Masterclass

mc

Martin Prechtl

Mathematische Dynamik

Modelle und analytische Methoden der Kinematik und Kinetik

Springer Spektrum

Masterclass

mc

Martin Prechtl

Mathematische Dynamik

Modelle und analytische Methoden der Kinematik und Kinetik

Springer Spektrum

Springer-Lehrbuch Masterclass

Martin Prechtl

Mathematische Dynamik

Modelle und analytische Methoden der Kinematik und Kinetik

Springer Spektrum

Martin Prechtl
Fakultät Maschinenbau und Automobiltechnik
Hochschule für angewandte Wissenschaften
Coburg
Coburg, Deutschland

ISBN 978-3-662-44795-6 ISBN 978-3-662-44796-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-44796-3

Mathematics Subject Classification (2010): 62-01,62-C05,62-B05,62-N05

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.
www.springer-spektrum.de

Vorwort

"Magna pars est profectus velle proficere."

– L.A. Seneca, 4 v.Chr. - 65 n.Chr. –

Nach Seneca hat der Wunsch nach Fortschritt den größten Anteil an dem, was man erreicht hat. Folglich ist das permanente Bestreben, Neuland zu betreten und dieses zu durchdringen, Quell einer erfolgreichen und damit auch befriedigenden Weiterentwicklung. Dieses Buch soll die spannende Welt der Dynamik eröffnen, kombiniert mit einem intensiven Hauch von Mathematik. Hat jemand das Ziel, in diese "Disziplin" einzutreten und schließlich bis zu einem qualifizierenden Wissensstand fortzuschreiten, so sollen hier alle notwendigen Hilfestellungen gefunden werden.

Grundlage für den Inhalt sind meine Lehrveranstaltungen über "Dynamik und Höhere Dynamik" sowie "Mathematische Methoden und Modelle" an der Hochschule Coburg. Eine Reihe von Inspirationen dafür haben aber ihren Ursprung in den früheren Vorlesungen "Technische Mechanik 3 – Kinematik und Kinetik" sowie "Technische Mechanik 5 – Maschinendynamik" von Professor Kuhn (ehem. Ordinarius des Lehrstuhls für Technische Mechanik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg). Ich hatte die Ehre, bei ihm – zusammen mit Professor Geiger – meine Promotionseignungsprüfung abzulegen. An dieser Stelle sei auch ganz besonders der mittlerweile leider schon verstorbene Professor Rast (Hochschule München) erwähnt; er hat mich stets für Mathematik begeistert und mir prägende Impulse für einen erfolgreichen Abschluss des Studiums gegeben. So manche Beispiele aus seinem grandiosen Mathematikunterricht leben jetzt in meinen Vorlesungen weiter.

Das Buch "Mathematische Dynamik" stellt den Anspruch, abgesehen von einigen Details, die gesamte Bandbreite der Theorie der Bewegungsvorgänge darzustellen, unter Berücksichtigung aller für ein vertieftes Verständnis der Theorie erforderlichen Herleitungen. Jedoch liegt der Fokus in der Darstellung der systematischen Denkweise im Rahmen der Modellbildung bzw. der Lösung von spezifischen Fragestellungen. Zudem werden die Sätze der Dynamik sowie ausgewählte mathematische Methoden an relativ einfachen, aber aussagekräftigen Beispielen angewandt und diese komplett und ausführlich durchgerechnet. Eine vergleichende Erläuterung alternativer Lösungsansätze – sofern möglich und sinnvoll – liefert dem Leser schließlich einen übergeordneten Blick auf die Thematik und fördert dabei das Erkennen spezifischer Zusammenhänge sowie das laterale Denkvermögen. Das Lehrbuch ist hervorragend als Primär- oder Ergänzungsliteratur für ein Studium des Maschinenbaus an Hochschulen für angewandte Wissenschaften bzw. Technischen Hochschulen und Universitäten geeignet sowie für Studierende und Lehrende in einem fachlich verwandten Studiengang. Hierbei sei betont, dass die "Mathematische Dynamik" eine passende und vertiefende Ergänzung zu Band 3 der etablierten Reihe "Technische Mechanik" (ebf. Springer-Verlag) der Professoren D. Gross, W. Hauger, J. Schröder und W.A. Wall ist.

