Dirk Werner

Einführung in die höhere Analysis

Topologische Räume
Funktionentheorie
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Maß- und Integrationstheorie
Funktionalanalysis

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n(f)|^2 = \|f\|_{L^2}^2$$

2., korrigierte Auflage

Springer

Springer-Lehrbuch

Dirk Werner

Einführung in die höhere Analysis

Topologische Räume
Funktionentheorie
Gewöhnliche Differentialgleichungen
Maß- und Integrationstheorie
Funktionalanalysis

2., korrigierte Auflage

Mit 13 Abbildungen

Springer

Prof. Dr. Dirk Werner
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 6
14195 Berlin
Deutschland
werner@math.fu-berlin.de

ISBN 978-3-540-79599-5 e-ISBN 978-3-540-79696-1

DOI 10.1007/978-3-540-79696-1

Springer-Lehrbuch ISSN 0937-7433

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 28-01, 30-01, 34-01, 46-01, 54-01

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines TEX-Makropakets
Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Für Irina, Felix und Nina

Vorwort

Das vorliegende Buch versucht einen Einblick in die Analysis jenseits der Vorlesungen der ersten beiden Semester zu geben. Es umfasst fünf weitgehend voneinander unabhängige Kapitel über topologische Räume, Funktionentheorie, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie sowie Funktionalanalysis. In ihnen werden die grundlegenden Begriffe und Resultate dieser Gebiete behandelt, die für potenziell alle Studierenden relevant sind. Ich habe allerdings nicht angestrebt, jeweils den Inhalt einer vierstündigen Vorlesung zu vermitteln, sondern mich auf die Grundkenntnisse konzentriert, die hier also in kompakter Form präsentiert werden.

Im einzelnen enthält Kapitel I, ausgehend von der als bekannt vorausgesetzten elementaren Theorie metrischer Räume, eine Einführung in die Sprache der mengentheoretischen Topologie. Hier steht in der Tat das Vokabular im Vordergrund, denn tiefliegende Resultate sind in den Anfangsgründen der Topologie eher die Ausnahme als die Regel.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit der Funktionentheorie und bringt die Grundtatsachen über analytische und meromorphe Funktionen bis zum Residuensatz und seinen Anwendungen; der Cauchysche Integralsatz wird in seiner Homotopieversion bewiesen.

Kapitel III über gewöhnliche Differentialgleichungen konzentriert sich nach der Diskussion des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf auf Systeme linearer Differentialgleichungen; aber es gibt auch einen Abschnitt über die Stabilitätstheorie von Gleichgewichtspunkten nichtlinearer Systeme.

Im vierten Kapitel wird die Lebesguesche Integrationstheorie auf maßtheoretischer Grundlage dargestellt. Selbst wenn man hauptsächlich an der Integration von Funktionen auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$ und ergo am Lebesguemaß interessiert ist, ist der hier gewählte Zugang über abstrakte σ-additive Maße und die zugehörigen Integrale vom technischen Aufwand her kaum komplizierter, aber für die Bedürfnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie unumgänglich.

Das letzte Kapitel führt in die Funktionalanalysis ein; dort findet man die wichtigsten Aussagen über Banach- und Hilberträume sowie die auf ihnen operierenden beschränkten linearen (insbesondere kompakten) Operatoren. Manche Resultate werden separat bzw. ausschließlich im Hilbertraumkontext bewiesen, z.B. die Fredholmsche Alternative, um die Beweise übersichtlicher zu halten.

Außer dem Grundkanon, wie er oben skizziert wurde, enthält jedes Kapitel noch (mindestens) einen apokryphen Abschnitt, etwa über Anwendungen des Baireschen Kategoriensatzes in der Analysis, den Primzahlsatz, Sturm-Liouvillesche Rand- und Eigenwertprobleme, den Brouwerschen Fixpunktsatz oder den Satz von Hahn-Banach und reflexive Räume. Diese eleganten Ergebnisse aufzunehmen konnte ich mir bei aller Konzentration aufs Wesentliche nicht entsagen!

