lösung:

- Für die Durchschnittskosten ergibt sich die Darstellung

$$k(x) = \frac{96}{x} + 150 - 22,5x + 1,5x^2, \quad 0 < x \leq 10.$$

Verwendet man (2.96) zur Bestimmung des Betriebsoptimums x_D^* (möglich wären auch (2.99) oder (2.100)), lautet die Bestimmungsgleichung für x_D^*

$$-\frac{96}{(x_D^*)^2} - 22,5 + 3x_D^* = 0.$$

Sie ist nichtlinear. Das NEWTON-Verfahren liefert $x_D^* = 8$.

Wegen $k''(x_D^*) = 192/(x_D^*)^3 + 3 > 0$ kann festgestellt werden: Die Durchschnittskosten nehmen für $x_D^* = 8$ ihren minimalen Wert $k^* = k(8) = 78$ GE/ME an, d. h., das Betriebsoptimum liegt beim Output $x = 8$ ME.

b) Wegen $K'(x) = 150 - 45x + 4,5x^2$ erhält man für die Elastizität die Darstellung

$$\varepsilon(K, x) = (150 - 45x + 4,5x^2) \frac{x}{96 + 150x - 22,5x^2 + 1,5x^3}.$$

Mit ihr sind die gesuchten Elastizitätswerte zu berechnen.

Tabelle der Elastizitätswerte

x	6	7	8	9	10
$\varepsilon(K, x)$	0,494	0,696	1	1,374	1,773

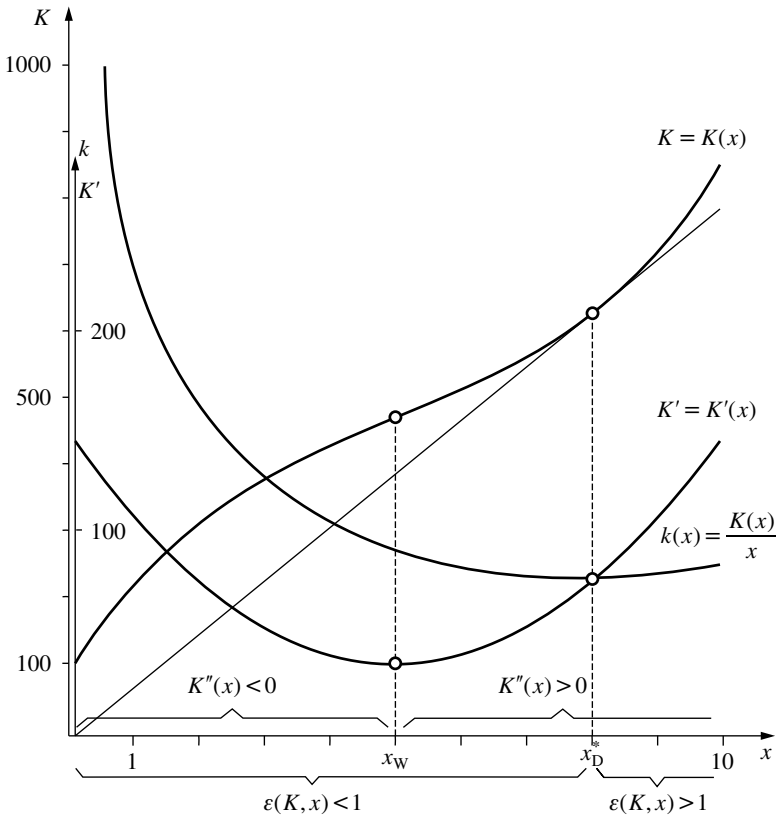


Bild 2.19 Kostenfunktionen und Elastizität

Startet man einen weiteren Versuch mit dem Pivotelement $a_{31} = 2,75$, ausgehend von dem gerade berechneten Tableau, so erhält man die Lösung $\mathbf{x}_E = (9,09, 6,73, 0, -6,36, 0)^T$, nachdem man x_3 und x_5 gleich null gesetzt hat. Dies ist wohl eine Basislösung, aber keine zulässige, denn x_4 ist kleiner als null im Widerspruch zur Nichtnegativitätsbedingung. Es handelt sich hier um eine unzulässige kanonische Form des Problems.

Ein Versuch mit dem Pivotelement $a_{21} = 1,25$, ebenfalls ausgehend von dem obigen Tableau, liefert dagegen:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	z	RS
0	0	-4,80	-3,60	0	-1	-288
0	1	0,40	-0,20	0	0	8
1	0	-0,60	0,80	0	0	4
0	0	1,40	-2,20	1	0	14

Dieses Tableau stellt wieder eine zulässige kanonische Form des Problems dar: Wir setzen x_3 und x_4 gleich null und lesen eine neue Lösung ab: $\mathbf{x}_E = (4, 8, 0, 0, 14)^T$. Führen Sie die Probe durch!

Der zugehörige Wert der Zielfunktion ist 288 (-1 beachten!). Der Vergleich mit der grafischen Lösung zeigt uns, dass wir hier bereits die optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems gefunden haben.

Wir könnten nun alle möglichen Kombinationen ausprobieren und zur Veranschaulichung die erhaltenen Lösungen in unsere grafische Lösung eintragen (Aufgabe 6.1).