Ich danke an dieser Stelle dem Springer-Verlag, der sich spontan und unkompliziert bereit erklärt hat, meine Gedanken zur Dynamik zu veröffentlichen. Allen voran sei hierbei Hr. Clemens Heine, Publishing Editor und Programmleiter Mathematik + Statistik, genannt. Danken darf ich natürlich auch der Leitung der Hochschule Coburg mit Präsident Prof. Pötzl, die mir für dieses Projekt zwei "halbe Forschungssemester" gewährt hat.

Mein größter Dank gilt jedoch meiner lieben Ehefrau Bettina, die wieder einmal Verständnis dafür aufbrachte, dass ich mich über einen längeren Zeitraum ganz intensiv einem fachlichen Thema zuwandte; darunter hatte der eine oder andere Abend zu leiden. Gewidmet sei das Buch aber "meinen beiden Mädels", meinen bezaubernden Töchtern Mathilda Marie und Lisbeth Luisa. Es ist nicht immer einfach mit ihnen, aber sie sind einfach wunderbar. Mögen beide in ihrem Leben auch immer wieder mal das aufregende Bedürfnis verspüren, im positiven Sinne fortschreiten zu wollen.

Martin Prechtl · Coburg im Jahr 2014

Ode an die Dynamik

Das im Folgenden niedergeschriebene “Werk” wurde im Jahr 2012 von drei Maschinenbau-Studenten an der Hochschule für Angewandte Wissenschaften Coburg verfasst. Es könnte zur “Aufheiterung” dienen und damit das Erlernen der Dynamik erleichtern. ....

Frei nach dem wohl berühmtesten Schiller-Gedicht “Ode an die Freude”, insbesondere bekannt in der Vertonung von Ludwig van Beethoven (1770-1827): Schlusschor Sinfonie Nr. 9 in d-Moll, Op. 125: 4. Satz [1].

– 1 –

Freude schöner Kinematik
Tochter aus Elysium
Wir betreten voller Panik,
Himmlische dein Heiligtum.
Deine Kurse quälen wieder,
Spreu vom Weizen wird geteilt,
Die Erlesenen werden klüger,
Wo Deine strenge Knute weilt.

– 2 –

Wem der schiefe Wurf gelungen,
Impuls und Energien kennt.
Wer diesen großen Sieg errungen,
Mit Freude aus der Prüfung rennt.
Wer keine gute Formelsammlung,
Sein Eigen nennt auf dem Erdenrund!
Und wer’s nie gelernt der stehle,
Weinend sich aus diesem Bund.

– 3 –

Dynamik brauchen alle Wesen,
auf dem Wege zum Diplom.
Alle Guten, alle Bösen,
Besteigen so den Masch’bauthron.
Graues Haar und tiefe Falten,
Gewichen ward des Lebens Freud.
Dieses Antlitz bleibt erhalten,
Zehn Jahr dahin der Lebenszeit.

– 4 –

Kinetik heißt die starke Feder,
In der ewigen Natur.
Kinematik treibt die Räder,
In der großen Weltenuhr.
Körper dreht sie um die Achsen,
Der Hebelarm erzwingt Moment.
Kugeln pendeln sanft an Federn,
Was der Prüfer Schwingung nennt.

– 5 –

Aus der Wahrheit Notenspiegel,
Lächelt sie den Prüfling an,
Die Fünf im Zeugnis sei das Siegel,
Für des Müßiggängers Bahn.
Auf dem Tische Bücherberge,
Hört man sie um Gnade fleh’n,
Der Kampf mit
Newtons schwerem Erbe,
Lässt uns im Chor der Meister steh’n.

– 6 –

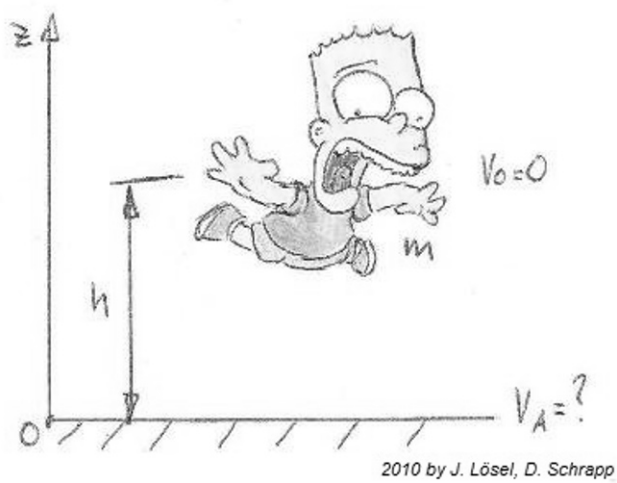
Dozenten kann man’s nicht vergelten,
Schön ist ihnen gleich zu sein.
Wer ohne Plan ist soll sich melden,
Am Zweitversuche sich erfreun.
Groll und Rache sei vergessen,
Auch Herrn Prechtl sei verziehn,
Keine Träne soll ihn pressen,
Keine Reue nage ihn.