Zu jedem Kapitel gibt es am Schluss ein kurzes Literaturverzeichnis; im Text wird dabei z.B. auf das 1978 erschienene Buch von Birkhoff und Rota als Birkhoff/Rota [1978] verwiesen.

Das Manuskript basiert auf Vorlesungen, die ich an der FU Berlin und an der National University of Ireland, Galway, gehalten habe. Zahlreiche Studierende und Kollegen haben mit ihrer Kritik geholfen, den Text zu verbessern. Herzlichen Dank dafür! Insbesondere möchte ich an dieser Stelle Ehrhard Behrends erwähnen, auf den im übrigen die Idee zurückgeht, dieses Buch zu schreiben.

Auch Ihre Kommentare, liebe Leserinnen und Leser, sind sehr willkommen; bitte lassen Sie mich alle Unstimmigkeiten, die Ihnen auffallen, wissen (gern per email an `werner@math.fu-berlin.de`). Ich habe vor, notwendige Korrekturen auf meiner Internetseite

`www.math.fu-berlin.de/~werner`

zu dokumentieren.

Berlin, im Mai 2006 *Dirk Werner*

In der neuen Auflage habe ich die mir bekannt gewordenen Tipp- und sonstigen Fehler korrigiert; der gravierendste war gewiss der unzulängliche Beweis der Jordan-Zerlegung eines signierten Maßes. Zukünftige Leserinnen und Leser werden besonders von den Bemerkungen von Hans Crauel, Felix Poloczek, Tarik Kilian Scheltat, Mario Ullrich, Jürgen Voigt und Jochen Wengenroth profitieren!

Berlin, im November 2008 *Dirk Werner*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Topologische Räume

Wenn eine Menge T mit einer Metrik d versehen wird, haben wir die intuitive Idee des Abstands mathematisch präzise gefasst. Wir können quantitativ bestimmen, wie nahe zwei Punkte einander sind, und wir können qualitativ feststellen, ob ein Punkt t „unendlich nahe“ bei einer Menge M liegt (präzise: ob $t \in \overline{M}$); für letzteres wird die Maschinerie der offenen und abgeschlossenen Mengen entwickelt.

Auf $\mathbb{R}^d$ betrachtet man zum Beispiel die Metriken ($s = (s_1, \dots, s_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$)

$$\begin{aligned} d_1(s,t) &= \sum_{k=1}^{d} |s_k - t_k|, \\ d_2(s,t) &= \biggl(\sum_{k=1}^{d} |s_k - t_k|^2\biggr)^{1/2}, \\ d_3(s,t) &= \max_k |s_k - t_k|. \end{aligned}$$

Diese sind zwar verschieden, aber insofern qualitativ gleichwertig, als sie dieselben offenen Mengen auf $\mathbb{R}^d$ generieren. Anders liegen die Verhältnisse auf unendlichdimensionalen Räumen. Sei

$$C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ ist stetig}\}.$$

Die Metriken

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds$$

und

$$d_2(f,g) = \sup_{s \in [0,1]} |f(s) - g(s)|$$

messen qualitativ unterschiedliche Abstandsbegriffe, da man leicht $f_n \in C[0,1]$ mit $d_1(f_n, 0) \le 1/n$, aber $d_2(f_n, 0) \ge n$ konstruiert. (Im d_1-Sinn ist f_n sehr

D. Werner, *Einführung in die höhere Analysis*, 2nd ed., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-540-79696-1_1,

nahe bei 0, im d_2-Sinn sehr weit davon entfernt.) In der Tat erzeugen die beiden Metriken unterschiedliche Systeme offener Mengen.