Wir erkennen auf diesem Wege, dass offensichtlich alle Basislösungen mit Schnittpunkten von Restriktionsgeraden (einschl. der Koordinatenachsen) übereinstimmen und dass zulässige Basislösungen immer Eckpunkte des Lösungspolyeders sind. Dies ist allgemein so. Ein naheliegender Ansatz besteht darin, einfach *alle* Eckpunkte des Polyeders (sprich *alle* zulässigen Basislösungen) zu ermitteln. Derjenige Eckpunkt mit dem größten Zielfunktionswert löst dann die gestellte Optimierungsaufgabe. Wegen des enormen Rechenaufwandes ist dieser Ansatz aber nicht praktikabel. Denn bereits bei einem (kleinen) Problem in Standard-Maximum-Form mit $m = 50$ und $n = 50$ können wir auf

$$\binom{m+n}{n} = \binom{100}{50} \cong 10^{29}$$

verschiedene Arten n von $m+n$ Variablen herausgreifen und null setzen. Diese Formel verwendet die sogen. Binomialkoeffizienten. Also kann es bei diesem Problem bis zu 10^{29} unterschiedliche Basislösungen (Eckpunkte und andere Schnittpunkte) geben. An diesen riesigen Zahlen scheitern auch die schnellsten Computer. Es ist eine gewaltige Leistung, dass der Simplex-Algorithmus normalerweise nur ca. 75–150 Eckpunkte braucht, um bei einem solchen Problem eine optimale Lösung zu finden.

Bevor wir die Regeln des Simplex-Algorithmus formulieren, gehen wir zu einer etwas anderen Darstellungsform unseres Problems über, dem **Simplex-Tableau in Kurzform**.

Dieses ist unübertroffen gut zur schnellen manuellen Durchführung des Verfahrens geeignet und bietet sich auch als Visualisierungsinstrument über ein Makro an, welches am besten

in einem Tabellenkalkulationssystem (z. B. MS-EXCEL) oder in einem Softwaresystem mit einer Matrixsprache (MATLAB, APL, GAUSS o. a.) realisiert wird.

Die bereits berechneten Langtableaus haben gezeigt, dass die z -Spalte immer unverändert bleibt und die Einheitsspalten nicht sehr viel Information liefern, eher das Ablesen der Lösung erschweren: Die Darstellung in dieser Form ist redundant. Kompakter und leichter lesbar ist das folgende Kurztableau. In diesem sind alle Einheitsspalten eliminiert, das Kernstück bildet die Koeffizientenmatrix A , darüber steht die Zielfunktion ($-z$ beachten!), in der Kopfzeile stehen die zugehörigen Nichtbasisvariablen, in der linken Leiste die Basisvariablen genau in derjenigen Zeile, in der im Langtableau die zugehörige 1 stand, und rechts der negative Wert der Zielfunktion, $-z_0$, und die „rechte Seite“ des Problems, der Vektor b .

Anfangs-Tableau:

	x_1	x_2	RS
$-z$	12	30	0
x_3	1	4	36
x_4	2	3	32
x_5	3	1	34

BV: x_3, x_4, x_5 , NBV: x_1, x_2 , BL: $(0, 0, 36, 32, 34)^T$, $z = 0$

Zwischen-Tableau:

	x_1	x_3	RS
$-z$	4,50	-7,50	-270
x_2	0,25	0,25	9
x_4	1,25	-0,75	5
x_5	2,75	-0,25	25

BV: x_2, x_4, x_5 , NBV: x_1, x_3 , BL: $(0, 9, 0, 5, 25)^T$, $z = 270$

Optimal-Tableau:

	x_4	x_3	RS
$-z$	-3,6	-4,8	-288
x_2	-0,2	0,4	8
x_1	0,8	-0,6	4
x_5	-2,2	1,4	14

BV: x_2, x_1, x_5 , NBV: x_4, x_3 , BL: $(4, 8, 0, 0, 14)^T$, $z = 288$

Bei dieser Darstellung sind die jeweiligen Werte der BV sehr einfach abzulesen. Der durchgeführte Austausch-Schritt muss hierbei aber durch einen entsprechenden Platztausch dokumentiert werden ($x_2 \leftrightarrow x_3$ im ersten, $x_1 \leftrightarrow x_4$ im zweiten Schritt).

Für die Rechnung im Kurztableau empfiehlt sich die folgende schematische Vorgehensweise, die leicht zu lernen und zu üben ist.

7.1 Zinsrechnung

7.1.1 Einfache Zinsen und Zinseszinsen

Der **Zins** ist der Preis für die Überlassung von Geld oder Kapital. (7.1)

Wird Kapital auf Zeit angelegt und erhalten Sie beispielsweise 5 % Zinsen, wird 5 **Zinsfuß** genannt und allgemein mit p bezeichnet. $i = p/100$, also in diesem Beispiel $0,05 = 5\%$ heißt **Zinssatz**. Die Angabe des Zinssatzes bzw. des Zinsfußes ist grundsätzlich auf ein Jahr bezogen: 5 % **p. a.** (lat. per annum; pro Jahr). Die Angabe p. a. wird jedoch oft weggelassen.

Zinsen werden proportional auf den angelegten Betrag, das sogenannte **Kapital**, gezahlt. Das **Anfangskapital** wird meist mit K_0 bezeichnet. Gesucht ist das Kapital einschließlich Zinsen nach einem Jahr, nach zwei Jahren oder allgemein nach t Jahren, also K_t . Um dieses Kapital zu ermitteln, gibt es verschiedene Methoden. Bei **einfachen Zinsen** werden die Zinsen nicht mitverzinst. Von **Zinseszinsen** spricht man, wenn Zinsen auf nicht ausgezahlte Zinsen berechnet werden. Zinsen werden dabei dem Kapital hinzugefügt (= kapitalisiert) und dann mit diesem verzinst. Die Zeitpunkte, an denen die Zinsen zum Kapital hinzugerechnet und mitverzinst werden, heißen **Zinskapitalisierungszeitpunkte**.