– 7 –
Fester Mut in schweren Leiden,
Hilflos wenn der Blackout scheint,
Ewigkeit geschwornen Eiden,
Wahrheit gegen Freund und Feind.
Masch'baustolz vor Königsthronen,
Brüder gält es Gut und Blut,
Gute Noten soll'n uns kleiden,
Untergang der Fristennot.

– 8 –
Feuer sprudelt in den Adern,
Statt des roten Menschenblut,
Brüder heut sollt ihr nicht hadern,
Der Verzweiflung Heldenmut!
Freunde fliegt von euren Sitzen,
Wenn die Prüfung ist vorbei,
Lasst das Bier zum Himmel spritzen,
Morgen ist uns einerlei.

Coburg · 2012 .... von **K. Bauder, K. Hofmann, M. Mayer**

Und wenn wir schon beim "Aufheitern" sind, so darf ein ebenfalls an der Hochschule Coburg – im Rahmen einer Dynamik-Vorlesung (Studiengang Maschinenbau, seiner Zeit noch Diplom) – entstandenes Bild nicht fehlen ...



In diesem Sinne, viel Freude beim Lesen/Studieren! **Martin Prechtl**

Inhaltsverzeichnis

Begriffe, Symbole

Unter der Mechanik, ein fundamentales Teilgebiet der Physik, versteht man allgemein die Lehre von den Kräften und deren Wechselwirkungen. Hierbei ist zwischen klassischer, also "normaler", und relativistischer Mechanik zu unterscheiden; bei atomaren Abmessungen kommt schließlich die Quantenmechanik zur Anwendung. Die Grundlage der klassischen Mechanik bilden die NEWTONschen Axiome, benannt nach Sir Issac NEWTON, 1643-1727 [2].

Bildquelle: [1]

Für Ingenieure sind, speziell im Bereich Maschinenbau, z.B. Bewegungsvorgänge und Gleichgewichte von Maschinenkomponenten sowie deren Verformung und Widerstandsfähigkeit bei Belastung von besonderer Relevanz, man spricht in diesem Zusammenhang von Technischer Mechanik. Die Aufgabe des Ingenieurs ist die Untersuchung der Zusammenhänge und Verhaltensweisen realer Systeme durch geeignete Abstraktion physikalischer Körper und Anwendung mathematischer Methoden.

Die Festkörpermechanik gliedert sich – systematisch betrachtet – in zwei Teilbereiche: Kinematik und Dynamik. Bei ersterem werden Bewegungsvorgänge zeitlich-geometrisch beschrieben, ohne deren Ursache zu berücksichtigen. Dagegen versteht man unter der Dynamik allgemein die Lehre von den Kräften; dabei wird zwischen Statik (ruhende Systeme) sowie Kinetik (Bewegungen) differenziert. Die Stereostatik/Starrkörperstatik behandelt speziell das Kräftegleichgewicht an ruhenden starren Körpern. Schließlich verallgemeinert die Elastostatik (bzw. Festigkeitslehre) jene Betrachtungen und berücksichtigt reversible Verformungen.

Es hat sich jedoch i.Allg. eine eher "umgangssprachliche Strukturierung" der Festkörpermechanik eingebürgert. Dann spricht man bei ruhenden Systemen von Statik und im Falle von bewegten Körpern ganz allgemein von Dynamik. Die Statik beinhaltet hierbei sowohl die Stereo- als auch die Elastostatik (Berechnungsgrundlagen). Meistens wird letztere von der Statik abgespalten und bildet zusammen mit der Beurteilung von Belastungen die sog. Festigkeitslehre. Weiterführende Themenbereiche der Technischen Mechanik sind schließlich Betriebsfestigkeit, Plastizität bzw. Plastomechanik und Bruchmechanik sowie die Maschinen- oder Fahr(zeug)dynamik.