Konvergenz im Sinn der Metrik d_1 ist die Konvergenz im Integralmittel; Konvergenz im Sinn der Metrik d_2 ist die gleichmäßige Konvergenz. Ein weiterer natürlicher Konvergenzbegriff auf $C[0,1]$ ist die punktweise Konvergenz:

$$f_n \to f \text{ punktweise } \iff f_n(t) \to f(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Es zeigt sich, dass es *keine* Metrik gibt, aus der dieser Konvergenzbegriff abgeleitet werden kann. Jedoch kann die punktweise Konvergenz mit Hilfe einer allgemeineren mathematischen Struktur als der des metrischen Raums, nämlich der des topologischen Raums, studiert werden. Dabei geht man von einem ausgezeichneten System von (offen genannten) Mengen aus, das gewissen Eigenschaften genügt (siehe Definition I.2.1). Das Vorgehen ist also hier geometrisch, in der Tat lassen sich viele topologische Phänomene an zweidimensionalen Skizzen veranschaulichen.

Dieses Kapitel führt in die Sprache der mengentheoretischen Topologie ein; ein Steilkurs über metrische Räume findet sich im ersten Abschnitt.

I.1 Prolog: Metrische Räume

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Tatsachen über metrische Räume zusammengestellt; Beweise finden sich in fast allen Analysisbüchern[1].

Eine Menge T, versehen mit einer Abbildung $d\colon T \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($s, t, u \in T$ beliebig)

(a) $d(s,t) \geq 0$,
(b) $d(s,t) = d(t,s)$,
(c) $d(s,u) \leq d(s,t) + d(t,u)$,
(d) $d(s,t) = 0 \iff s = t$,

wird *metrischer Raum* und d eine *Metrik* genannt. (c) heißt die *Dreiecksungleichung*. Gilt in (d) nur „$\Leftarrow$“, so spricht man von einem *pseudometrischen Raum*. In einem metrischen (oder pseudometrischen) Raum betrachte die Kugeln

$$U_\varepsilon(t) = \{s \in T\colon d(s,t) < \varepsilon\}.$$

Sei $M \subset T$. Ein Punkt $t \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, und M heißt *Umgebung* von t, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(t) \subset M.$$

Eine Teilmenge $O \subset T$, für die jedes $t \in O$ innerer Punkt ist, heißt *offen*.

Satz I.1.1 *Sei (T,d) ein metrischer Raum und τ die Menge aller offenen Teilmengen von T.*

[1] Vgl. etwa O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg.

(a) *$\emptyset \in \tau$, $T \in \tau$.*
(b) *Sind $O_1 \in \tau$ und $O_2 \in \tau$, so gilt $O_1 \cap O_2 \in \tau$.*
(c) *Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $O_i \in \tau$ $(i \in I)$, so ist auch $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.*

Allgemeiner nennt man ein System von Teilmengen einer Menge T, welches die obigen Bedingungen (a)–(c) erfüllt, eine *Topologie* auf T und spricht von T als topologischem Raum; siehe Definition I.2.1. Metrische Räume wurden zuerst von Fréchet (1906) und topologische Räume zuerst von Hausdorff (1914) betrachtet.

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $T \setminus A$ offen ist. Analog zu Satz I.1.1 gelten also:

(a) $\emptyset$ und T sind abgeschlossen.
(b) Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(c) Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Bedingung (c) impliziert, dass für jede Teilmenge $M \subset T$ eine kleinste abgeschlossene Menge existiert, die M umfasst. Diese wird mit $\overline{M}$ bezeichnet und *Abschluss* von M genannt:

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

Analog ist das *Innere* von M

$$\operatorname{int} M := \bigcup_{\substack{O \subset M \\ O \text{ offen}}} O$$

die größte offene Menge, die in M liegt. Offenbar besteht $\operatorname{int} M$ genau aus den inneren Punkten von M.

Der *Rand* von M ist

$$\partial M := \{t \in T\colon U_\varepsilon(t) \cap M \neq \emptyset \text{ und } U_\varepsilon(t) \cap T\setminus M \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

∂M ist stets abgeschlossen, und es gilt $\overline{M} = M \cup \partial M$ sowie $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$.