Einfache Zinsen

BEISPIEL

7.2 Sie legen 400 € an. Bei $i = 5\%$ und einfachen Zinsen erhalten Sie jährlich 20 € ($= 400 € \cdot 0,05$) Zinsen. Das Kapital nach einem Jahr beträgt somit 420 €. Das Kapital nach vier Jahren, bezeichnet mit K_4 , ist 480 €. ■

Bei einfachen Zinsen sind die Zinsen für jedes Jahr gleich hoch, nämlich $K_0 \cdot i$. Nach einem Jahr ist somit das Kapital mit Zinsen angewachsen auf: $K_1 = K_0(1 + i)$. Nach zwei Jahren auf: $K_2 = K_0(1 + 2i)$. Deshalb gilt

Das Kapital K_0 wächst bei einem Zinssatz von i bei **einfachen Zinsen** in t Jahren auf

$$K_t = K_0(1 + t i). \quad (7.2)$$

K_0 **Anfangskapital**, auch **Barwert** genannt

K_t **Endkapital** (Kapital nach t Jahren), auch **Endwert** genannt

i **Zinssatz**

t **Laufzeit** (in Jahren)

BEISPIELE

7.3 Ein Betrag von 200 € wird mit einem Zinssatz von 4 % verzinst. Das Kapital ist dann nach zwei Jahren bei einfachen Zinsen auf 216 € angewachsen, denn mit $K_0 = 200$; $i = 0,04$; $t = 2$ ergibt sich:

$$K_2 = 200(1 + 2 \cdot 0,04) = 216.$$

- 7.4** Wenn Sie nach acht Jahren bei 6 % einfachen Zinsen ein Kapital von 1.000 € besitzen, wie hoch ist das Kapital zu Beginn, d. h., wie hoch ist der Barwert?

Lösung: Mit $K_8 = 1.000$, $i = 0,06$ und $t = 8$ ergibt sich

$$K_0 = \frac{K_t}{(1 + ti)} = \frac{1.000}{(1 + 8 \cdot 0,06)} = 675,68. \quad \blacksquare$$

Die Formel (7.2) für einfache Zinsen wird selten für Laufzeiten (t) größer als ein Jahr verwendet. Meist wird sie angewandt, wenn t ein Bruchteil eines Jahres ist. Beispielsweise wird für eine Verzinsungsdauer von einem halben Jahr $t = \frac{1}{2}$ eingesetzt. Die Laufzeit muss also keine ganze Zahl sein. In der Praxis werden die Zinsen bei Laufzeiten, die kleiner als ein Jahr sind, nach Tagen berechnet. Die Laufzeit t wird folgendermaßen ermittelt:

$$t = \frac{\text{Zinstage}}{\text{Basistage}} \quad (7.3)$$

Dabei hängt die Berechnung der Zinstage und der Basistage (= Jahreslänge in Tagen) von der gewählten Berechnungsmethode ab. Folgende Berechnungsmethoden (Usancen) sind gebräuchlich:

A: 30 E/360

B: 30/360

C: tatsächliche Laufzeittage/365 (auch englische Usance genannt)

D: tatsächliche Laufzeittage/360 (auch internationale Usance genannt)

E: tatsächliche Laufzeittage/tatsächliche Jahreslänge in Tagen (auch actual/actual oder kalendergenau/kalendergenau genannt).

Bei der Berechnungsmethode A (Methode 30 E/360) wird unabhängig von der tatsächlichen Länge der Monat immer mit 30 Tagen und das Jahr mit 360 Tagen angesetzt. Bei Monaten mit 31 Tagen ist der 31. kein Zinstag.

Viele Taschenrechner und EDV-Programme rechnen jedoch, wenn der 31. der Endtag ist, als wäre das Enddatum der 1. des Folgemonats. Dies ist die Methode 30/360.

Bei der Berechnungsmethode C kommt bei der Ermittlung der Laufzeittage die exakte kalendarische Laufzeit zur Anwendung. Die Basistage betragen 365.

Bei der Methode D hat eine kalendergenauere Tagezählung bei 360 Basistagen zu erfolgen.

Bei der Berechnungsmethode E werden sowohl die Laufzeittage als auch das zugrunde gelegte Basisjahr mit kalendergenauen Werten berücksichtigt.

Je nachdem, welche Berechnungsmethode angewandt wird, können die Zinsbeträge unterschiedlich sein.

BEISPIELE

- 7.5** Bei Sparbüchern und Sparkonten wird im Verlauf eines Kalenderjahres in Deutschland die Formel für einfache Zinsen meist mit der Berechnungsmethode A verwendet. Sie legen ihr Geld vom 1.7.2011 bis zum 1.8.2011 – also den ganzen Juli – an. Das sind

BEISPIEL

- 7.37** Sie zahlen zehn Jahre lang jedes Jahr 100 € auf ein Sparkonto. Ein anderes Beispiel: Sie heben zwei Jahre lang von ihrem Sparkonto jeden Monat genau 50 € ab. Beide Beispiele sind **Zeitrenten**. Der Begriff **Rente** wird immer für regelmäßige Zahlungen verwendet, unabhängig davon, ob es sich um Ein- oder Auszahlungen handelt. Ein Beispiel für eine **Leibrente** sind die Zahlungen aus der gesetzlichen Rentenversicherung. Wie viele Jahre die Zahlungen aus dieser Rente geleistet werden, steht nämlich im Vorhinein nicht fest. ■

Es wird nun ermittelt, zu welchem Kapital – dem **Rentenendwert** – die jährlichen Zahlungen bei einer Rente führen. Dazu müssen alle Zahlungen auf den Endzeitpunkt aufgezinst werden. Der **Rentenbarwert** oder Gegenwartswert bezieht sich auf den Wert zum heutigen Zeitpunkt.

Bei einer nachschüssigen Rente wird die erste Rate ein Jahr nach dem Bezugszeitpunkt des Barwertes und die letzte Rate genau am Bezugszeitpunkt des Rentenendwertes geleistet, vgl. *Bild 7.3*.

