3.4 Mengen- und Maßaufgabe: Die kleine Schnecke im Brunnen

Eine kleine Schnecke fällt in einen 9 m tiefen Brunnen. Sie kriecht jeden Tag 3 Meter hoch. Jede Nacht rutscht sie jedoch wieder 2 Meter runter.

Wie viele Tage dauert es, bis die kleine Schnecke die Brunnenkante erreicht?

3.4.1 Mathematische Analyse

$$
\begin{aligned}
3m\,(x-1) - 2m\,(x-1) + 3m &= 9m \\
3m\,(x-1) - 2m\,(x-1) &= 6m \\
1m\,(x-1) &= 6m \\
(x-1) &= 6 \\
x &= 6+1 \\
x &= 7
\end{aligned}
$$

3.4.2 Didaktisch-methodische Analyse

Aufgabenformulierung
Variation als Lehrererzählung:

Eine Schnecke hatte es an diesem Tag ungewöhnlich eilig und weil sie nicht aufpasste, purzelte sie in einen tiefen Brunnen. Zum Glück konnte sie sich rechtzeitig in ihr sicheres Schneckenhaus zurückziehen. Deshalb verletzte sie sich auch nicht, obwohl der Brunnen 9 Meter tief war. Der Boden war weich und feucht, Wasser gab es aber schon lange keines mehr in diesem Brunnen.
Trotzdem sah die Sache nicht gut aus für die kleine Schnecke.
(Pause – Antizipation der Kinder)
„Oh weh, wie komme ich hier bloß wieder raus? Das dauert bestimmt eine Ewigkeit!“, jammerte die kleine Schnecke und machte sich stöhnend auf den Weg nach oben. Sie nahm all ihre Kräfte zusammen und schaffte 3 Meter am ersten Tag. Nachts aber war sie so müde und erschöpft, dass sie schlafen musste. An der glitschigen Wand des alten Brunnens rutschte sie wieder 2 Meter nach unten.

Jeden Abend, bevor der kleinen Schnecke die Augen zufallen, stellt sie sich eine Frage …
(Kinder formulieren Problemfrage:
Wie lange dauert es, bis die kleine Schnecke aus dem Brunnen herausgekrochen ist?)

Lösung:
Die kleine Schnecke braucht **7 Tage**, bis sie oben am Brunnenrand ankommt.
1. Tag mit Nacht: 3 m (Tag) – 2 m (Nacht) = 1 m
2. Tag mit Nacht: 3 m (Tag) – 2 m (Nacht) = 1 m
…
→ 6 Tage benötigt sie für 6 m.
Sie muss aber 9 m schaffen: 9 m – 6 m = 3 m
→ 3 m fehlen noch

7. Tag **ohne** Nacht: 3 m (Tag)
→ 6 Tage (6 m) + 1 Tag (3 m) = 9 m
Am siebten Tag erreicht sie den Brunnenrand.

Fragestellungen und Problemerfassung
Neben der Problemfrage helfen zunächst auch kleinere Teilfragen, sich einer Lösung anzunähern:

- Welche Strecke kann die kleine Schnecke an einem Tag zurücklegen?
- Wie viele Meter schafft sie an 2 bzw. 3 Tagen?
- Wie weit ist sie gekommen, bevor ihr am 3. Tag die Augen zufallen?
- An welcher Stelle im Brunnen befindet sie sich am Morgen des 4. Tages?

Einerseits muss der Problemlöser bei dieser Aufgabe die Regelmäßigkeit, das Schema der Berechnung der täglichen Einzelstrecke erfassen (3 m – 2 m = 1 m), andererseits auch die Endlichkeit desselben am 7. Tag erkennen. Am 7. Tag entfällt das Abziehen der „gerutschten“ 2 Meter, da die kleine Schnecke bereits angekommen ist. Dies stellt neben dem Finden einer geeigneten Struktur zur Berechnung der Gesamtstrecke wohl den Knackpunkt der Schnecken-Aufgabe dar. Das Zahlenmaterial im Zehnerraum bedeutet für die Kinder der Grundschule hingegen keine Herausforderung, lediglich die Art und Weise der Darstellung.