Das Lehrbuch "Mathematische Dynamik" enthält nahezu das gesamte Spektrum der Bewegungsvorgänge, d.h. angefangen von der Kinematik über die Kinetik bis hin zu Fragestellungen bei schwingungsfähigen Systemen. Vektoren sind mit einem "Pfeil" gekennzeichnet, z.B. $\vec{r}$, und deren Betrag durch den entsprechenden Buchstaben: $r = |\vec{r}\,|$. Bezieht sich eine vektorielle Größe explizit auf einen Bezugspunkt B, so wird der Punkt in runden Klammern hochgestellt: $\vec{r}^{\,(\mathrm{B})}$. Handelt es sich um einen bewegten Bezugspunkt, drückt dieses häufig ein "Strich" aus (B', $\vec{r}^{\,\prime} = \vec{r}^{\,(\mathrm{B}')}$). In Skizzen bzw. Bildern werden Vektoren ebenfalls durch einen Pfeil, den Vektorpfeil ($\rightarrow$) symbolisiert. Dieser beinhaltet als Informationen bereits Richtung ("Wirkungslinie") und Orientierung jener Größe. Daher wird der Einfachheit halber in den sog. Freikörperbildern bei u.a. Kräften und Lagerreaktionen (Komponenten der Lagerkräfte) sowie auch den Drehmomenten meistens nur der entsprechende Betrag angegeben (F statt $\vec{F}$). Man spart sich damit die Vorzeichen; diese sind in den Gleichungen natürlich schon zu berücksichtigen, wobei Kräfte und Momente wegen "actio = reactio" stets paarweise entgegengesetzt auftreten. Es sei noch erwähnt, dass Größen mit einem Drehsinn, wie z.B. das Drehmoment, zusätzlich durch eine "Doppelspitze" ($\twoheadrightarrow$) verdeutlich werden. Für Darstellungen in einer Ebene gilt zudem: Neben den beschriebenen Pfeilen symbolisieren $\odot$ bzw. $\otimes$ Kräfte sekrecht zu dieser Ebene, mit Orientierung in bzw. aus der Ebene, sowie $\circlearrowleft$ bzw. $\circlearrowright$ Momente bzgl. einer Achse senkrecht zur Ebene, abhängig vom entsprechenden Drehsinn. Vektoren erfordern für deren Auswertung ein Koordinatensystem. In der Dynamik wird kein "Standard-Koordinatensystem" verwendet, sondern jeweils ein für den Bewegungsvorgang zweckmäßiges.

An dieser Stelle ist noch die im Rahmen dieses Buches verwendete Klassifizierung von Kräften zu erläutern; diese kann schließlich ganz analog auf Momente angewandt werden. Grundsätzlich ist zwischen äußeren und inneren Kräften zu unterscheiden. Unter äußeren Kräften versteht man alle Kräfte nach dem Freischneiden eines Gesamtsystems (Gewichtskräfte, Lagerkräfte), innere Kräfte dagegen sind Kräfte zwischen zwei Körpern eines mechanischen Systems. Bei den äußeren Kräften wird zudem zwischen eingeprägten Kräften (basieren auf einem physikalischen Gesetz) und sog. Reaktionskräften differenziert. Letztere entstehen infolge einer Wechselwirkung mit der ruhenden Umgebung. Reaktionskräfte, die stets senkrecht zu einer Bahn gerichtet sind, sind überhaupt für diese Bahn verantwortlich und heißen (äußere) Zwangskräfte. Die inneren Kräfte gliedern sich in physikalische Bindungskräfte, dieses sind eingeprägte Kräfte, und kinematische Bindungskräfte bzw. "innere Zwangskräfte" bei einem definierten geometrischen / räumlichen Bezug der Lage der entsprechenden Körper zueinander.

1 Kinematik

Unter der Kinematik versteht man allgemein die Lehre von der geometrisch-zeitlichen Beschreibung von Bewegungen. Es wird also nur der Ort eines Körpers im Raum in Abhängigkeit der Zeit betrachtet. Auf wirkende Kräfte bzw. Momente als Ursache einer Bewegung wird dabei nicht eingegangen.