Um den Rentenendwert zu berechnen, ist das Folgende zu beachten: Die erste Rate r wird $n - 1$ Jahre verzinst, die zweite Rate noch $n - 2$ Jahre. Die letzte Rate wird am Ende der Laufzeit eingezahlt, also nicht mehr verzinst.

Deshalb gilt für den Rentenendwert: $R_n = rq^{n-1} + rq^{n-2} \dots + rq^0$.

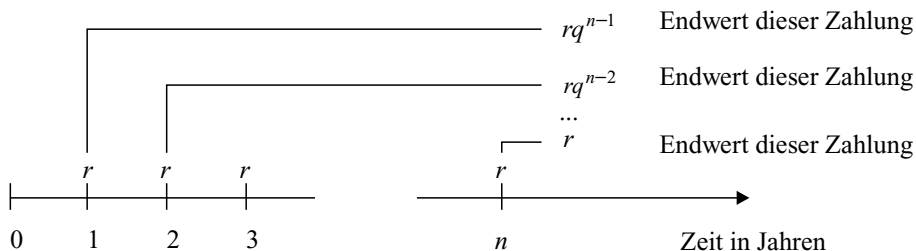


Bild 7.3 Zahlungen der Höhe r bei einer nachschüssigen Rente

Fassen Sie diese Summanden (geometrische Summe) zusammen, erhalten Sie

$$R_n = r \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Der Rentenbarwert ergibt sich durch Diskontierung um n Jahre. Die Laufzeiten ergeben sich nach Auflösung der Formeln für den Rentenendwert bzw. den Rentenbarwert nach der Unbekannten n . Insgesamt erhalten Sie somit

Welche der beiden Anlagen ist die bessere? Der Erwartungswert der Rendite, also die mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Rendite beträgt bei den Aktien

$$\begin{aligned} E(R_A) &= 0,64 \cdot 10 \% + 0,18 \cdot (-10 \%) + 0,18 \cdot 30 \% \\ &= 6,4 \% - 1,8 \% + 5,4 \% = 10 \%. \end{aligned}$$

Bei den Aktien sind also 10 % Rendite zu erwarten, bei der Festgeldanlage ist $E(R_F)$ nur 5 %. Im Schnitt ist die Anlage in Aktien günstiger. Aber – wie Sie sicherlich sofort erkennen – hat die Aktienanlage ein größeres Risiko. Das Risiko wird in der Finanzmathematik als Standardabweichung oder Wurzel aus der Varianz berechnet:

$$\text{Var}(R_A) = 0,18(-10 - 10)^2 + 0,64(10 - 10)^2 + 0,18(30 - 10)^2 = 144.$$

Das Risiko bei der Aktienanlage ist die Wurzel aus 144, also $\text{Risiko}_A = 12 \%$.

Das Risiko bei der Festgeldanlage ist natürlich null: $\text{Risiko}_F = 0 \%$.

Welches die beste Anlage ist, kann nicht angegeben werden. Es hängt davon ab, wie risikobereit Sie sind. Vielleicht ist es auch günstig, eine Aufteilung des Anlagebetrages auf beide Anlagen zu tätigen. Eine solche Aufteilung, auch mit **Diversifikation** bezeichnet, ist sinnvoll, wenn nicht nur ausschließlich die Rendite oder ausschließlich das Risiko betrachtet wird. Die Auswahl, genannt **Portfolio-Selection**, und ihre Eigenschaften werden in Büchern über Wertpapieranalyse ausführlich beschrieben. Zum Abschluss nur noch ein Beispiel.

- 7.94** Gegeben seien folgende zwei Anlagemöglichkeiten: Möglichkeit A hat eine erwartete Rendite von $\mu_A = 12 \%$ bei einem erwarteten Risiko von $\sigma_A = 25 \%$. Anlage B bringt dagegen nur eine erwartete Rendite von $\mu_B = 7 \%$. Das Risiko ist aber mit $\sigma_B = 4 \%$ sehr niedrig. Die Korrelation zwischen den beiden Anlagen sei $r_{AB} = -0,4$. Tragen Sie die beiden Anlagemöglichkeiten in ein Risiko-Rendite-Diagramm ein, erhalten Sie die beiden mit Kreisen gekennzeichneten Punkte im *Bild 7.13*. Der Kreis links unten repräsentiert Anlage B, rechts oben Anlage A.

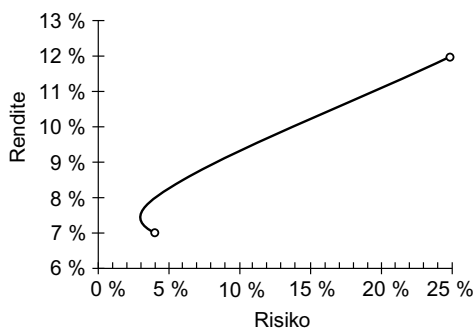


Bild 7.13 Risiko-Rendite-Diagramm für *Beispiel 7.94*

Auch für Anlagemischungen aus diesen beiden Anlagen können Sie die Rendite und das Risiko ausrechnen. Ist a der Anteil an Anlage A und $1 - a$ der Anteil an Anlage B, gilt für den Erwartungswert und das Risiko der Rendite R_M der Anlagemischung:

$$E(R_M) = a \cdot \mu_A + (1 - a) \cdot \mu_B,$$

$$\text{Risiko}(R_M) = \sqrt{a^2 \sigma_A^2 + (1 - a)^2 \sigma_B^2 + 2a(1 - a)r_{AB}\sigma_A\sigma_B}.$$

leichter erkennen zu können, weil in solchen Programmen keine Lücken zwischen den Ziffern gelassen werden können.