Aufgabenspezifische Aspekte zur Entwicklung/Förderung der Problemlösekompetenz – Auswahl geeigneter heuristischer Verfahren (Prinzipien, Strategien, Hilfsmittel)
Das systematische Probieren ist hier eng verknüpft mit der Strategie des Vorwärtsarbeitens. Man fängt einfach mal an zu rechnen: 3 – 2 = 1 usw.
Beim systematischen Probieren sucht man dann aus einer Rechenreihe beispielsweise bis zum 10. Tag, den Zeitpunkt heraus, an dem der Brunnenrand erreicht wurde.

Das Vorwärtsarbeiten als Strategie setzt eine gründliche Untersuchung der Ausgangssituation voraus.
Eine Betrachtung des Zahlenmaterials lässt rasch erkennen, dass der Streckengewinn pro Tag (Tag als Einheit von Tag + Nacht) einen Meter beträgt. Die Streckenangaben zu Tag und Nacht, die gerade zu Berechnung des Tagespensums noch vereinheitlicht wurden, müssen nun getrennt behandelt werden. Ohne eine

darauffolgende Nacht im Brunnen legt die Schnecke 3 Meter zurück.

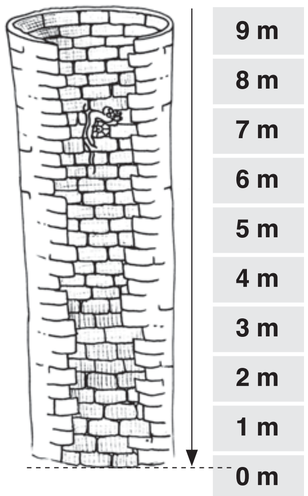
Die Rechnung „9 m – 3 m = 6 m“ lässt also die Schlussfolgerung zu, dass die Schnecke zunächst 6 Tage Zeit benötigt, um dann am nächsten Tag (ohne darauffolgende Nacht) das Ziel von 9 Metern zu erreichen.

9 m – 3 m = 6 m
(Gesamtstrecke, die im Brunnen überwunden werden muss) – (Tagesstrecke ohne nächtl. Streckenverlust)

6 m schafft sie in 6 Tagen,
da sie pro „Tag“ 1 m (= Differenz zwischen Tag und Nachtstrecke) vorankommt.

6 m : 1 m (Differenz Tag/Nacht) = 6 (gesamte Tage mit Nacht)
6 (gesamte Tage mit Nacht) + 1 Tag (für die 3 m Tagesstrecke ohne Nacht)
→ sie braucht 7 Tage – am Abend des 7. Tages kommt sie oben an

Veranschaulichungen
Für eine Begegnung mit der Problemsituation bietet sich eine Darstellung des Brunnen mit Markierungen der Höhenangaben sowie die Präsentation des Handlungsträgers in Form der Schnecke an. So kann den Kindern im Kontext der Rahmengeschichte, bildlich die problemimmanente Situation verdeutlicht werden. Neben motivationalen Aspekten spielt hier auch die Loslösung von der abstrakteren, sprachlichen Textebene eine Rolle. Die Kinder möchten der Schnecke gerne helfen, indem sie ihr sagen, wie lange sie für den Weg aus dem Brunnen brauchen wird.
Das Bild der Schnecke im Brunnen veranschaulicht die mathematischen Inhalte. Zweierlei Streckenangaben sind von Bedeutung: 3 m und 2 m. Wie mit diesen Angaben umzugehen und zu rechnen ist, kann dem Schüler anhand der bildlichen Darstellung erfahrbar gemacht werden. Einmal kriecht die Schnecke nach oben, das andere Mal rutscht sie nach unten ab. Die Streckengewinne und -verluste bedeuten gegensätzliche Richtungen.