Eine Folge (t_n) in einem metrischen Raum T heißt *konvergent* gegen $t \in T$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad d(t_n, t) \leq \varepsilon.$$

t heißt *Limes* von (t_n). Es ist leicht zu sehen, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. (Das gilt nicht mehr in pseudometrischen Räumen.) Man schreibt $t_n \to t$ oder $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Besitzt t nur die Eigenschaft, dass jede Umgebung von t unendlich viele Folgenglieder enthält, heißt t *Häufungspunkt* von (t_n).

Satz I.1.2 *Folgende Bedingungen sind in einem metrischen Raum äquivalent:*

(i) $t \in \overline{M}$.

(ii) *Es existiert eine Folge* (t_n) *in* M *mit* $t_n \to t$.

Als Korollar folgt:

Korollar I.1.3 *Folgende Bedingungen sind in einem metrischen Raum äquivalent:*

(i) A *ist abgeschlossen.*

(ii) *Für jede konvergente Folge* (t_n) *in* A *ist* $\lim_n t_n \in A$.

Seien (T_1, d_1) und (T_2, d_2) metrische Räume. Dann definiert

$$d\big((s_1, s_2), (t_1, t_2)\big) = d_1(s_1, t_1) + d_2(s_2, t_2)$$

eine Metrik auf dem Produktraum $T_1 \times T_2$. Eine Folge $\big((x_n, y_n)\big)$ in $T_1 \times T_2$ konvergiert genau dann gegen (x, y), wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gelten.

Sei nun $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $t_0 \in T_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \quad d_1(t, t_0) < \delta \Rightarrow d_2\big(f(t), f(t_0)\big) < \varepsilon.$$

Man erhält eine äquivalente Definition, wenn man „$\leq$“ statt „$<$“ verwendet. Offenbar ist f genau dann stetig bei t_0, wenn für jede Umgebung V von $f(t_0)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t_0 ist.

Satz I.1.4 *Sei* $f\colon T_1 \to T_2$ *eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) f *ist stetig bei* t_0.

(ii) $t_n \to t_0 \Rightarrow f(t_n) \to f(t_0)$ *für alle Folgen* (t_n).

Eine Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ heißt schlechthin *stetig*, falls sie an jeder Stelle $t_0 \in T_1$ stetig ist. Nach Definition ist die Stetigkeit also eine lokale Eigenschaft; denn es geht an jeder Stelle t_0 nur das Verhalten von f in einer Umgebung von t_0 ein.

Satz I.1.5 *Für eine Abbildung* f *zwischen metrischen Räumen* T_1 *und* T_2 *sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig.*

(ii) *Für alle offenen* $O \subset T_2$ *ist* $f^{-1}(O)$ *offen in* T_1.

(iii) *Für alle abgeschlossenen* $A \subset T_2$ *ist* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* T_1.

Eine Metrik induziert nicht nur eine topologische Struktur, sondern auch eine *uniforme Struktur*, die sich in den Begriffen Cauchyfolge, Vollständigkeit und gleichmäßige Stetigkeit manifestiert; diese Begriffe haben kein Gegenstück in der Theorie der topologischen Räume. Eine *Cauchyfolge* in einem metrischen Raum (T, d) ist durch die Forderung

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N \quad d(t_n, t_m) \leq \varepsilon$$

definiert. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Mit T_1 und T_2 ist auch $T_1 \times T_2$ vollständig.

Es ist zu beachten, dass verschiedene Metriken auf einer Menge zwar dieselbe Topologie, aber unterschiedliche uniforme Strukturen erzeugen können. Wird z.B. $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d_2(s,t) = |\arctan s - \arctan t|$ versehen, so sind die d_2-offenen Mengen genau die üblichen offenen Mengen; jedoch ist die Folge (n) der natürlichen Zahlen eine nicht konvergente Cauchyfolge. Daher ist $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig.