PRODUKTIONSPLANUNGS-BEISPIEL 6.1

3-7

LINEAR PROGRAMMING PROCEDURE

Variable Summary						
Col	Variable Name	Status	Type	Price	Activity	Reduced Cost
1	X1	BASIC	NON-NEG	12	4	0
2	X2	BASIC	NON-NEG	30	8	0
3	X3(Ma_1)		SLACK	0	0	-4.8
4	X4(Ma_2)		SLACK	0	0	-3.6
5	X5(Ma_3)	BASIC	SLACK	0	14	0

Constraint Summary						
Row	Constraint Name	Type	S/S Col	Rhs	Activity	Dual Activity
1	z(Ziel)	OBJECTVE	.	0	288	.
2	X3(Ma_1)	LE	3	36	36	4.8
3	X4(Ma_2)	LE	4	32	32	3.6
4	X5(Ma_3)	LE	5	34	20	0

Current Tableau			
	INV(B)*R	X3(Ma_1)	X4(Ma_2)
R_COSTS	.	-4.8	-3.6
X2	8	0.4	-0.2
X1	4	-0.6	0.8
X5(Ma_3)	14	1.4	-2.2
PHASE_1_	0	0	0
z(Ziel)	288	4.8	3.6

RHS Range Analysis						
Row	Minimum Phi			Maximum Phi		
	Rhs	Leaving	Objective	Rhs	Leaving	Objective
X3(Ma_1)	26	X5(Ma_3)	240	42.666667	X1	320
X4(Ma_2)	27	X1	270	38.363636	X5(Ma_3)	310.90909
X5(Ma_3)	20	X5(Ma_3)	288	INFINITY	.	.

Price Range Analysis							
Col	Variable Name	Minimum Phi			Maximum Phi		
		Price	Entering	Objective	Price	Entering	Objective
1	X1	7.5	X4(Ma_2)	270	20	X3(Ma_1)	320
2	X2	18	X3(Ma_1)	192	48	X4(Ma_2)	432
3	X3(Ma_1)	-INFINITY	.	288	4.8	X3(Ma_1)	288
4	X4(Ma_2)	-INFINITY	.	288	3.6	X4(Ma_2)	288
5	X5(Ma_3)	-3.428571	X3(Ma_1)	240	1.63636	X4(Ma_2)	310.909

Sachwortverzeichnis

A

- Ableitung 53
 - an der Stelle 48
 - einer Umkehrfunktion 53
 - , linksseitige 53
 - , partielle 172
 - , rechtsseitige 53
- Absatz, gewinnmaximierender 135
- Absatzmenge, Berechnung der gewinnextremalen 123
 - , gewinnmaximierende 111, 131, 135
- Abschreibung 434
 - , arithmetisch-progressive 438
 - , degressive, in Staffeln 439
 - , digitale 437
 - , geometrisch-degressive 436, 439
 - , lineare 435, 439
 - , progressive 438
- absoluter Term 276
- Abzinsungsfaktor 372
- AfA 435
- AIBD-Methode 389
- Aktivität 357
- AMOROSO-ROBINSON-Relation 95
- Anfangswert 31
- Annuität 408
- Annuitätendarlehen 408
- Annuitätenschuld 429
- Annuitätentilgung 408, 410
- Äquivalenz 382
- Argument 14
- Arkusfunktion 20
- atan2 162
- Aufgeld 426
- Aufzinsungsfaktor 372
- Ausstattungsgrad 21
- Austauschschritt 290, 334

B

- barrier functions 461
- Barriere-Methode 461
- Barwert 369, 382 f.
- Basis-Inverse 341

- Basislösung 292
 - , degeneriert 294
- Basislösung (BL), zulässige (ZBL) 334
- Basisvariable 295
- Basisvariable (BV) 334
- Betrag einer komplexen Zahl 161
- Betriebsminimum 103
- Betriebsoptimum 99
- Bilanzgleichung 267
- Bildpunkt 14
- BLAND-Regel 340
- Bogenlänge 213
- Buchwert 435
- Bundesschatzbrief 387

C

- Call 444
- charakteristische Gleichung 316
- charakteristisches Polynom 316
- COURNOTscher Punkt 133
- CPM 476
- CPM-Netzplan 477

D

- DANTZIG-Regel 342
- Definitionsbereich 13, 169
- degeneriert 328
- Degressionsbetrag 437
- Determinante einer Matrix 311
- Diagonalmatrix 234
- Differenzenquotient 47
- Differenzial 57
 - , Interpretation 58
 - , totales 180
- Differenziation, implizite 182
- differenzierbar 48, 53
 - , linksseitig 53
 - , rechtsseitig 53
- Disagio 418
- Diskontierungsfaktor 372
- Doppelindex 230
- Doppelintegral, Polarkoordinaten 225
- Dreiecksmatrix, obere 234
 - , untere 234
- duales Problem (D) 348