1.1 Kinematik des Punktes

Sind die – räumlichen – Grobabmessungen eines "physikalischen Körpers", d.h. eines Objekts (Gegenstandes) mit Masse m und Volumen V, deutlich kleiner als jene der Bahn, auf der sich der Körper bewegt, so kann kann man diesen idealisiert als (Massen-)Punkt bzw. Punktmasse betrachten. Bei diesem einfachen Modell konzentriert sich rein gedanklich die gesamte Masse m des Körpers in dessen Schwerpunkt. Während in der Stereo- und Elastostatik zur Beschreibung mechanischer Systeme die physikalischen Größen Länge l, Kraft F und Temperatur T ausreichend sind, ist in der Kinematik und damit auch in der Dynamik als weitere Grundgröße die Zeit t mit der Basiseinheit 1 s erforderlich.

Der Ortsvektor $\vec{r}$ kennzeichnet die Lage eines bewegten Massenpunktes im Raum zum Zeitpunkt t. Er ist vom raumfesten Bezugspunkt O zur momentanen Lage P (Raumpunkt) orientiert, vgl. Abb 1.1. Entlang der Bahn lässt sich jedem Zeitpunkt t ein Ortsvektor $\vec{r}$ zuordnen:

$$t \mapsto \vec{r} = \vec{r}(t)\,. \tag{1.1}$$

Hierbei handelt es sich um eine vektorwertige Zeitfunktion; der Ortsvektor beschreibt damit die Bahn des Punktes als Funktion der Zeit.

1.1.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Betrachtet man einen bewegten Massenpunkt zum Zeitpunkt t sowie etwas später, zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ (Abb. 1.1), so hat sich dieser vom Ort P nach $\mathrm{P}_{\Delta\mathrm{t}}$ bewegt; die erfolgende Änderung des Ortsvektors ist $\Delta\vec{r}$. Die Momentangeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{v}(t)$ des Punktes am Ort P ist definiert als die auf die Zeit bezogene Ortsvektoränderung $\Delta\vec{r}$ zum entsprechenden Zeitpunkt

M. Prechtl, *Mathematische Dynamik,* DOI 10.1007/978-3-662-44796-3_1,

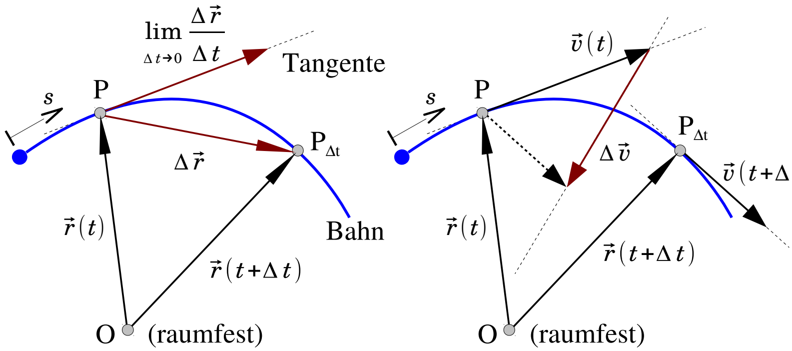


Abb. 1.1.: Zur Definition von Geschwindigkeitsvektor (links) und Beschleunigungsvektor (rechts)

t und ergibt sich folglich durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$. Dieser führt schließlich zur – ersten – Zeitableitung des Ortsvektors $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} ;$$

der Differenzenquotient wird zum Differenzialquotienten bzw. zur sog. Ableitung(sfunktion) $\dot{\vec{r}}$. Somit berechnet sich der Geschwindigkeitsvektor zu

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) \,. \tag{1.2}$$

Bezüglich der Richtung der Momentangeschwindigkeit lässt sich, wie in Abb. 1.1 links ersichtlich, folgender Satz festhalten:

Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ eines Massenpunktes ist stets tangential zur Bahn gerichtet.

Um den Betrag v der Geschwindigkeit $\vec{v}$ angeben zu können, führen wir die Bogenlänge s ein. Ein bewegter Raumpunkt hat bis zur Lage P den Weg s und bis $\mathrm{P}_{\Delta \mathrm{t}}$ den Weg $s + \Delta s$ zurückgelegt. Es gilt also

$$v = \left| \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{|\mathrm{d}\vec{r}\,|}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

bzw.

$$v = \dot{s}(t) \,. \tag{1.3}$$