Eine Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall s, t \in T_1 \quad d_1(s,t) < \delta \Rightarrow d_2\bigl(f(s), f(t)\bigr) < \varepsilon.$$

Bei der Definition der Stetigkeit darf δ vom betrachteten Punkt t abhängen; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hat man δ unabhängig von t zu wählen. Im Gegensatz zur Stetigkeit handelt es sich hier also um eine globale Eigenschaft.

Ein zentraler topologischer Begriff ist der der Kompaktheit. Ein metrischer Raum T heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Mit anderen Worten, wenn (O_i) eine Familie offener Mengen mit $T = \bigcup_{i \in I} O_i$ ist, so existieren endlich viele $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $T = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.

Ist (T, d) ein metrischer Raum und $S \subset T$, so kann (S, d) als eigenständiger metrischer Raum angesehen werden. Ist T kompakt und $S \subset T$ abgeschlossen, so ist auch S kompakt. Ist T ein beliebiger metrischer Raum und $S \subset T$ kompakt, so ist S abgeschlossen. Beachte, dass die Abgeschlossenheit nur mit Bezug auf einen größeren Raum formuliert werden kann (S ist abgeschlossen *in* T); hingegen ist die Kompaktheit ein intrinsischer Begriff.

Wenn $f\colon T_1 \to T_2$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen ist und T_1 kompakt ist, so ist auch $f(T_1)$ kompakt. Ferner ist unter diesen Voraussetzungen f gleichmäßig stetig.

Eine reiche Quelle metrischer Räume bieten die *normierten Räume*, das sind Vektorräume X über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die mit einer *Norm*, also einer Abbildung $x \mapsto \|x\|$ mit ($x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ beliebig)

(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

versehen sind. Wieder nennt man (c) die Dreiecksungleichung. Eine Norm induziert vermöge

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf X. Es ist begrifflich zu beachten, dass ein normierter Raum immer ein Vektorraum ist, während ein metrischer Raum im allgemeinen keine algebraische Struktur trägt. Beispiele für normierte Räume sind $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der *euklidischen Norm* ($x = (t_1, \dots, t_n)$)

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |t_k|^2 \right)^{1/2}$$

oder der Raum $\ell^\infty(T)$ aller beschränkten Funktionen auf einer Menge T mit der *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in T} |f(t)|.$$

Ein normierter Raum, der in der obigen Metrik vollständig ist, heißt nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach (1892–1945) *Banachraum*; die beiden obigen Beispiele sind jeweils Banachräume. Kapitel V beschäftigt sich ausführlich mit normierten und Banachräumen.

I.2 Grundbegriffe

Wir führen nun nach und nach das Vokabular der topologischen Räume ein.

Definition I.2.1 Sei T eine Menge. Eine *Topologie* auf T ist ein System τ von Teilmengen von T mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset \in \tau$, $T \in \tau$.

(b) Sind $O_1, O_2 \in \tau$, so ist auch $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

(c) Ist I eine Indexmenge und sind $O_i \in \tau$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$.

Man nennt (T, τ) (oder auch T selbst, wenn die explizite Angabe von τ nicht notwendig erscheint) einen *topologischen Raum*; die in τ versammelten Mengen werden auch *offen* (genauer τ-*offen*) genannt.

Durch Induktion folgt aus (b), dass der Schnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist.

Beispiele. (a) Sei d eine Metrik auf einer Menge T. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$U_\varepsilon(t) = \{s \in T \colon d(s,t) < \varepsilon\},$$
$$B_\varepsilon(t) = \{s \in T \colon d(s,t) \le \varepsilon\}.$$

Bekanntlich heißt eine Teilmenge O des metrischen Raums (T, d) offen, wenn

$$\forall t \in O \ \exists \varepsilon > 0 \ \ U_\varepsilon(t) \subset O. \tag{I.1}$$