- Dualität 348
- Dualitätssatz, schwacher 350
- , starker 350
- Duration 391
- Durchschnittsertrag 73
- Durchschnittsfunktion 94
- Durchschnittskosten 99
- Durchschnittskostenfunktion 30
- E**
- Eckpunkt 327
- Effektivverzinsung 386, 431
- Effektivzins, anfänglicher 431
- Eigenvektor 305, 315
- Eigenwert 315
- Eigenwertgleichung 316
- Einflussgröße 29
- Einheitsmatrix 234
- Einheitsvektor 234
- elastisch 85
- Elastizität 82
- der Kosten bezüglich des Outputs 84
- des Absatzes bezüglich des Preises 84
- des Outputs bezüglich des Inputs 84
- gleich 1 82
- , Interpretation 83
- Ellipsoid-Methode 320
- Endkapital 369
- entartet 328
- Entartung 341
- Entwicklungsgleichung 32
- Ereignis 476
- erlaubter Bereich 362
- Erlösfunktion 30
- Ersatzrente 400
- Ertragsentwicklung, Phasen 73
- Ertragsgesetz, klassisches 30, 71 f.
- , Schwelle 99
- ertragsgesetzliche Produktionsfunktion 73
- EULER
- , Formel 162
- Exponentialfunktion 18, 31
- Extrema, für Kostenfunktionen 98
- Extremalstrahl 331, 343
- Extremum 61
- , lokal 185
- Extremwertaufgabe, ökonomischen Inhalts 98
- F**
- Fahrstrahl, tangentialer 113
- Faktorgröße 29
- FALKSches Rechenschema 242
- FAT 478
- Fehlerfortpflanzung, GAUSSsche 190
- , linear 190
- , quadratisch 190
- FET 478
- Folge 38
- konvergiert, strebt 37
- Fundamentalsystem von Lösungen 291
- Funktion 13, 169
- , äußere 20
- , beschränkt 22
- , charakteristische 45
- , eindeutig 25
- , elementare 17, 20
- , implizite 16
- , innere 20
- , integrierbar 206
- , kleinster und größter Wert 63
- , konkav 23
- , konvex 23 f.
- , linksgekrümmt 23
- , linksseitig stetig 44
- , monoton fallend 22
- , monoton wachsend 22
- , nach oben beschränkt 22
- , nach unten beschränkt 22
- , rechtsgekrümmt 23
- , rechtsseitig stetig 44
- , Stamm- 195
- , stetig 44
- , stetig an der Stelle 44
- , stetig im Intervall 44
- , streng konkav 23
- , streng konvex 23
- , streng monoton fallend 22
- , streng monoton wachsend 22
- , trigonometrische 19
- Funktionsrelation 14
- Funktionsterm 14
- Funktionswert 14
- , größter 45
- , kleinster 45
- Futtermittelmischung 230
- G**
- GANTT-Chart 480
- GAUSSsche Zahlenebene 160
- GAUSSscher Algorithmus 256
- GAUSS-NEWTON-Verfahren 183

GAUSSscher Algorithmus, Endform 333
Gegenwartswert 382 f.
Gesetz vom abnehmenden Ertragszuwachs 71
gewinnextremaler Pfad 120
–, Gleichung 125
Gewinnextremum, grafische Ermittlung 123
Gewinnfunktion 30
Gewinngrenze 69, 111, 130
Gewinnlinse 113, 130
gewinnmaximale Menge, zulässige 136
gewinnmaximierende Menge, zulässige 138
Gewinnmaximum bei vollständiger Konkurrenz 111
–, grafische Ermittlung 122
– im Falle des Angebotsmonopols 130
Gewinnschwelle 69, 111, 130
Gewinnzone 111, 130
Gleichgewichtspreis 67
Gleichungssystem 275
–, lineares algebraisches 275
Gradient 173
Gradientenmethode 459
Graphen 14
greatest change 342
Grenzerlös 78
Grenzfunktion 81
–, Interpretation 82
Grenzgewinn 78
Grenzkosten 78, 99
Grenzpreis 130
Grenzprodukt 59
Grenzproduktivität 59, 72
Grenzwert 37
– der Funktion 41
– der Funktion, linksseitiger 42
– der Funktion, rechtsseitiger 42
Grundfunktion 17

H
Halbebene 324
Halbraum 324
Hauptdiagonale 234
Hauptsatz der Integralrechnung 207
HESSE-Matrix 177, 452
homogener Zusammenhang 88
homogenes lineares Gleichungssystem 316
Homogenitätsgrad 88 f.
Homogenitätsregel 50

I
imaginäre Einheit 159
Imaginärteil 160
implizite Differenziation 182
Innere-Punkt-Methode 320
Input 267
Inputelastizität des Outputs 84
Input-Output-Koeffizient 268
Input-Output-Modell 266
Input-Output-Tabelle 230
Integral, bestimmtes 206
–, unbestimmtes 196
Integrale, uneigentliche 209
Integrand 196
Integration nach Partialbruchzerlegung 198
– nach Substitution 197
–, partielle 197
– von Differenzen 197
– von Summen 197
Integrationskonstante 196
integrierbar 206
Inverse 246
Investition 384
ISMA-Methode 389
Iteration, heuristische 67
Iterationsverfahren 395

J
JACOBI-Matrix 183, 186, 225, 451

K
Kalkulationszinssatz 384
Kandidaten für relative Extrempunkte 447
kanonische Form, zulässige 334
Kapitalisierungsfaktor 399
Kapitalwert 384
Kapitalwertmethode 384
Karenczeit 398
Kaufoption 444
Kehrmatrix 246
KEPLERSche Fassregel zur numerischen Integration 220
Kettenregel 51, 181
KKT-Bedingung 455
KKT-Methode 454
KKT-Theorie 454
Koeffizientenmatrix 276
komplementäre Variable 352
komplementärer Schlupf 353

komplexe Zahlen 160
–, algebraische Form 161
–, Differenz 164
–, exponentielle Form 162
–, kartesische Form 161
–, Produkt 165
–, Quotient 167
–, Summe 164
–, trigonometrische Form 162
konjugiert komplex 161
Konsumfunktion 30
Konsumquote 78
Konvergenzbereich einer Potenzreihe 151
Konvergenzradius einer Potenzreihe 151
konvex 452
Konvexität 452
–, strenge 24
Konvexkombination 326
Kosten, durchschnittliche variable 103
–, fixe 103
–, variable 103
Kostenelastizität 84
Kostenentwicklung, vier Phasen 104
Kostenfunktion 21, 29 f.
–, ertragsgesetzliche 21
–, ertragsgesetzliche vom Polynomtyp 108
–, neoklassische 27
Kreditrechnung 408
Kreuzprodukt 312
kritisch 477
kritischer Weg 478
Krümmungsverhalten 24
Kundenwanderung 230, 263
Kurs 425
Kursrechnung 424