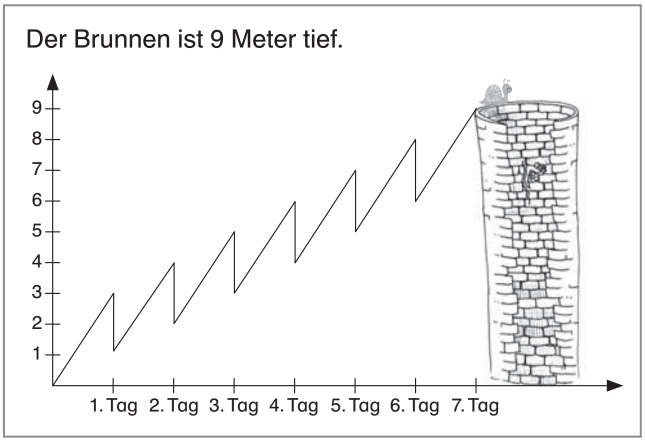
Die Tabelle setzt voraus, dass der Problemkern erfasst wurde. Sie kann dann dazu dienen, eine Übersicht über die zurückgelegten Strecken zu erhalten.

Die entgegengesetzten Richtungen der Strecken lassen sich bei den Angaben in der Nacht am Rechenzeichen ablesen. Zusätzlich können die Teilstrecken der Tagesabschnitte sichtbar gemacht werden.

	1. Tag	2. Tag	3. Tag	4. Tag	5. Tag	6. Tag	7. Tag
Tag	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m	3 m
Nacht	– 2 m	– 2 m	– 2 m	– 2 m	– 2 m	– 2 m	
Gesamt	**1 m**	**1 m**	**1 m**	**1 m**	**1 m**	**1 m**	

1. Tag	1 m
2. Tag	2 m
3. Tag	3 m
4. Tag	4 m
5. Tag	5 m
6. Tag	6 m
7. Tag	6 m + 3 m = 9 m

Die Veranschaulichung mithilfe eines Koordinatensystems eignet sich hervorragend, da hier das Voranschreiten der Schnecke, aber vor allem auch das Abrutschen visualisiert wird. Dieses Hilfsmittel als fachgerechte Darstellungsform der Mathematik (im Sinne eines Lösungsgraphen) kann hier eingeführt werden.



Notationsformen
Neben den genannten Veranschaulichungen kann auch eine Folge von Rechnungen, die die Streckenergebnisse der einzelnen Tage und Nächte widerspiegelt, den Lösungsweg zeigen.

1. Tag: 3 m
1. Nacht: 3 m – 2 m = 1 m

2. Tag: 1 m + 3 m = 4 m
2. Nacht: 4 m – 2 m = 2 m

3. Tag: 2 m + 3 m = 5 m
3. Nacht: 5 m – 2 m = 3 m

4. Tag: 3 m + 3 m = 6 m
4. Nacht: 6 m – 2 m = 4 m

5. Tag: 4 m + 3 m = 7 m
5. Nacht: 7 m – 2 m = 5 m

6. Tag: 5 m + 3 m = 8 m
6. Nacht: 8 m – 2 m = 6 m

7. Tag: 6 m + 3 m = 9 m

Reflexionsebenen – Schwerpunkte und Impulse
Sicherlich bietet sich hier ein Vergleich der gefundenen Lösungswege und der damit verbundenen Darstellungsformen an. Fragen und Impulse richten sich auf die Vor- und Nachteile der aufgezeigten Veranschaulichungen.

- Was bietet diese Darstellungsform? (Ergebnis? Verlauf? etc.)
- Kann ich das Ergebnis direkt ablesen oder muss ich noch schlussfolgern/nachdenken?
- Kann ich diese Darstellung auf eine ähnliche Aufgabe übertragen?
- Kann ich Aussagen treffen über Aufgaben mit anderem Zahlenmaterial?

Außerdem kann herausgearbeitet werden, dass die Rechnung „3 m – 2 m = 1 m“ zur Bestimmung des Tagespensums immer wiederkehrt und dennoch nicht unreflektiert und mechanisch zur Berechnung der „Gesamtkriechdauer“ eingesetzt werden darf.