L

LAGRANGE-Funktion 192, 448, 455
LAGRANGE-Multiplikator 448
LAGRANGE-Multiplikatoren 192 f.
LAGS 275
Länge einer Kurve 213
LEIBNIZ-Kriterium für Reihen 147
Leibrente 392
Leistungsabschreibung 438
Leistungsverflechtung 228
LEONTIEF-Koeffizient 268
LEONTIEF-Modell 268
L'HOSPITALSche Regel 142
Line Search-Problem 458

lineares algebraisches Gleichungssystem 275
–, allgemeine Lösung 287
–, Basislösung 292
–, Fundamentalsystem von Lösungen 291
–, gestaffelt 278
–, homogenes 276
–, inhomogenes 276
–, kanonische Normalform 281
–, Koeffizienten 275
–, nichttriviale Lösung 278
–, Normalform 275
–, spezielle Lösung 288
–, triviale Lösung 278
–, Zahl der Freiheitsgrade 283
lineares Optimierungsproblem 331
lineares Programm 331
Linearität 40
Linearitätsregel 50
Linearitätsrelation 276
Linearkombination 20, 40
–, konvexe 238
– von Funktionen 42
linksgekrümmt 24
Logarithmusfunktion 18
LP-Problem 331
LP-Solver 363

M

MACLAURINSche Reihe 153, 162
Mantelfläche eines Rotationskörpers 214
Marktanteil 263
–, Vektor 264
Marktaufteilung, stationäre 264
Markträumungsbedingung 67
Marktzinssatz 383
Materialverbrauchsnorm 229
Materialverflechtung 229
Matrix 232
–, Differenz 237
–, elementare Umformung 253
–, Elemente 232
–, gleiche 236
–, inverse 246
–, Ordnung 233
–, quadratische 233
–, Rang 261
–, regulär 247, 312
–, singularär 247
–, Spalte 232
–, Summe 237

- , symmetrische 235
- , transponierte 235
- , Typ 232
- , verkettbar 241
- , verknüpfbar 241
- , verträglich 241
- , Zeile 232
- maximaler Fluss 474
- Maximum 61
 - , absolutes 61
 - , lokales 185
 - , relatives 61
- max-NLP 454
- Methode des steilsten Abstiegs 459
- Minimum 61
 - , absolutes 61
 - , lokales 185
 - , relatives 61
- min-NLP 454
- Mischungsproblem 322
- Mittelwertsatz der Integralrechnung 206
- Modellbildung 357
- Monopol 110
- MPM-Netzplan 477
- N**
- Näherungsformel für den Zuwachs 57
- Nebenbedingung 322
- Nebendiagonale 234
- Nettobarwert 384
- Netzplantechnik 476
- Netzwerk 361
- Netzwerkproblem 474
- Netzwerk-Simplex-Algorithmus 471
- NEWTON-RAPHSON mit Ridging 459
- NEWTON-RAPHSON-Verfahren 459
- Newton-Verfahren 395
 - , eindimensionales 450
 - , mehrdimensionales 451
 - NEWTON-Verfahren 68
- Nichtbasisvariable 295
- Nichtbasisvariable (NBV) 334
- nichtlineare Optimierung 446
- nichtlineares Optimierungsproblem 446
- nichtlineares Programm 446
- Nichtnegativitätsbedingung 322
- NLP-Problem 446
 - , grafisch 457
- Nominalzinssatz 409
- Norm (Länge) des Vektors 245
- Normalform 333
- Nullfolge 38
- Nullmatrix 233
- Nullvektor 234
- numerische Integration 219
- Nutzungsdauer 435
- O**
- Oberfläche eines Rotationskörpers 214
- ökonomische Interpretation 356
- Operations Research 320
- Opportunitätskosten 356
- Opportunitätszinssatz 384
- Optimierung, nichtlineare 446
- Optimierungsproblem, lineares 331
 - , nichtlineares 446
 - , quadratisches 469
- Option 444
- Output 266
- Outputelastizität der Kosten 84
- Outputnorm, vollständige 306
- P**
- Parameter, frei wählbar 289
- Parameter Estimate 471
- partielle Ableitung 172
- penalty functions 461
- Penalty-Methode 461
- PERT 476
- PERT-Methode 482
- Phase II 339
- Pivotelement 254, 335
- Pivotspalte 254
- Pivotzeile 254
- Polyeder, konvexes 325
- Polynom 20, 31
- Polypol 110
- Polytop, konvexes 325
- Portfolio-Problem 457, 468
- positiv definit 452
- positiv semi-definit 452
- Potenzfunktion 17
- Potenzreihe 150
- Preis-Absatz-Funktion 25, 30
- Preisangabenverordnung (PAngV) 389
- Preiselastizität des Absatzes 84
- Preiszone 116
- primales Problem (P) 348
- Problem, duales 348
 - , primales 348

- Produktionselastizität 84
Produktionsfunktion 29 f.
Produktionsplanung 321
Produktionstheorie, neoklassische 30
Produktmatrix 241
Produktregel 50
Programm, lineares 331
–, nichtlineares 446
Prohibitivpreis 130, 139
Prohibitivpreise 135
Prozedur, ASSIGN 473
–, CPM 479
–, GANTT 480
–, IML 484
–, LP 464
–, NETFLOW 475
–, NLP 467
–, Optmodel 485
–, TRANS 472
Prozentannuität 412
Punkt, zulässiger 326
Put 444
- Q**
quadratisches Optimierungsproblem 469
Quotientenkriterium für Potenzreihen 151
– für Reihen 147
Quotientenregel 51
- R**
Randminimum 108
Ratenkredit 421
Ratentilgung 408, 410
Reagibilität 79
–, detaillierte Klassifizierung 85
–, gewinnmaximierender Absatz 139
–, Klassen 85
–, Klassifizierung 80
–, maximaler Gewinn 139
–, Messgrößen 80
Reagibilitätsgrad der Kosten 92
Reagibilitätsvergleich 80
Realteil 160
Rechenzeile 254
Rechteckregel zur numerischen Integration 219
rechtsgekrümmt 24
Regel von SARRUS 312
Reihe, arithmetische 146
–, divergente 146
–, geometrische 146
–, harmonische 146
–, konvergente 145
–, MACLAURINSche 153
–, Potenz- 150
–, TAYLOR 157
–, unendliche 145
Rendite 374, 442
Renditerechnung 424
Rente 392
–, abgebrochene 398
–, aufgeschobene 398
–, ewige 399
–, nachschüssige 392
–, unterbrochene 398
–, vorschüssige 392, 396
Rentenbarwert 393, 397
Rentenbarwertfaktor, nachschüssiger 394
Rentenendwert 393, 397
Rentenendwertfaktor, nachschüssiger 394
Rentenrechnung 392
Ressource 357
Restglied 158
Restriktion, eigentliche 322
Restschuld 408
Restwert 435
Richtungsableitung 173
Risiko 442
Risiko-Rendite-Diagramm 443
- S**
SAS 447, 463
SAS/GRAPH 463
SAS/OR 463
SAS-Programm 464
SAT 478
Sättigungsprozess 32
Sättigungswert 21
Schattenpreis 356
Scheinvorgang 476
Schlupfvariable 332
schwacher Dualitätssatz 350
Sekantenverfahren 428
Sensitivitätsanalyse 362
SET 478
Simplex-Algorithmus 320
–, dualer 351, 353
–, Grundlage 446
–, Phase 0 348
–, Phase I 346
–, Phase II 339 f., 346
–, Phase III 353

- Simplex-Kurztableau, Rechenregeln 338
Simplex-Tableau 335
–, Kurzform 336
–, Langform 335
SIMPSON-Regel zur numerischen Integration 220
Skalarprodukt 240
Sollzinssatz 409
Spaltenindex 232
Spaltenvektor 232
Sparquote 78
Sparziel 394
Spatprodukt 312
Stammfunktion 195
Standard-Maximum-Problem 332
starker Dualitätssatz 350
steepest edge 342
Steepest unit ascent 340
Stetigkeit 44, 171
–, Wesen 46
streng konkav 64, 452
streng konvex 64, 452
streng monoton fallend 61
streng monoton wachsend 61
Ströme 230
Stromgröße 229
Strukturvariablen 326, 332
Stückkosten 99
Stücknotiz 425
Stufenproduktion 229, 307
– mit Verzweigungen 270
Summenregel 50
Systemmatrix 276
–, erweiterte 276
- T**
Tangentenregel zur numerischen Integration 220
Tangentialebene 179
TAYLOR, Polynom 157
–, Reihe 157
–, Satz von 157
Tilgung 408
Tilgungsplan 408 f., 418
Tilgungsrate 408
Tilgungsrechnung 408
Tilgungssatz, anfänglicher 412
totales Differenzial 180
Transport 230
Transportproblem 323, 359, 471
- Trapezform 281
Trapezregel zur numerischen Integration 220
TURGOT-Funktion 73
Typ einer Matrix 232
- U**
überproportional 81, 85
Überproportionalität 89
–, abnehmende 86
–, zunehmende 86
Umformung, elementare 253
Umkehrfunktion 26
Umsatzrentabilität 91
unelastisch 85
unendliche Reihe 145
Ungleichung 323
unterproportional 81, 85
Unterproportionalität 89
–, abnehmende 86
–, zunehmende 86
Urbildpunkt 14
- V**
Variable, abhängige 14
–, unabhängige 14
Vektor der Marktanteile 264
–, Komponenten 232
–, linear abhängig 258
–, linear unabhängig 258
–, Linearkombination 238
–, Linearkombination, konvexe 238
–, Norm (Länge) 245
–, summierender 234
Vektorprodukt 312
Vektorraum 259
Vergleichskriterium für Reihen 146
Verkaufsoption 444
Verkettung 20
Verzinsung, antizipative 375
–, dekursive 375
–, einfache 369
–, exponentielle 372
–, gemischte 377
–, jährliche 372
–, nachschüssige 375
–, stetige 380
–, unterjährige 378, 405
–, vorschüssige 375
Verzweigung 270
volkswirtschaftliche Verflechtung 230, 266

Volumen eines Rotationskörpers 214
– eines zylindrischen Körpers 221
Vorgang 476

W

Wachstum, exponentielles 31
–, gebremstes 32
–, lineares 31
Wachstumsfunktion, logistische 21, 33
Wachstumskonstante, natürliche 19
Wachstumsrate 31
Wanderungsmatrix 264
Wanderungszahl 263
Wartezeit 398
Wendepunkt 64
Wertebereich 14, 169
Wertepaar 14
Wertzuwachs p. a. 387
Winkelfunktion 19
Wirkungsgröße 29
Wurzelfunktion 17
Wurzelkriterium für Potenzreihen 151
– für Reihen 147

Z

Zahlen, komplexe 160
Zahlenfolge 38

Zahlungstermin, mittlerer 390
Zeilenindex 232
Zeilenvektor 232
Zeitrente 392
Zielfunktion 322
Zielgröße 29
Zins 369
–, effektiver 386
Zinsbindung 419
Zinsdivisor 372
Zinseszinsen 369, 372
Zinsfuß 369
Zinskapitalisierungszeitpunkt 369
Zinssatz 369
–, interner 384
Zinsschuld 425
Zinstage 370
Zinsteiler 372
Zinszahl 372
zulässiger Punkt 326
Zuordnungsproblem 473
Zuordnungsvorschrift 14
Zuschreibungsabschreibung 439
Zuwachs 23, 47
– der Funktionswerte 47
Zwischenwertsatz 46