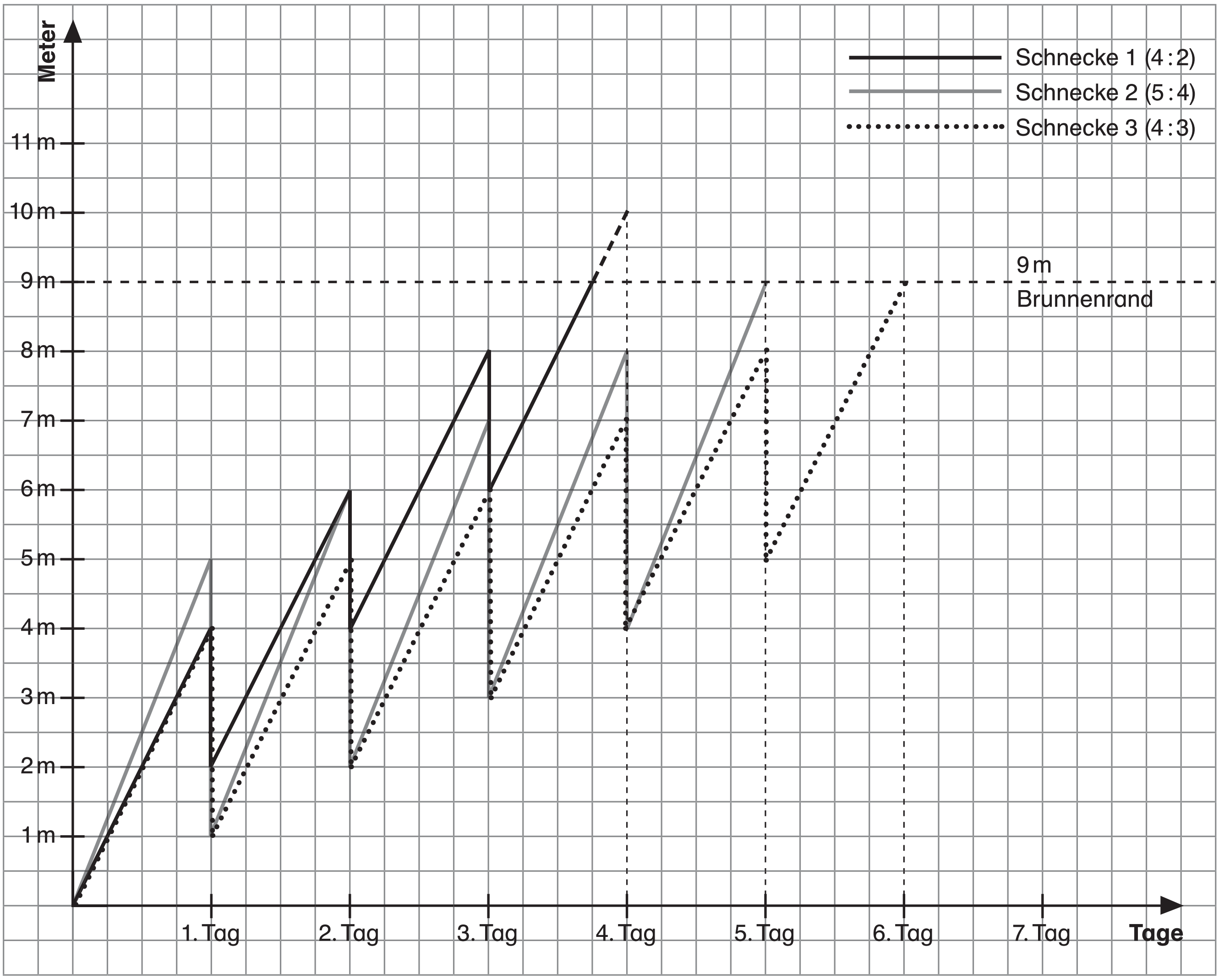
Ein vorschneller Schluss könnte folgende schematische Anwendung nach sich ziehen:

1 Meter → 1 Tag
9 Meter → 9 Tage

Bei 9 m Tiefe des Brunnen könnte man aufgrund der gefundenen Rechnung mutmaßen, dass die Schnecke insgesamt 9 Tage benötigt. Das stimmt aber nicht: Am 7. Tag wird die Tagesstrecke von 3 m erzielt, der Verlust der Nachtstrecke muss aber nicht mit einbezogen werden.

Ein Beispiel zum besseren Verständnis: Am Abend des 2. Tages ist sie 2-mal je 3 m hinaufgeklettert, aber nur 1-mal 2 m hinunter gerutscht. Es kommt also darauf an, zu welcher Tageszeit man die Höhe bestimmt. Das ist entscheidend für die Lösung. Hier dürfen am 7. Tag die 2 m (das Abrutschen in der Nacht) nicht mehr abgezogen werden. Die Schnecke ist ja schon oben angekommen und muss keine weitere Nacht im Brunnen verbringen (s. a. „Qualitative Differenzierungsmöglichkeiten“)!

Im Vergleich mit einem anderen „Schneckentempo“ kann den Schülern bewusst gemacht werden, dass sich sowohl die Höhe der Zahlen als auch der Abstand innerhalb des Verhältnisses auf die Gesamtgeschwindigkeit auswirken.



Koordinatensystem mit 3 Schnecken – Vergleich der Schneckentempi

1) Erhöht man die Tagesstrecke, die die Schnecke schafft (z. B. von 4 m am Tag : 3 m in der Nacht → auf 5 m am Tag : 4 m in der Nacht) erreicht sie schneller ihr Ziel. Der Abstand im Verhältnis ist hier gleich geblieben, trotzdem beeinflusst es die Geschwindigkeit positiv.
2) Verändert man den Abstand innerhalb des Verhältnisses Tagesstrecke zu Nachtstrecke (z. B. von 4 m am Tag : 3 m in der Nacht → auf 4 m am Tag : 2 m in der Nacht) erzielt man ebenfalls eine Erhöhung der Geschwindigkeit: Die Schnecke kommt früher/ schneller oben am Brunnenrand an.

Qualitative Differenzierungsmöglichkeiten (Vereinfachungen und komplexere Aufgabenstellungen)
Die Aufgabe kann zunächst in zwei Teilschritte zerlegt und damit eine Annäherung an das Problem vollzogen werden.

1) Wie weit ist die kleine Schnecke am Abend des 2. Tages gekommen?
2) Wie viel Zeit benötigt die kleine Schnecke für die Strecke von 9 m im Brunnen insgesamt?

Um den unterschiedlichen Leistungsniveaus der Schüler gerecht zu werden, können die verschiedenen Repräsentationsebenen bei der Lösung der Aufgabe angesprochen werden:

- enaktiv: Schnecke im Brunnen vorwärts bewegen
- ikonisch: eine Skizze zur Aufgabe zeichnen
- symbolisch: Darstellung mithilfe eines Koordinatensystems bzw. das Notieren eines geeigneten Rechenweges

Für leistungsstärkere Schüler kann eine komplexere Aufgabenstellung gewählt werden. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, durch einen Vergleich der „Geschwindigkeitsangaben“ (Schnecke A: 3 m : 1 m; Schnecke B: 3 m : 2 m etc.) und dem daraus resultierenden Ergebnis (Schnecke A braucht 4 Tage, Schnecke B 7 Tage), die mathematische Struktur ansatzweise zu erschließen.

Variationen und Transfermöglichkeiten
Analogien:
Gleiche Aufgabenstellung unter Verwendung anderer Zahlen (und damit auch anderer Verhältnisse: vorher 3 : 2, jetzt 4 : 2 u. a.)

- Bei ihrem Sonntagsspaziergang ist die kleine Schnecke Esmeralda in einen 12 Meter tiefen Brunnen gefallen. Sie kriecht jeden Tag 4 Meter an der feuchten Brunnenwand hoch. Da die Wand jedoch sehr glitschig ist, rutscht sie in der Nacht wieder 2 Meter ab.
  12 m – 4 m = 8 m
  (Gesamtstrecke, die im Brunnen überwunden werden muss) – (Tagesstrecke ohne nächtl. Streckenverlust)

  8 m : 2 m (Differenz Tag/Nacht) = 4 (gesamte Tage mit Nacht)
  4 (gesamte Tage mit Nacht) + 1 Tag (für die 4 m Tagesstrecke ohne Nacht)
  → sie braucht 5 Tage – am Abend des 5. Tages kommt sie oben an

Komplexere Aufgabenstellung:
Die Komplexität kann durch einen Vergleich gesteigert werden. Zwei Schnecken kriechen in unterschiedlichem Tempo.

- Schnecke Esmeralda kriecht im Verhältnis 4 : 3, Schnecke Helena im Verhältnis 5 : 4 (Verhältniszahlen sind variierbar, ebenso Anzahl der kriechenden Schnecken)

3.4.3 Materialien